

О ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ТОНКОМ СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. ВЛИЯНИЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В. Е. Захватаев

Вычислительный центр СО РАН, 660036 Красноярск

Изучается влияние постоянного поперечного электрического поля на длинноволновую слабонелинейную динамику течения пленочного слоя вязкой диэлектрической жидкости по вертикальной стенке. С помощью метода многомасштабных растяжений выводится амплитудное интегродифференциальное уравнение в частных производных типа Курамото — Сивашинского, описывающее поведение свободной поверхности слоя. В рассматриваемом случае потенциальная энергия электрического поля является источником роста длинноволновых возмущений, но в целом вторичные режимы являются, по-видимому, нелинейно устойчивыми. Исследуемые эффекты электрической поляризации, вероятно, могут быть использованы в качестве фактора, регулирующего динамику пленочных течений.

Введение. Изучение разнообразных течений тонких слоев вязкой жидкости представляет интерес как для теории (поскольку динамика в этих сравнительно простых и доступных физических системах потенциально чрезвычайно многообразна и насыщена многими важными нелинейными явлениями [1–3]), так и для практики (например, задача интенсификации процессов переноса в тепло- и массообменных аппаратах [4, 5]).

Исследование поведения тонкого слоя жидкости (пленки) часто осуществляется путем вывода амплитудных уравнений в длинноволновом приближении. Типичный пример — уравнение Курамото — Сивашинского (КС), применяемое для описания слабонелинейных процессов в пленочных слоях в пределе асимптотически большого эффективного поверхностного натяжения [6–10]. Основными физическими факторами в этом случае являются сила тяжести, вязкое трение и поверхностное натяжение; преобладание эффектов силы тяжести над эффектами вязкости способствует дестабилизации длинноволновых возмущений, а поверхностное натяжение приводит к затуханию малых коротковолновых флуктуаций на линейной стадии, взаимовлияние этих двух противоположных тенденций приводит к сложной и разнообразной динамике, выражаемой уравнением КС [6–15].

В данной работе рассматривается вопрос о том, к каким изменениям в поведении пленки может привести влияние нормального постоянного электрического поля.

1. Постановка задачи. Пусть x^* и z^* — декартовы координаты (ограничимся двумерным случаем), ось z^* ориентирована противоположно направлению силы тяжести. Рассмотрим следующую физическую систему (рис. 1). Поверхности $x^* = 0$, $x^* = a^* = \text{const} > 0$ определяют плоскости электродов, между которыми в области $\Omega = \{0 < x^* < h^*(z^*, t^*), -\infty < z^* < \infty\}$ происходит течение тонкого пленочного слоя вязкой несжимаемой диэлектрической жидкости, в области $\Omega^g = \{h^*(z^*, t^*) < x^* < b^*, -\infty < z^* < \infty\}$ ($b^* = \text{const}$, $b^* < a^*$) находится (диэлектрический) газ, а в области $\Omega^s = \{b^* < x^* < a^*, -\infty < z^* < \infty\}$ — твердый диэлектрик. Считаем, что первичное течение ламинарно, невозмущенная свободная граница пленочного слоя плоская и определяется уравнением $x^* = h_0^*$, электрическое поле между электродами постоянно и однородно, величина электрической напряженности в тонком слое жидкости Ω равна e_0^* . Предполагается,

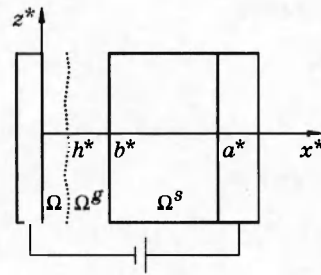


Рис. 1

что $h_0^*/a^* \ll 1$, $(b^* - h_0^*)/a^* \ll 1$, $(a^* - b^*)/a^* \sim O(1)$.

В задаче фигурируют следующие (постоянные) параметры: ρ , μ , γ — плотность, динамическая вязкость и диэлектрическая проницаемость жидкости пленочного слоя Ω ; γ^g и γ^s — диэлектрические проницаемости фаз в областях Ω^g и Ω^s ; σ — коэффициент поверхностного натяжения межфазной границы; f^* — ускорение силы тяжести.

