мени, а распределения концентраций реагирующих веществ принципиально отличаются от соответствующих распределений при диффузионном или гомогенном горении газов.

Часть топлива, попавшего в бедные области, сгорает, а часть остается несгоревшей даже, если длина камеры сгорания сколь угодно велика; топливо, попавшее в богатые области, догорит полностью, если длина камеры достаточно велика [9]. При уменьшении α от ∞ до 1 стехиометрическая поверхность вытягивается, приближаясь к выходу из камеры. Это обстоятельство приводит к снижению полноты сгорания топлива, находящегося в богатых областях, что ясно из теории диффузионного горения газов, в которой предполагается, что все несгоревшее топливо находится в таких областях. При этом полнота сгорания топлива в бедных областях растет, так как его догорание обусловлено диффузией топлива к поверхности пламени и при снижении α его площадь увеличивается. Поэтому при снижении α от ∞ до 1 эффективность процесса может меняться немонотонно. Такая закономерность действительно наблюдается в камерах сгорания газотурбинных двигателей и совершенно не характерна для горения газов как диффузионного, так и гомогенного.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Варшавский Г. А.** Изд. Бюро новой техники.— М., 1945.
2. **Spalding D. B.** Fuel, 1950, 29, 25.
3. **Агафонова Ф. А., Гуревич М. А., Тарасова Е. Ф.** Третье Всесоюз. совещание по теории горения. Т. 2.— М.: Изд-во АН СССР, 1960.
4. **Зельдович Я. Б.** ЖТФ, 1949, 19, 10, 1199.
5. **Вильямс Ф. А.** Теория горения.— М.: Наука, 1971.
6. **Gogos D., Sadhal S. S., Ayyaswamy P. S. e. a.** J. Fluid Mech., 1986, 171, 121.
7. **Burgoyne J. H., Cohen L.** Proc. Roy. Soc., 1954, A225, 1162, 375.
8. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
9. **Кузнецов В. Р., Сабельников В. А.** Турбулентность и горение.— М.: Наука, 1986.
10. **Талантов А. В.** Основы теории горения.— Казань, 1975.
11. **Шрайбер А. А., Милютин В. Н., Яценко В. П.** Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом.— Киев: Наук. думка, 1980.
12. **Кабанов В. В., Клубникин В. С.** ИФЖ, 1985, 48, 3, 396.
13. **Лебедев Б. П., Тихомиров В. Г.** ЖТФ, 1960, 30, 6.
14. **Boysan F., Ayers W. H., Swithenbank J. e. a.** J. Energy, 1982, 6, 6, 368.
15. **Ziley D. G.** J. Propulsion and Power, 1986, 2, 1, 66.
16. **Дорошенко В. Е.** Третье Всесоюз. совещание по теории горения. Т. 2.— М.: Изд-во АН СССР, 1960.

Поступила в редакцию 24/III 1987

ГЕКСАГОНАЛЬНАЯ УПАКОВКА ЯЧЕЕК ОХЛАЖДЕННЫХ ПЛАМЕН ПРИ ДИФФУЗИОННО-ТЕПЛОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

С. С. Минаев

(Новосибирск)

В последние годы достигнут существенный прогресс в нелинейном анализе устойчивости пламени [1, 2], позволяющем объяснять такие сложные явления, как пространственное расположение ячеек пламени, их стохастическое поведение [3, 4]. По-видимому, наиболее простое сравнение результатов нелинейной теории распространения пламени с экспериментом может быть получено из исследования стационарных периодических структур ячеек пламени. Пространственная упаковка ячеек пламени и зависимость амплитуды ячеек от параметров служат хорошим критерием для проверки результатов теории. Например, при гексагональной упаковке каждая ячейка граничит с шестью соседними, а при квадратной — с восемью.

Ряд нестационарных явлений на поверхности пламени можно рассматривать как потерю устойчивости стационарной периодической структуры относительно возмущений с длинами волн, много большими среднего размера ячеек. Здесь в расположении большинства ячеек будет сохраняться ближний порядок, соответствующий гексагональной или квадратной упаковке.

