

К ОПИСАНИЮ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ В НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ЯДЕР, ОБЛАДАЮЩИХ СЛАБОЙ  
СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

С. И. Мешков (Воронеж)

Напряжение  $\sigma$  (деформация  $\varepsilon$ ) в данный момент времени многих материалов сложным образом зависит от всей предыдущей истории деформирования (напряженного состояния). Эти свойства материала учитываются наследственной теорией упругости Больцмана — Вольтерра, которая в случае одноосного напряженного состояния основывается на двух интегральных уравнениях [1]

$$\sigma(t) = E_{\infty} \left[ \varepsilon(t) - \kappa \int_{-\infty}^t f(t-t') \varepsilon(t') dt' \right] \quad (1)$$

$$\varepsilon(t) = J_{\infty} \left[ \sigma(t) + \kappa \int_{-\infty}^t \varphi(t-t') \sigma(t') dt' \right] \quad (2)$$

Здесь  $f(t-t')$  — ядро релаксации, а его резольвента  $\varphi(t-t')$  — ядро последствия,  $E_{\infty}$  — модуль упругости,  $J_{\infty}$  — податливость в момент времени, когда никакие процессы релаксации и последствия не успели пройти,  $\kappa$  — коэффициент, зависящий от конкретного вида ядер.

Основная задача наследственной теории упругости состоит в определении явного вида ядер релаксации и последствия. Для этой цели наиболее часто используются экспоненциальные функции или дискретные и непрерывные спектры, составленные из них [2]. Такие ядра позволяют достаточно хорошо описать многие свойства реальных тел и, в частности, объяснить температурно-частотную зависимость внутреннего трения релаксационного типа [3]. Однако экспоненциальные ядра не обладают особенностью при  $t-t'=0$ , которая наблюдается экспериментально при статических испытаниях [4]. В этой связи представляется весьма интересным на наиболее характерных примерах проследить, как влияет указанная особенность ядер на диссипативные свойства среды.

Для расчета внутреннего трения совершенно безразлично задавать ядро релаксации или ядро последствия, так как между ними в общем виде существует простая связь, которую легко установить, переписав выражения (1) и (2) в пространстве изображений

$$\sigma_{**} = E_{\infty} [1 - \kappa f_*(p)] \varepsilon_{**}, \quad \varepsilon_{**} = J_{\infty} [1 + \kappa \varphi_*(p)] \sigma_{**} \quad (3)$$

Здесь одной звездочкой обозначена трансформанта одностороннего, а двумя — двухстороннего преобразования Лапласа. Из формул (3) следуют соотношения между трансформантами Лапласа ядер последствия и релаксации

$$f_*(p) = \Phi_*(p) [1 + \kappa \varphi_*(p)]^{-1}, \quad \Phi_*(p) = f_*(p) [1 - \kappa f_*(p)]^{-1} \quad (4)$$

В пространстве изображений уравнения Больцмана — Вольтерра аналогичны закону Гука, с той лишь разницей, что упругие константы являются функцией комплексного параметра  $p$  одностороннего преобразования Лапласа.

Для исследования упругонаследственных сред при периодическом деформировании достаточно переписать упругие постоянные формул (3) и в пространстве Фурье  $p \rightarrow i\omega$

$$E = E_{\infty} [1 - \kappa f_*(i\omega)] = E' + iE'', \quad J = J_{\infty} [1 + \kappa \varphi_*(i\omega)] = J' - iJ'' \quad (5)$$

Таким образом, упругий модуль и податливость (5) представляют собой комплексные числа. После умножения их соответственно на  $\varepsilon$  и  $\sigma$  действительные слагаемые  $\varepsilon E'$  и  $\sigma J'$  представляют те части напряжения и деформации, которые меняются синфазно, а мнимые слагаемые  $\varepsilon E''$  и  $\sigma J''$  смещены относительно их по фазе на  $90^\circ$ . Наличие сдвинутых по фазе слагаемых обуславливает диссипативные процессы в упругонаследственной среде. Величина энергетических потерь (внутреннее трение) определяется через тангенс угла

$$\operatorname{tg} \delta = E''/E' = J''/J' \quad (6)$$

Нижеследующие расчеты проведены для комплексной податливости.