Масштабными множителями для пространственных переменных, скорости, времени, давления и электрической напряженности выбираются соответственно h_0^* , $w^* = \rho f^* h_0^{*2} / 2\mu$ — скорость на свободной границе пленки, h_0^*/w^* , ρw^{*2} , e_0^* . Далее полагаем $(x^*, y^*, a^*, b^*, h^*)/h_0^* = (x, y, a, b, h)$, $t^* w^*/h_0^* = t$ и рассматриваем безразмерную задачу.

Пусть p , u , w — давление; x - и z -компоненты вектора скорости в пленке; e , g , e^g , g^g , e^s , g^s — x - и z -компоненты вектора электрической напряженности в областях Ω , Ω^g , Ω^s соответственно.

Исходная математическая модель, описывающая процессы в изучаемой физической системе, имеет следующий вид [16, 17]. В области Ω удовлетворяются уравнения Навье — Стокса, неразрывности и Максвелла (магнитное поле отсутствует):

$$u_t + uu_x + ww_z = -p_x + (1/\text{Re})(u_{xx} + u_{zz}); \quad (1.1)$$

$$w_t + uw_x + ww_z = -p_z + (1/\text{Re})(w_{xx} + w_{zz}) - 2/\text{Re}; \quad (1.2)$$

$$u_x + w_z = 0; \quad (1.3)$$

$$e_z - g_x = 0, \quad e_x + g_z = 0. \quad (1.4)$$

В области Ω^g

$$e_z^g - g_x^g = 0, \quad e_x^g + g_z^g = 0; \quad (1.5)$$

в области Ω^s

$$e_z^s - g_x^s = 0, \quad e_x^s + g_z^s = 0. \quad (1.6)$$

Условия на электродах имеют вид

$$\text{при } x = 0 \quad u = 0, w = 0, g = 0, \quad \text{при } x = a \quad g^s = 0. \quad (1.7)$$

Условия на межфазной границе Γ (при $x = h(z, t)$) выражают (используем обозначение $[(\cdot)] \equiv (\cdot) - (\cdot)^g$):

— непрерывность нормальной к Γ компоненты вектора электрической индукции

$$[\chi(e - h_z g)] = 0; \quad (1.8)$$

-- непрерывность касательной к Γ компоненты вектора электрической напряженности

$$[eh_z + g] = 0; \quad (1.9)$$

— баланс нормальных напряжений

$$-\operatorname{Re}(p - p^g)(1 + h_z^2) + [\chi e^2] + h_z^2[\chi g^2] - 2h_z[\chi eg] - (1/2)(1 + h_z^2)[\chi(e^2 + g^2)] + 2(u_x - h_z(w_x + u_z) + h_z^2 w_z) = We h_{zz}/(1 + h_z^2)^{1/2}. \quad (1.10)$$

— баланс тангенциальных напряжений

$$h_z[\chi e^2] + (1 - h_z^2)[\chi eg] - h_z[\chi g^2] + 2h_z u_x + (1 - h_z^2)(w_x + u_z) - 2h_z w_z = 0; \quad (1.11)$$

— кинематическое соотношение

$$h_t + w h_z = u. \quad (1.12)$$

При $x = b$ удовлетворяются следующие условия:

$$\chi^g e^g = \chi^s e^s; \quad (1.13)$$

$$g^g = g^s. \quad (1.14)$$

Здесь $\operatorname{Re} = \rho h_0^* w^* / \mu$; $We = \sigma / (\mu w^*)$; $\chi = \gamma h_0^* e_0^{*2} / (4\pi \mu w^*)$; $\chi^g = \gamma^g h_0^* e_0^{*2} / (4\pi \mu w^*)$; $\chi^s = \gamma^s h_0^* e_0^{*2} / (4\pi \mu w^*)$; p^g — давление в газообразной фазе, контактирующей с пленочным слоем, — заданная величина.