В работе в рамках метода «узких зон» получено нелинейное уравнение эволюции фронта химической реакции из диффузионно-тепловой задачи распространения пламени, имеющего недостаток энтальпии. Последний по сравнению со свободно распространяющимся пламенем обусловлен дополнительными потерями тепла из зоны химической реакции и связан со стоком тепла в холодную стенку, расположенную в свежем газе. Показано, что полученное уравнение допускает стационарное ячеистое решение, имеющее вид гексагональной, или квадратной, решетки. Исследование на устойчивость полученных решений показывает, что гексагональная упаковка ячеек устойчива.

Уравнения теплопроводности и диффузии в несжимаемом веществе, движущемся с постоянной скоростью u вдоль оси z (система координат связана с невозмущенным пламенем), имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = u\frac{\partial T}{\partial z} + \varkappa \Delta T, \qquad \frac{\partial a}{\partial t} = u\frac{\partial a}{\partial z} + D\Delta a. \tag{1}$$

На поверхности химической реакции $z = f(x, y, t)$ имеет место разрыв потока вещества и потока тепла, а температура и концентрация на этой поверхности непрерывны:

$$\left.\frac{\partial a_2}{\partial n}\right|_{z=f} = a_2|_{z=f} = a_1|_{z=f} = 0, \tag{2}$$

$$T_2|_{z=f} = T_1|_{z=f} = T_r, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial n} - \frac{\partial T_2}{\partial n}\right)\Bigg|_{z=f}^{*} = \left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)\Bigg|_{z=0}^{0} \exp\left[-\frac{E}{2R}\left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_r}\right)\right], \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial n}\right)\Bigg|_{z=f}^{*} = \left(\frac{\partial a_1}{\partial n}\right)\Bigg|_{z=0}^{0} \exp\left[-\frac{E}{2R}\left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_r}\right)\right]. \tag{5}$$

Граничные условия (4), (5) получены из зависимости потоков тепла и вещества от температуры поверхности реакции [1]. Индексы 1, 2 относятся к свежей смеси и продуктам реакции соответственно; * и 0 соответствуют возмущенным и невозмущенным параметрам; T_0, T_r, T_b — температуры нереагирующей смеси, в зонах реакции искривленного и плоского пламени; E — энергия активации; a — концентрация недостающего компонента; $\varkappa$ и D — коэффициенты температуропроводности и диффузии; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали. Имеется также граничное условие для температуры свежей смеси ($T_1(z = d) = T_0$), которое описывает сток тепла, например в пористую горелку, находящуюся на расстоянии d от зоны химической реакции.

Невозмущенные поля концентраций и температур, соответствующие плоскому пламени, задаются выражениями

$$T_2^0 = T_b, \quad a_1^0 = a_0\left(1 - \exp\left[-\frac{zu}{D}\right]\right),$$

$$T_1^0 = \begin{cases} T_b + (T_b - T_0)\left(\exp\left[-\frac{zu}{\varkappa}\right] - 1\right) \Big/ \left(1 - \exp\left[-\frac{du}{\varkappa}\right]\right), & z \leqslant d, \\ T_0, & z > d. \end{cases}$$

Линейная теория неустойчивости. Рассмотрим результаты линейной теории неустойчивости. Запишем возмущенные величины для температуры и концентрации:

$$a_1 = a_1^0 + pe^{\Omega t}, \quad T_1 = T_1^0 + ge^{\Omega t}, \quad T_2 = T_2^0 + he^{\Omega t}.$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$x \to \frac{xu}{\varkappa}, \quad f \to \frac{fu}{\varkappa}, \quad \Omega \to \frac{\Omega\varkappa}{u^2}, \quad a \to \frac{a}{a_0}, \quad T \to \frac{T}{(T_b - T_0)}.$$