1. Экспоненциальные ядра  $f(t) = \exp(-t/\tau_\varepsilon)$ ,  $\varphi(t) = \exp(-t/\tau_\sigma)$  согласно формулам (5)–(6) при  $\kappa = \Delta E/E_{\infty} \tau_\varepsilon = \Delta J/J_{\infty} \tau_\sigma$  приводят к хорошо известным соотношениям стандартного линейного тела

$$J' = J_{\infty} + \Delta J (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)^{-1}, \quad J'' = \Delta J \omega \tau_\sigma (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)^{-1} \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \Delta J \omega \tau_\sigma (J_0 + J_{\infty} \omega^2 \tau_\sigma^2)^{-1} \quad (\Delta J = J_0 - J_{\infty}, \Delta E = E_{\infty} - E_0) \quad (8)$$

Здесь  $J_0$  — релаксированное и  $J_\infty$  — нерелаксированное значения податливости,  $\tau_\sigma$  — время ретардации, которое связано с временем релаксации  $\tau_\varepsilon$  соотношением

$$\tau_\varepsilon/\tau_\sigma = J_\infty/J_0 = E_0/E_\infty$$

Выражение (8) описывает пик релаксационного внутреннего трения, достигающий максимума при

$$\omega\tau_\sigma \sqrt{J_\infty/J_0} = 1.$$

Заметим, что такие же формулы легко получаются из следующего реологического уравнения:

$$J_0 (\sigma + \tau_\varepsilon d\sigma/dt) = \varepsilon + \tau_\sigma d\varepsilon/dt \quad (9)$$

если принять в нем гармоническое изменение  $\sigma$  и  $\varepsilon$  со временем.

2. Примером ядра, имеющего особенность в момент нагружения, будет ядро последействия, предложенное Дюффингом [5]

$$\varphi(t) = t^{\gamma-1} \quad (0 < \gamma < 1) \quad (10)$$

Здесь и в дальнейшем

$$\kappa = \frac{\Delta J}{J_\infty \tau_\sigma^\gamma} = \frac{\Delta E}{E_\infty \tau_\varepsilon^\gamma}, \quad \frac{J_\infty}{J_0} = \frac{E_0}{E_\infty} = \left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)^\gamma \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (3) и, переходя к (5), получим следующие значения для действительной и мнимой частей податливости:

$$\begin{aligned} J' &= J_\infty + \Delta J \Gamma(\gamma) (\omega\tau_\sigma)^{-\gamma} \cos \psi \\ J'' &= \Delta J \Gamma(\gamma) (\omega\tau_\sigma)^{-\gamma} \sin \psi \quad (\psi = 1/2\pi\gamma) \end{aligned} \quad (12)$$

Тангенс угла механических потерь равен

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\Delta J \Gamma(\gamma) \sin \psi}{J_\infty (\omega\tau_\sigma)^\gamma + \Delta J \Gamma(\gamma) \cos \psi} \quad (13)$$

Ядро последействия Дюффинга эквивалентно реологическому уравнению с дробным дифференцированием по времени [6]

$$\Gamma(\gamma) \Delta J \sigma + J_0 \tau_\varepsilon^\gamma d^\gamma \sigma / dt^\gamma = \tau_\sigma^\gamma d^\gamma \varepsilon / dt^\gamma \quad (14)$$

где  $\gamma$  — порядок дробной производной. Уравнение (14) с точностью до константы представляет собой модель Максвелла с дробными производными и при  $\gamma \rightarrow 1$ ,  $J_0 \rightarrow \infty$  переходит в обычное реологическое соотношение Максвелла.

В формулах (12) — (14) фигурирует гамма-функция  $\Gamma(\gamma)$ , которую можно исключить, если выбрать ядро в форме Абеля

$$\varphi(t) = t^{\gamma-1} / \Gamma(\gamma)$$

3. Ядро последействия, предложенное А. Р. Ржаницыным [7], сочетает свойства обоих ядер, рассмотренных выше

$$\varphi(t) = t^{\gamma-1} \exp(-t/\tau_\sigma) \quad (0 < \gamma \leq 1) \quad (15)$$

При  $\gamma = 1$  получается стандартное — линейное тело, а при  $\tau_\sigma \rightarrow \infty$  ядро Дюффинга.