Основное состояние определим следующим решением системы (1.1)–(1.14):

$$u_0 = 0, \quad w_0 = x^2 - 2x, \quad p_0 = \text{const}, \quad h = 1, \quad e_0 = \delta, \quad g_0 = 0, \quad (1.15)$$

$$e_0^g = (\chi/\chi^g)\delta, \quad g_0^g = 0, \quad e_0^s = (\chi/\chi^s)\delta, \quad g_0^s = 0, \quad \text{где } \delta \pm 1.$$

2. Вывод амплитудного уравнения. При выводе амплитудного уравнения следуем подходам работ [7, 8], реализующих метод многомасштабных разложений. Если не учитывать влияния электрического поля, то рассматриваемое пленочное течение будет неустойчивым в рамках линейного анализа, причем, согласно дисперсионному соотношению для возмущений вида $\exp(\lambda t + ikz)$, при $We \gg 1$, $\operatorname{Re} \sim O(1)$, в области неустойчивости имеем [8]

$$k \sim We^{-1/2}, \quad \operatorname{Real}(\lambda) \sim We^{-1}, \quad \operatorname{Im}(\lambda) \sim We^{-1/2}. \quad (2.1)$$

Таким образом, можно ожидать, что внутри пленки при достаточно сильном поверхностном натяжении характерный продольный пространственный масштаб волновых слабонелинейных вторичных режимов будет значительно больше масштаба в поперечном направлении, когда электрические эффекты не слишком изменяют вышеописанную ситуацию.

Линеаризуя систему (1.1)–(1.14) на решении (1.15) и раскладывая возмущения и величину λ в ряд по асимптотически малому волновому числу k , получим, что оценки (2.1) остаются в силе, если дополнительно выполняются условия $\chi = O(1)$, $\chi^g = O(1)$, $\chi^s = O(We^{1/2})$.

Далее рассмотрим поведение вторичных процессов с характерным пространственным масштабом порядка $O(\varepsilon^{-1})$ ($\varepsilon \ll 1$ — малый параметр), при этом считаем, что $We = O(\varepsilon^{-2})$.

Принимая во внимание (2.1), полагаем

$$We = O(\varepsilon^{-2}), \quad \operatorname{Re} = O(1), \quad \chi = O(1), \quad \chi^g = O(1), \quad \chi^s = O(\varepsilon^{-1}) \quad (\chi^g \neq \chi^s); \quad (2.2)$$

$$X = x \quad (0 \leq x \leq 1), \quad R = (b - x)/(b - 1) \quad (1 \leq x \leq b), \quad (2.3)$$

$$Y = (a - x)/(a - b) \quad (b \leq x \leq a), \quad Z = \varepsilon z, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T};$$

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{n=1} \varepsilon^n U_n(X, Z, \tau, T), & w &= w_0(X, \varepsilon) + \sum_{n=1} \varepsilon^n W_n(X, Z, \tau, T), \\
p &= p_0(\varepsilon) + \sum_{n=1} \varepsilon^n P_n(X, Z, \tau, T), & h &= 1 + \sum_{n=1} \varepsilon^n H_n(Z, \tau, T), \\
e &= \delta + \sum_{n=1} \varepsilon^n E_n(X, Z, \tau, T), & g &= \sum_{n=1} \varepsilon^n G_n(X, Z, \tau, T), \\
e^g &= (\chi/\chi^g)\delta + \sum_{n=1} \varepsilon^n E_n^g(R, Z, \tau, T), & g^g &= \sum_{n=1} \varepsilon^n G_n^g(R, Z, \tau, T), \\
e^s &= (\chi/\chi^s)\delta + \sum_{n=1} \varepsilon^n E_n^s(Y, Z, \tau, T), & g^s &= \sum_{n=1} \varepsilon^n G_n^s(Y, Z, \tau, T).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Обозначим также $\overline{We} = We \varepsilon^2$, $\overline{\chi^s} = \chi^s \varepsilon$, $\alpha = \varepsilon a$.

Подставляя (2.2)–(2.4) в (1.1)–(1.14), в нулевом и первом порядках получим

$$\begin{aligned}
-P_{1X} + (1/Re)U_{1XX} &= 0, & (1/Re)W_{1XX} &= 2(X-1)U_1, & U_{1X} &= 0, \\
G_{1X} &= 0, & E_{1X} &= 0 & \text{при } 0 < X < 1;
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$G_{1R}^g = 0, \quad E_{1R}^g = 0 \quad \text{при } 0 < R < 1; \tag{2.6}$$

$$E_{1Z}^s + \frac{1}{\alpha} G_{1Y}^s = 0, \quad -\frac{1}{\alpha} E_{1Y}^s + G_{1Z}^s = 0 \quad \text{при } 0 < Y < 1; \tag{2.7}$$

$$U_1 = W_1 = G_1 = 0 \quad \text{при } X = 0, \quad G_1^s = 0 \quad \text{при } Y = 0; \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
E_1 &= (\chi^g/\chi)E_1^g, & G_1 - G_1^g &= 0, & -Re P_1 + \chi\delta(E_1 - E_1^g) + 2U_{1X} &= We H_{1ZZ}, \\
\chi\delta(G_1 - G_1^g) + W_{1X} + 2H_1 &= 0, & U_1 &= 0 & \text{при } X = 1, R = 1;
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$E_1^s = 0, \quad G_1^g - G_1^s = 0 \quad \text{при } R = 0, Y = 1. \tag{2.10}$$