Применив преобразование Фурье по поперечным координатам x, y, получим решение уравнений (1) для фурье-компонент p, g, h:

$$p(\vec{k}) = p_0 e^{-r_1 z}, \quad g(\vec{k}) = g_0 e^{-r_2 z} + g_1 e^{r_3 z}, \quad h(\vec{k}) = h_0 e^{r_3 z},$$

$$r_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mathrm{Le}} + \left[\left(\frac{1}{\mathrm{Le}}\right)^2 + 4\left(k^2 + \frac{\Omega}{\mathrm{Le}}\right)\right]^{1/2}\right\},$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\{1 + [1 + 4(k^2 + \Omega)]^{1/2}\}, \quad r_3 = r_2 - 1.$$

Здесь $\mathrm{Le} = D/\varkappa$ — число Льюиса. Подставляя эти решения в граничные условия, получим систему линейных уравнений относительно величин p_0, g_0, g_1, h_0, f и $\tau = \dfrac{T_r - T_b}{T_b - T_0}$. Последовательно исключая p_0, g_0, g_1, h_0 и τ, получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\left[(r_2 + r_3)\left(r_1 - \frac{1}{\mathrm{Le}}\right) + \frac{\mathrm{Ze}}{2}\left(r_2 - 1 - r_1 + \frac{1}{\mathrm{Le}}\right) + \beta(2r_2 - 1 + r_3)\right] f = 0, \qquad (6)$$

где $\mathrm{Ze} = \dfrac{E(T_b - T_0)}{RT_b^2}$ — число Зельдовича; $\beta = \dfrac{\mathrm{Ze}}{2}\exp[-d]$. Для длинноволновых возмущений $4(k^2 + \Omega) \ll 1$ упростим (6):

$$\Omega - (l - 1)k^2 + 4k^4 + \beta = 0, \qquad (7)$$

$$l = \mathrm{Ze}/2 \cdot (\mathrm{Le} - 1).$$

При $\beta = 0$ (т. е. $d \to \infty$) дисперсионное соотношение (7) соответствует линейной части уравнения Сивашинского [2]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (l - 1)\Delta f + 4\Delta^2 f = 0.$$

При $0 < \beta < (l - 1)^2/16 = \beta_c$ область неустойчивости уменьшается — неустойчивы возмущения с волновыми векторами, расположенными в диапазоне $k_0^2 - \left(k_0^4 - \frac{\beta}{4}\right)^{1/2} < k^2 < k_0^2 + \left(k_0^4 - \frac{\beta}{4}\right)^{1/2}$, где $k_0^2 = (l - 1)/8$. Важно, что максимальный инкремент имеют возмущения с волновыми векторами, равными по модулю k_0 и $\Omega_{\max} = (l - 1)^2/16 - \beta$. При $\beta > \beta_c$ пламя устойчиво относительно всех возмущений. В случае $\beta_c - \beta \ll \beta_c$ пламя неустойчиво относительно возмущений с волновыми векторами, расположенными в узкой зоне вблизи k_0; нелинейные эффекты приводят к ограничению амплитуды возмущений и на поверхности пламени образуется стационарный рельеф.

Нелинейное уравнение для поверхности пламени. Остановимся на вопросе об учете нелинейных членов в эволюционном уравнении для поверхности пламени. Для этого решение системы (1) ищем в виде неодномерной локально нормальной волны [5]. В этом методе предполагается, что наибольшие потоки температуры и концентрации совпадают с направлением нормали к поверхности пламени:

$$\vec{\nabla} T \simeq \vec{n}\frac{\partial T}{\partial n}, \quad \vec{\nabla} a \simeq \vec{n}\frac{\partial a}{\partial n}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \simeq -w_n\frac{\partial T}{\partial n}, \quad \frac{\partial a}{\partial t} \simeq -w_n\frac{\partial a}{\partial n}. \qquad (8)$$