Используя ядро (15) в формулах (3) и (5), получим

$$J' = J_\infty + \Delta J (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)^{-1/2\gamma} \Gamma(\gamma) \cos \psi \quad (16)$$

$$J'' = \Delta J (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)^{-1/2\gamma} \Gamma(\gamma) \sin \psi \quad (17)$$

$$\psi = \gamma \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\omega\tau_\sigma)$$

Тангенс угла механических потерь равен

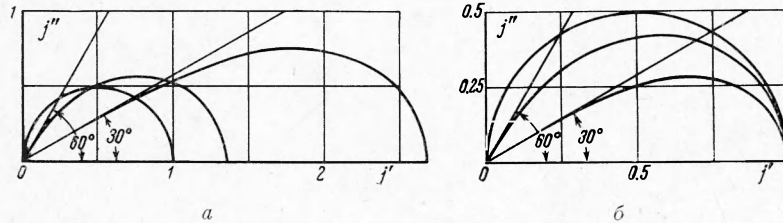
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\Delta J \Gamma(\gamma) \sin \psi}{J_\infty (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)^{1/2\gamma} + \Delta J \Gamma(\gamma) \cos \psi} \quad (18)$$

На фиг. 1, а представлена векторная диаграмма комплексной податливости в относительных единицах

$$j'' = j''(j'), \quad j' \equiv (J' - J_\infty) / \Delta J, \quad j'' = J'' / \Delta J$$

В качестве параметра выбрана величина  $\gamma$ . Как видно из фиг. 1, кривые являются синтезом дуги окружности ( $\gamma = 1$  — стандартное линейное тело) и прямой линии, выходящей из начала координат под углом  $1/2 \pi \gamma$  (ядра Дюффинга и Абеля). Очевидно, что при уменьшении параметра  $\gamma$  увеличивается прямолинейный участок кривой.

Существенно отметить, что наличие гамма-функции  $\Gamma(\gamma)$  в формулах (16) и (17) приводит к тому, что кривые пересекают ось абсцисс в разных точках, а именно, в точке  $j' = \Gamma(\gamma)$ . Для описания релаксационного внутреннего трения при заданном де-



Фиг. 1

фекте модуля кривые векторной диаграммы должны исходить из одних точек, а поэтому ядро Ржаницына следует брать в виде

$$\varphi(t) = (t^{\gamma-1} / \Gamma(\gamma)) \exp(-t/\tau_{\sigma}) \quad (19)$$

т. е. с поправкой на гамма-функцию  $\Gamma(\gamma)$ . Ситуация аналогична той, которая имеется между ядрами Дюффинга и Абеля. Выбор ядра в виде (19) позволяет в формулах (16) — (18) устранить  $\Gamma(\gamma)$ , т. е. положить в них  $\Gamma(\gamma) = 1$ . На фиг. 1, б приведена соответствующая диаграмма, которая отличается от предыдущей только тем, что все кривые при  $\omega\tau_{\sigma} \rightarrow 0$  сходятся в одну точку  $j' = (J' - J_{\infty}) / \Delta J = 1$ . Для ядра (19) можно записать следующее эквивалентное реологическое уравнение:

$$\varepsilon = J_{\infty} \sigma + \Delta J (1 + \tau_{\sigma} d/dt)^{-\gamma} \quad (20)$$

Для построения частотной зависимости внутреннего трения  $\tan \delta$  необходимо задать в качестве параметра дефект модуля (податливости). Однако энергетические потери пропорциональны смещенной по фазе части деформации (напряжения), и кривая внутреннего трения близка к кривой частотной зависимости величин  $J''$  или  $E''$ . Поэтому для качественной информации о диссипативных свойствах рассматриваемых сред можно ограничиться исследованием частотной зависимости мнимой части податливости (модуля). Синфазные составляющие  $J'$  и  $E'$  — динамические характеристики соответствующих величин.

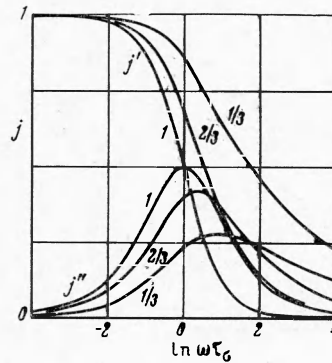
Времена релаксации  $\tau_{\varepsilon}$  и ретардации  $\tau_{\sigma}$  — материальные характеристики, обычно зависящие от температуры по экспоненциальному закону, но не зависящие от частоты  $\omega$ .

Фиг. 2 иллюстрирует частную зависимость действительной  $j'$  и мнимой  $j''$  составляющих податливости. Из фиг. 2 видно, что уменьшение параметра  $\gamma$  понижает пик величины  $j''$  и смещает его в сторону более высоких частот по сравнению с пиком для стандартного линейного тела, достигающего максимальной величины 0,5 при  $\omega\tau_{\sigma} = 1$ . Уменьшение  $\gamma$  приводит к более плавному изменению динамической податливости. Таким образом, параметр  $\gamma$  характеризует размытие и смещение релаксационного (релаксационного) спектра.