Отдельно запишем условие, которое понадобится при решении задачи во втором порядке:

$$E_1^g = (\overline{\chi^s}/\chi^g)E_2^s \quad \text{при } R = 0, Y = 1. \tag{2.11}$$

Задача (2.5)–(2.10) имеет решение

$$\begin{aligned}
U_1 &= 0, & P_1 &= -(\overline{We}/Re)H_{1ZZ} + (\chi\delta/Re)(E_1 - E_1^g), & W_1 &= -2H_1X, \\
E_1 &= E_1(Z, \tau, T), & G_1 &= 0, & E_1^g &= (\chi/\chi^g)E_1(Z, \tau, T), & G_1^g &= 0, & E_1^s &= 0, & G_1^s &= 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Функция $E_1(Z, \tau, T)$ находится в следующем порядке.

Для определения амплитудного уравнения необходимо рассмотреть во втором порядке уравнения (1.2)–(1.7), (1.9), (1.11), (1.12), (1.14):

$$W_{1\tau} + 2(X-1)U_2 + X(X-2)W_{1Z} = -P_{1Z} + (1/Re)W_{2XX} \quad \text{при } 0 < X < 1; \tag{2.13}$$

$$U_{2X} + W_{1Z} = 0 \quad \text{при } 0 < X < 1; \tag{2.14}$$

$$E_{1Z} - G_{2X} = 0, \quad E_{2X} = 0 \quad \text{при } 0 < X < 1; \tag{2.15}$$

$$(1-b)E_{1Z}^g - G_{2R}^g = 0, \quad E_{2R}^g = 0 \quad \text{при } 0 < R < 1; \tag{2.16}$$

$$E_{2Z}^s + \frac{1}{\alpha} G_{2Y}^s = 0, \quad -\frac{1}{\alpha} E_{2Y}^s + G_{2Z}^s = 0 \quad \text{при } 0 < Y < 1, \quad G_2^s = 0 \quad \text{при } Y = 0; \tag{2.17}$$

$$U_2 = W_2 = G_2 = 0 \quad \text{при } X = 0; \tag{2.18}$$

$$\delta(1 - \chi/\chi^g)H_{1Z} + G_2 - G_2^g = 0 \quad \text{при } X = 1, R = 1; \tag{2.19}$$

$$\chi(1 - \chi/\chi^g)H_{1Z} + \chi\delta(G_2 - G_2^g) + W_2X + 2H_2 = 0 \quad \text{при } X = 1, R = 1; \quad (2.20)$$

$$H_{1\tau} - H_{1Z} = U_2 \quad \text{при } X = 1; \quad (2.21)$$

$$G_2^g = G_2^e \quad \text{при } R = 0, Y = 1. \quad (2.22)$$

Из (2.12), (2.14), (2.18) получим

$$U_2 = X^2 H_{1Z}. \quad (2.23)$$

Тогда из (2.21) вытекает, что $H_1 = H_1(\zeta, T)$, $\zeta = Z + 2\tau$. Из (2.12), (2.15), (2.16), (2.18) и (2.22) следует

$$G_2 = E_{1\zeta}X, \quad G_2^g = (\chi/\chi^g)(1 - b)E_{1\zeta}R + G_2^s(Y = 1). \quad (2.24)$$

Определим функцию Φ соотношениями $E_{2\zeta}^s = \Phi_Y$, $G_2^s = -\alpha\Phi$. Тогда при помощи преобразования Фурье ($F(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \exp(-ik\zeta) d\zeta$) из (2.17) находим

$$F(\Phi) = C(k)\{\exp(\alpha k Y) - \exp(-\alpha k Y)\},$$

а из (2.11), (2.12), (2.19), (2.24) имеем

$$E_{1\zeta} = (\chi^s/\chi)\Phi_Y, \quad \delta(1 - \chi/\chi^g)H_{1\zeta} + (1 + (\chi/\chi^g)(b - 1))E_{1\zeta} + \alpha\Phi = 0 \quad \text{при } Y = 1.$$