Здесь $\vec{n} = (1/\sqrt{1 + (\nabla f)^2}, \ -\nabla f/\sqrt{1 + (\nabla f)^2})$ — единичный вектор нормали к поверхности реакции; $w_n = \dfrac{\partial f}{\partial t}\Big/\sqrt{1 + (\nabla f)^2}$ — нормальная скорость перемещения зоны реакции. Используя (8), из системы (1) получим квазиодномерные уравнения для температуры и концентрации

$$(v+K)\frac{\partial T}{\partial n}+\frac{\partial^2 T}{\partial n^2}=0, \tag{9}$$

$$(v+K\,\mathrm{Le})\frac{\partial a}{\partial n}+\frac{\partial^2 a}{\partial n^2}=0, \tag{10}$$

где $v=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+1\right)\Big/\sqrt{1+(\nabla f)^2}$; $K=\operatorname{div}\vec{n}$ — кривизна поверхности реакции. Решая (9) и (10), из граничных условий (2)—(5) и граничного условия при $z=d$ можно получить следующие выражения:

$$\frac{(v+K)(\tau+1)[1-\exp(-d)]}{(1-\exp[-(v+K)L])}=\exp\left[\frac{\mathrm{Ze}}{2}\tau\right], \tag{11}$$

$$v+\mathrm{Le}\,K=\exp\left[\frac{\mathrm{Ze}}{2}\tau\right]. \tag{12}$$

Здесь $L=(d-f)\sqrt{1+(\nabla f)^2}$ — расстояние по нормали от поверхности реакции до поверхности $z=d$. При выводе (11) и (12) в граничном условии (4) поток тепла от фронта пламени в продукты горения считался пренебрежимо малым по сравнению с потоком тепла в свежий газ $\left(\frac{\partial T_z}{\partial n}\approx 0\right)$. Заметим, что температура на поверхности пламени в точке максимума ($K>0$) больше, чем в точке минимума ($K<0$). Этот вывод следует из (12).

Исключая из (11) и (12) τ, в слабонелинейном приближении $|\nabla f|\ll\ll 1$ получим эволюционное уравнение для поверхности реакции

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(l-1)\Delta f+\beta f+\frac{1}{2}\beta f^2-\frac{1}{2}(\nabla f)^2+\underline{\frac{1}{2}(\Delta f)^2\left(1+(\nabla f)^2+\frac{1}{3}(\Delta f)^2\right)}+$$

$$+\underline{\frac{1}{6}\beta f(2f^2-3f\Delta f-3(\nabla f)^2)}=0. \tag{13}$$

Подчеркнутыми членами в уравнении можно пренебречь, так как нелинейные члены со вторыми производными меньше $(\nabla f)^2$, с коэффициентом β малы, поскольку $\beta\approx\beta_c=4k_0^4$. Из сравнения результата линейной теории неустойчивости (7) с линейной частью (13) следует, что полученное таким образом уравнение необходимо дополнить членом $4\Delta^2 f$, который описывает затухание коротковолновых возмущений и не может быть получен в рамках метода локально нормальной волны (в этом методе учитываются возмущения поверхности пламени с низшими производными, не выше второй):

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(l-1)\Delta f+\beta f+4\Delta^2 f-\frac{1}{2}(\nabla f)^2+\frac{1}{2}\beta f^2=0. \tag{14}$$

Стационарные решения и их устойчивость. Покажем, что стационарное решение уравнения (14) описывает поверхность пламени, имеющую вид гексагональной решетки. Действительно, при уменьшении значений $\beta<\beta_c$ и $\beta_c-\beta\ll\beta_c$ на поверхности пламени становятся неустойчивыми возмущения с волновыми векторами, близкими к k_0. Поскольку все ячейки пламени должны иметь одинаковый размер порядка $2\pi/k_0$ (иначе они будут неустойчивы), то поверхность пламени они могут заполнить в виде гексагональной, или квадратной, решетки. Для решения, описывающего гексагональную упаковку ячеек, поверхность пламени зададим выражением