4. Рассмотрим в качестве ядер дробно-экспоненциальные функции, предложенные Ю. Н. Работновым [8]. Эти ядра удобны тем, что их резольвенты являются дробно-экспоненциальными функциями того же порядка.

Например, выбрав ядро последствия

$$\varphi(t) = t^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_{\sigma})^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad (21)$$



Фиг. 2

при помощи формул (4) легко убедиться, что его резольвента будет ядром релаксации

$$j(t) = t^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau_\varepsilon)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad (22)$$

Отметим попутно, что ядра (21) и (22) эквивалентны реологическому уравнению стандартного линейного тела с дробными производными по времени

$$J_0(\sigma + \tau_\varepsilon^\gamma d^\gamma \sigma / dt^\gamma) = \varepsilon + \tau_\sigma^\gamma d^\gamma \varepsilon / dt^\gamma \quad (23)$$

При помощи соотношений (21) — (23) нетрудно получить

$$J' = J_\infty + \Delta J \frac{(\omega\tau_\sigma)^{-\gamma} + \cos \psi}{(\omega\tau_\sigma)^\gamma + (\omega\tau_\sigma)^{-\gamma} + 2\cos \psi} \quad (24)$$

$$J'' = \Delta J \frac{\sin \psi}{(\omega\tau_\sigma)^\gamma + (\omega\tau_\sigma)^{-\gamma} + 2\cos \psi} \quad (\psi = \frac{1}{2}\pi\gamma) \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\Delta J \sin \psi}{J_0(\omega\tau_\sigma)^{-\gamma} + J_\infty(\omega\tau_\sigma)^\gamma + (J_0 + J_\infty) \cos \psi} \quad (26)$$

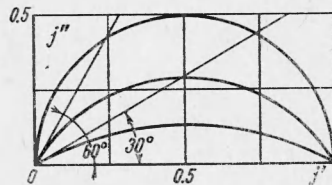
Заслуживает внимания полная симметрия формул (21) — (26), которые при  $\gamma = 1$  переходят в обычные соотношения для стандартного линейного тела.

На фиг. 3 для различных  $\gamma$  приведена диаграмма  $j'' = j''(i')$ , которая представляет собой круговые диаграммы Коль — Коля [9] с центральным углом, равным  $\gamma\pi$ . Радиус каждого круга  $r$  дается формулой

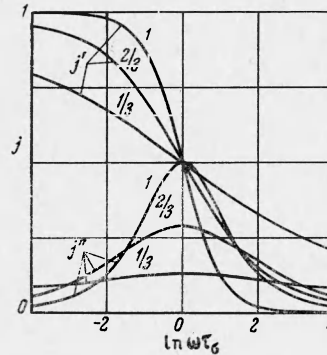
$$r = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}(\frac{1}{2}\pi\gamma) \quad (27)$$

то есть радиус круговой диаграммы определяется только параметром дробности  $\gamma$ .

Далее нетрудно установить, что угол  $\psi = \frac{1}{2}\pi\gamma$  определяет наклон касательной к



Фиг. 3



Фиг. 4

каждой дуге относительно оси абсцисс в точках 0 и 1. Сами касательные на диаграмме соответствуют ядру Абеля.

Таким образом, зная порядок дробности  $\gamma$ , можно нарисовать векторные диаграммы для ядер Работнова без дополнительных вычислений.

Из фиг. 4, где показана частотная зависимость действительной и мнимой частей податливости, видно, что параметр  $\gamma$  приводит к размытию ретардационного (релаксационного) спектра.

Более подробные сведения об использовании дробно-экспоненциальных ядер для описания внутреннего трения релаксационного типа содержатся в работе [10].

Итак, рассмотренные примеры свидетельствуют, что особенность ядер типа  $(t - t')^{\gamma-1}$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ) определяет угол  $\psi = \frac{1}{2}\pi\gamma$ , под которым кривая векторной диаграммы при  $\omega \rightarrow \infty$  пересекает ось абсцисс, где откладываются действительные значения податливости (модуля). При  $\gamma = 1$  особенности нет, и пересечение происходит под прямым углом.