Отсюда

$$E_{1\zeta} = F^{-1}\left(\frac{\delta\chi^s k(\chi - \chi^g)F(H_{1\zeta})}{\chi\chi^g \text{th}(\alpha k) + \bar{\chi}^s k(\chi^g + \chi(b - 1))}\right). \quad (2.25)$$

Величина W_2 определяется из (2.13), (2.18), (2.20) с учетом (2.12), (2.19), (2.23):

$$W_2 = \text{Re}\left(\frac{1}{6}X^4 - \frac{2}{3}X^3 + \frac{4}{3}X\right)H_{1\zeta} - \frac{1}{2}\overline{W}eX(X - 2)H_{1\zeta\zeta\zeta} - \\ - 2XH_2 + \frac{1}{2}\chi\delta X(X - 2)\left(1 - \frac{\chi}{\chi^g}\right)E_{1\zeta}. \quad (2.26)$$

Рассматривая в третьем порядке кинематическое условие

$$H_{1T} + H_{2\zeta} + W_1H_{1\zeta} = U_3 + U_{2X}H_1 \quad \text{при } X = 1$$

и выражая функцию U_3 из уравнения неразрывности $U_3X + W_{2\zeta} = 0$ с учетом $U_3(0) = 0$ и (2.25), (2.26), находим искомое амплитудное уравнение в виде

$$H_{1T} - 4H_1H_{1\zeta} + \frac{8}{15}\text{Re}H_{1\zeta\zeta} + \frac{1}{3}\overline{W}eH_{1\zeta\zeta\zeta} + \frac{i}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} J(k) \int_{-\infty}^{\infty} H_{1\xi}(\xi, T) \exp(ik(\zeta - \xi)) d\xi dk = 0, \\ J(k) = \frac{Dk^2}{\text{th}(\alpha k) + Ek}, \quad D = \frac{\bar{\chi}^s}{3} \left(\frac{\chi}{\chi^g} - 1\right)^2, \quad E = \frac{\bar{\chi}^s}{\chi} \left(1 + (b - 1)\frac{\chi}{\chi^g}\right). \quad (2.27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формально можно рассмотреть случай, когда область Ω^s , так же как и Ω^g , заполнена газообразной фазой (результаты будут аналогичны), но в этой ситуации возникает вопрос, как реализовать на практике ключевое для проведенного анализа условие $\gamma \ll \gamma^s$.

3. Влияние электрического поля на свойства периодических режимов. Слабонелинейные процессы в исследуемой системе при отсутствии разности потенциалов между электродами описываются уравнением КС, которое по виду совпадает с (2.27), но нужно положить $J \equiv 0$. Рассмотрим, к каким изменениям в динамике пленочного слоя могут привести изучаемые электрические эффекты.

С помощью замены переменных уравнение (2.27) с периодическими граничными условиями ($H_1(0, t) = H_1(L, t)$) можно записать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mu^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} + H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J(k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H}{\partial \xi} \exp(ik(x - \xi)) d\xi dk = 0, \quad (3.1)$$

$$H(0, t) = H(2\pi, t), \quad \mu^2 = \frac{8}{5} \frac{\text{Re}}{\text{We}} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2, \quad J(k) = \frac{Ak^2}{\text{th}(\sigma k) + Bk}, \quad A > 0, B > 0, \sigma > 0.$$

Сравним особенности периодических решений, описываемых уравнением (3.1) и уравнением КС:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nu^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} + H \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Представив решение в виде ряда Фурье $H = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(t) \exp(inx)$, $A_{-n} = A_n^{\text{к.с.}}$ (индекс к. с. означает комплексное сопряжение), получим, что эволюция амплитуд фурье-компонент описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dA_n}{dt} = \gamma(n)A_n - in \left(\sum_{r=1}^{\infty} A_r^{\text{к.с.}} A_{n+r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} A_r A_{n-r} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где $\gamma(k) = \mu^2 k^2 - k^4 + kJ(k)$; $k \in \mathbb{R}$. (В силу того что $\gamma(0) = 0$, коэффициент A_0 постоянен и приравнивается нулю.)