$$f=a_0+2\sum_{i=1}a_1\cos(\vec{q}_i\vec{r})+2\sum_{i-1}^{3}a_2\cos(2\vec{q}_i\vec{r})+2a_3[\cos(\vec{q}_1-\vec{q}_2,\vec{r})+$$

$$+\cos(\vec{q}_1-\vec{q}_3,\vec{r})+\cos(\vec{q}_2-\vec{q}_3,\vec{r})]+O(a_1^3),$$

$$\vec{q}_1+\vec{q}_2+\vec{q}_3=0,\quad |\vec{q}_i|=k_0.$$

Подставляя это решение в уравнение (14), найдем связь коэффициентов a_0, a_2 и a_3 с a_1:

$$a_0 = 3k_0^2 a_1^2/\beta, \quad a_2 = -a_1^2/72k_0^2, \quad a_3 = -a_1^2/32k_0^2.$$

Коэффициент a_1 связан с надкритичностью $h = \beta_c - \beta$ выражением

$$\frac{35}{288} a_1^2 - \frac{1}{2} k_0^2 a_1 - h = 0,$$

отсюда

$$a_1 = \frac{72}{35} k_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{72}{35} k_0^2\right)^2 + \frac{288}{35} h}.$$

Первое решение (со знаком плюс перед радикалом) характеризуется тем, что с уменьшением β до β_c на первоначально плоской поверхности пламени скачком возбуждаются ячейки с конечной амплитудой $a_{1c} = \frac{144}{35} k_0^2 \ll 1$. Второе решение описывает мягкий режим возбуждения возмущений, амплитуда ячеек вблизи порога неустойчивости пропорциональна надкритичности h.

Чтобы ответить на вопрос, какое из полученных решений реализуется в действительности, необходимо исследовать эти решения на устойчивость. Уравнение для возмущений поверхности η имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (l-1)\Delta\eta + 4\Delta^2\eta + \beta\eta + \beta\eta f - (\vec{\nabla f}, \vec{\nabla\eta}) = 0. \tag{15}$$

Возмущения искривленной поверхности должны иметь характерный размер такой же, как и размер ячейки пламени, так как наиболее быстро растут волны с волновыми векторами, близкими к k_0. Поскольку $(l-1)\Delta\eta + 4\Delta^2\eta + \beta_c\eta \simeq 0$, то (15) можно записать в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\beta[1+f] - \beta_c)\eta - (\vec{\nabla f}, \vec{\nabla\eta}) = 0. \tag{16}$$

Член $(\vec{\nabla f}, \vec{\nabla\eta})$ не определяет возникновения неустойчивости, он описывает перенос начальных возмущений в области локальных максимумов и минимумов искривленной поверхности пламени. Действительно, решение уравнения $\frac{\partial \eta}{\partial t} - \gamma\eta + \alpha \sin x \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ с начальными условиями $t = 0$, $\eta = \cos x$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\sin x$ имеет вид

$$\eta = \frac{e^{\gamma t}(\operatorname{sh}(\alpha t) + \cos x \cdot \operatorname{ch}(\alpha t))}{\operatorname{ch}(\alpha t) + \cos x \cdot \operatorname{sh}(\alpha t)}.$$

Видно, что при $\gamma < 0$ решение устойчиво, а нелинейный член $\alpha \sin x \frac{\partial \eta}{\partial x}$, являющийся одномерным аналогом члена $(\vec{\nabla f}, \vec{\nabla\eta})$, не определяет возникновения неустойчивости (при $t \to \infty$, $\eta \sim e^{\gamma t}$).