Особенно хорошо это видно при исследовании так называемого фона, под которым понимают резкое возрастание внутреннего трения  $\operatorname{tg} \delta$  при уменьшении частоты (увеличении температуры). С феноменологической точки зрения, фон объясняется полной релаксацией упругого модуля, что реально возможно только для модуля сдвига. Поэтому при использовании вышеприведенных формул для описания фона под упругим модулем следует понимать модуль сдвига  $\mu$ , который релаксирует полностью, т. е.  $\mu_0 = 0$ . В этом случае для тангенса угла механических потерь ядра Абеля, Ржаницына (19), Работнова приводят к одной и той же формуле

$$\operatorname{tg} \delta = [(\omega\tau_\varepsilon)^\gamma + \cos \psi]^{-1} \sin \psi \quad (28)$$

которая при  $\gamma = 1$  переходит в хорошо известное соотношение  $\operatorname{tg} \delta = 1/\omega\tau_\epsilon$ , получаемое из обычного реологического уравнения Максвелла.

Следует подчеркнуть, что соображения, приведшие к формуле (28), свидетельствуют, что природа фона имеет чисто релаксационный характер, не связанный ни с какими релаксационными процессами.

Поступила 3 I 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. London, 1959
2. Blaud D. R. The theory of linear viscoelasticity. Pergamon Press. Oxford, London, New York, Paris, 1960 (русск. перев. под ред. Григолюка Э. И. Теория линейной вязкоупругости. Изд. «Мир», М., 1965)
3. Zener C. Elasticity and Anelasticity of metals, Chicago, 1948 (русск. перев. под ред. Вонсовского С. В. Упругость и неупругость металлов. Изд. иностр. лит. 1954)
4. Бронский А. П. Явление последействия в твердом теле, ПММ, 1941, т. 5, вып. 1
5. Duffing G. Elastizität und Reibung beim Riemtrieb. Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1931 Bd. 2, N 3, s. 99
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959
7. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, 1949
8. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 3, стр. 53.
9. Cole K. S., Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics. J. Chem. Phys., 1941, vol. 9, p. 341.
10. Мешков С. И., Пачевская Г. Н., Шермергор Т. Д. К описанию внутреннего трения с помощью дробно-экспоненциальных ядер. ПМТФ, 1966, № 3, стр. 103

#### ТЕНЗОР ГРИНА ДЛЯ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

И. А. Кунин (Новосибирск)

Модель упругой среды простой структуры с пространственной дисперсией рассматривалась в [1, 2]. В изотропном случае уравнения для смещений в  $(k, \omega)$ -представлении формально совпадают с уравнениями обычной теории упругости, но коэффициенты Ляме  $\lambda, \mu$  зависят от модуля волнового вектора  $k$  и (в случае сложной структуры) от частоты  $\omega$ . При этом  $|k| \ll \kappa = \pi/a$ , где  $\kappa$  — дебаевский радиус,  $a$  — характерный масштабный параметр среды. Цель настоящей заметки — построение для данной модели явного выражения для статического тензора Грина  $\bar{G}_{\alpha\beta}$  в  $\mathbf{r}$ -представлении.

Исходным будет известное выражение для  $G_{\alpha\beta}$  в  $\mathbf{k}$ -представлении [1]

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2\mu(k)} \left[ \delta_{\alpha\beta} - \frac{\lambda(k) + \mu(k)}{\lambda(k) + 2\mu(k)} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] \quad \begin{cases} k = |\mathbf{k}| \\ r = |\mathbf{r}| \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем  $f(\mathbf{k})$  обозначает фурье-образ  $f(\mathbf{r})$ .

Для поставленной цели удобно представить  $G_{\alpha\beta}$  в виде суммы продольного ( $l$ ) и поперечного ( $t$ ) тензоров Грина

$$G_{\alpha\beta}^l(\mathbf{k}) = \frac{k_\alpha k_\beta}{\rho k^2 \omega_l^2(k)}, \quad G_{\alpha\beta}^t(\mathbf{k}) = \frac{1}{\rho \omega_t^2(k)} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \quad (2)$$

$$\omega_l^2(k) = \frac{k^2 [\lambda(k) + 2\mu(k)]}{\rho}, \quad \omega_t^2(k) = \frac{k^2 \mu(k)}{\rho} \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность. Для среды простой структуры уравнения  $\omega = \omega_i(k)$  ( $i = l, t$ ) определяют продольную и поперечную ветви колебаний, причем функции  $\omega_i(k)$  должны удовлетворять соотношениям

$$d\omega_i(0)/dk = c_i, \quad d\omega(\infty)/dk = 0 \quad (4)$$

где  $c_i$  — скорости звука при  $k = 0$ . Запишем выражения для  $\omega_i(k)$  в виде

$$\omega_i^2 = c_i^2 k^2 / g_i(k^2) \quad (5)$$

где  $g_i(x)$  — подходящий аппроксимирующий полином, удовлетворяющий условиям (4).