Принципиальное значение для уравнения КС, как и для других слабонелинейных систем, имеет структура линейного дисперсионного соотношения. Как видно из (3.3), для уравнения КС все фурье-моды затухают на линейной стадии, если $n > \nu$. Таким образом, число линейно-неустойчивых мод не более чем конечно, а само уравнение КС, как показывают исследования [12, 13], эквивалентно конечной динамической системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

При сравнительно небольших значениях параметра ν количество линейно-неустойчивых фурье-гармоник невелико, предельными режимами уравнения КС являются упорядоченные осцилляционные либо установившиеся состояния. Последние называются j -модальными установившимися состояниями, их можно представить (с точностью до сдвига по фазе) в виде [12]

$$H_j(x) = \cos(jx) + \varepsilon a_{1j} \cos(2jx) + \varepsilon^2 a_{2j} \cos(3jx) + \dots, \quad \varepsilon = O(10^{-1}), \quad a_{ij} = O(1). \quad (3.4)$$

Для $1 < \nu^2 < 3,25$ аттрактором уравнения (3.2) является унимодальное ($j = 1$) установившееся состояние (3.4), в качестве предельных режимов при $3,25 < \nu^2 < 4,35$ наблюдаются периодические орбиты, при $4,2 < \nu^2 < 5,63$ — регулярные пульсационные состояния, при $5,63 < \nu^2 < 10,75$ аттрактором является бимодальное состояние (3.4) ($j = 2$), при $10,75 < \nu^2 < 13,5$ возникают осцилляционные и/или хаотические режимы, при $13,5 < \nu^2 < 17$ — тримодальное состояние (3.4) ($j = 3$) [12, 14].

Имеется качественное соответствие между наблюдаемыми в экспериментах упорядоченными волновыми движениями при небольших числах Рейнольдса и представителями численно найденных семейств стационарных периодических решений, которые могут быть близки как волнам с формой, близкой к синусоидальной, так и волновым образованиям с большим содержанием фурье-компонент [10, 11].

При возрастании значения ν увеличивается число неустойчивых мод, появляются области нерегулярного поведения, и при достаточно высоком значении ν хаотический характер динамики резко усиливается [13].

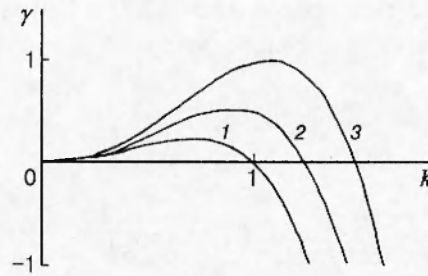


Рис. 2

Обратимся к уравнению (3.1). При $k \neq 0$ четная функция $J^*(k) \equiv kJ(k) > 0$ является монотонно возрастающей, причем существуют такие положительные константы C_1 и C_2 , что $C_1 k^2 < J^*(k) < C_2 k^2$. В силу свойств функции $J^*(k)$ структуры дисперсионных соотношений уравнений (3.1) и (3.2) аналогичны: линейно-неустойчивым может быть лишь конечное число длинноволновых мод в диапазоне $0 < n < k_0$ (некоторого k_0 уравнения КС $k_0^2 = \nu^2$); в области достаточно высоких волновых чисел ($n > k_0$) влияние диссипации оказывается доминирующим, быстро нарастая по степенному закону. Вместе с тем при заданном значении μ с увеличением параметра A число линейно-неустойчивых фурье-мод возрастает по сравнению с соответствующим случаем $J \equiv 0$ ($k_0^2 > \nu^2$ при $\mu = \nu$). На рис. 2 представлены графики функции $\gamma(k)$ при $\mu = 1$, $B = 1$, $\sigma = 5$ для $A = 0$; 2; 4 (кривые 1–3).

В силу специфики дисперсионного соотношения уравнения (3.1) можно ожидать, что при фиксированном $\mu = \mu_0$ ($B = B_0$, $\sigma = \sigma_0$) увеличение значения A (в некотором диапазоне) приводит приблизительно к тем же качественным результатам, что и увеличение параметра ν , начиная от значения, равного μ_0 , для уравнения (3.2). Проведенные численные расчеты (периодические решения уравнения (3.1) исследовались методом Галеркина, начальные данные задавались в виде $\sum_{j=1}^m \mu^2 (\sin(jx) + \cos(jx))$) подтверждают данное предположение.