Таким образом, рельеф поверхности будет устойчив, если в любой точке поверхности выполняется условие: $\beta(1+f) - \beta_c \geqslant 0$. Подставляя в это неравенство минимальное значение f, убеждаемся, что устойчиво первое решение (со знаком плюс перед радикалом). Однако эта форма поверхности пламени становится неустойчивой при всех значениях параметра β, лежащих в диапазоне $0 < \beta < \beta_c - 16(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})k_0^6$. По-видимому, такую форму поверхности пламени можно наблюдать на плоских горелках [6]. Параметр β можно варьировать, меняя расход газа через горелку. При уменьшении β до β_c на первоначально плоской поверхности скачком возбуждается гексагональная структура ячеек с конечной амплитудой a_{1c}. Стационарная структура будет существовать при $\beta_c - 16(3 - 2\sqrt{2})k_0^6 \leqslant \beta \leqslant \beta_c$. Дальнейшее уменьшение β ведет к неустойчивости структуры, но, по-видимому, в некотором диапазоне значений β

на поверхности пламени будет сохраняться «ближний порядок», соответствующий гексагональной упаковке ячеек.

Кроме рассмотренных гексагональных рельефов в работе исследовалась квадратная упаковка ячеек. Решение, соответствующее такой форме поверхности пламени, задавалось в виде

$$f = b_0 + 2b_1 [\cos(\vec{q}_1\vec{r}) + \cos(\vec{q}_2\vec{r})] + 2b_2 [\cos(2\vec{q}_1\vec{r}) + \cos(2\vec{q}_2\vec{r})] +$$
$$+ 2b_3 [\cos(\vec{q}_1 + \vec{q}_2, \vec{r}) + \cos(\vec{q}_1 - \vec{q}_2, \vec{r})] + O(b_1^3),$$

где $(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0$. Это решение справедливо лишь при малой надкритичности параметра h. Из уравнения (14) следует связь коэффициентов b_0 и b_1 с h

$$b_0 = 72k_0^2 h/\beta, \quad b_1 = 6\sqrt{h}.$$

Критерий устойчивости квадратной решетки можно записать в том же виде, что и для гексагональной: $\beta(1 + f_{\min}) - \beta_c \geqslant 0$. Подставляя в это неравенство $f_{\min} = b_0 - 2b_1$, получим, что такая форма поверхности устойчива, если выполняется условие

$$(72k_0^2 - 1)(\beta_c - \beta) - 24\beta\sqrt{\beta_c - \beta} \geqslant 0.$$

Если $72k_0^2 - 1 < 0$, то очевидно, что это условие не выполняется. В случае $k_c^2 > \frac{1}{72}$ получим, что ни при каких значениях $\beta < \beta_c$ невозможно удовлетворить условию устойчивости

$$\sqrt{\beta_c - \beta} \geqslant \frac{1 - 72k_0^2}{48} + \sqrt{\left(\frac{1 - 72k_0^2}{48}\right)^2 + \beta_c}.$$

Поэтому можно сделать вывод о неустойчивости квадратной упаковки ячеек пламени.

В заключение отметим, что уравнение, близкое к (14) (без члена $\beta f^2/2$), численно исследовалось в [7] применительно к задаче о диффузионно-тепловой неустойчивости пламени, распространяющегося в системе с постоянным ускорением. В [7] показано, что при уменьшении ускорения до критического значения на поверхности пламени образуется рельеф, имеющий вид гексагональной решетки. Однако вопрос об устойчивости такого рельефа в работе [7] не рассматривался.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др.** Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
2. **Sivashinsky G. I.** Ann. Rev. Fluid Mech., 1983, 15, 174.
3. **Michelson D. I., Sivashinsky G. I.** Acta Astronautica, 1977, 4, 1177.
4. **Bickmaster J.** J. Appl. Math., 1984, 44, 40.
5. **Рогоза Б. Е.** ФГВ, 1985, 21, 3.
6. **Гейдон А. Г., Вольфгард Х. Г.** Пламя, его структура, излучение и температура.— М.: Металлургиздат, 1959.
7. **Matkowsky B. J., Sivashinsky G. I.** J. Appl. Math., 1979, 37, 686.

Поступила в редакцию 18/V 1987,
после доработки — 10/VIII 1987