Так, для $\mu = 1$, $B = 1$, $\sigma = 5$ аттракторами уравнения (3.1) являются: при $0 < A < 3,5$ ($1 < k_0^2 < 3,26$) унимодальные установившиеся состояния (при увеличении значения A от 0 до 3,5 содержание фурье-гармоник в профиле волны расширяется — значения a_{i1} ($i > 1$) в (3.4) возрастают); при $A = 4$ ($k_0^2 \approx 3,63$) регулярные бегущие волны; при $A = 5$ ($k_0^2 \approx 4,39$) упорядоченные пульсационные состояния; при $A = 8$ ($k_0^2 \approx 6,78$) бимодальные установившиеся состояния. Для $\mu^2 = 7$, $B = 1$, $\sigma = 5$ при $A = 0$ ($k_0^2 = 7$) образуются бимодальные установившиеся состояния, при $A = 12$ ($k_0^2 \approx 16,64$) — тримодальные состояния. Полезно сравнить значения k_0^2 в расчетных примерах с вышеприведенными границами интервалов изменения параметра ν^2 для аттракторов различных типов уравнений (3.1) и (3.2).

Существование предельных режимов типа j -модальных состояний, а также регулярных бегущих волн в окрестности $k_0^2 = 4$ можно обосновать аналитически тем же методом, что и для уравнения КС [15].

Режимы, которые при $A = 0$ являлись упорядоченными, при достаточно большом значении A трансформируются в хаотические.

Таким образом, проведенный в настоящей работе анализ показывает, что в рамках рассматриваемых приближений присутствие достаточно сильного электрического поля является фактором, повышающим степень нерегулярности течения пленочного слоя вязкой диэлектрической жидкости.

В то же время путем увеличения разности потенциалов в рассматриваемой системе при фиксированных параметрах Re , We и пространственном периоде возмущений L можно,

вероятно, получать те же эффекты изменения динамики, что и при увеличении расхода жидкости в обычном пленочном течении в условиях адекватности модели КС.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 950100340 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1949. Т. 19, вып. 2. С. 105–120.
2. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости // Инж.-физ. журн. 1976. Т. 30, № 5. С. 750–785.
3. Liu J., Paul J. D., Gollub J. P. Measurements of the primary instabilities of film flows // J. Fluid Mech. 1993. V. 250. P. 69–101.
4. Холпанов Л. П. Процессы тепломассообмена в системах с поверхностью раздела фаз // Гидродинамические проблемы технологических процессов. М.: Наука, 1988. С. 93–101.
5. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Радев К. Б. Влияние волн на конвективную диффузию газа в стекающей пленке жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1985. С. 5–32.
6. Lin S. P. Finite amplitude side-band stability of a viscous film // J. Fluid Mech. 1974. V. 63, pt 3. P. 417–429.
7. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 28–34.
8. Shlang T., Sivashinsky G. I. Irregular flow of a liquid film down a vertical column // J. Physique. 1982. V. 43. P. 459–466.
9. Sivashinsky G. I., Michelson D. M. On irregular wavy flow of a liquid film down a vertical plane // Prog. Theor. Phys. 1980. V. 63, N 6. P. 2112–2114.
10. Chang H.-C., Demekhin E. A., Kopelevich D. I. Nonlinear evolution of waves on a vertically falling film // J. Fluid Mech. 1993. V. 250. P. 433–480.
11. Цвелодуб О. Ю. О множестве стационарных решений эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативных средах // ПМТФ. 1989. № 6. С. 72–78.
12. Hyman J. M., Nicolaenko B. The Kuramoto — Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems // Physica D. 1986. V. 18. P. 113–126.
13. Hyman J. M., Nicolaenko B., Zaleski S. Order and complexity in the Kuramoto — Sivashinsky model of weakly turbulent interfaces // Physica D. 1986. V. 23. P. 265–292.
14. Kevrekidis I. G., Nicolaenko B., Scovel J. C. Back in the saddle again: a computer assisted study of the Kuramoto — Sivashinsky equation // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50, N 3. P. 760–790.
15. Armbruster D., Guckenheimer J., Holmes P. Kuramoto — Sivashinsky dynamics on the center of unstable manifold // SIAM J. Appl. Math. 1989. V. 49, N 3. P. 676–691.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 8: Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 27/V 1996 г.