ПМТФ, №5, 1962

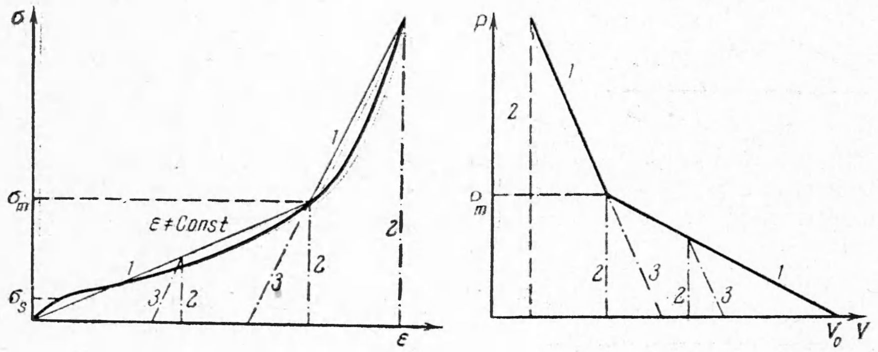
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ СО СМЕЩАЮЩЕЙСЯ ПРЕГРАДОЙ

Г. М. Ляхов, Н. И. Полякова

(*Москва*)

Ранее [1] было рассмотрено взаимодействие с преградой волны в упруго-пластической среде с переменным знаком кривизны зависимости напряжения от деформации $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Исследовался случай малых напряжений, лежащих на вогнутом участке диаграммы $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, когда волна не имеет скачка давления на фронте. Ниже на основе [1,2] дается решение задачи о ваимодействии плоской волны со смещающейся преградой или границей сред в случае больших напряжений, соответствующих выпуклому относительно оси ε участку диаграммы $\sigma(\varepsilon)$. Волна при этом является ударной.

1. Рассмотрим модель среды с нелинейной зависимостью $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. При малых σ имеем $d^2\sigma / d\varepsilon^2 < 0$, а при больших $d^2\sigma / d\varepsilon^2 > 0$. Сжатие и разгрузка при $\sigma < \sigma_s$ протекают упруго, т. е. по одному закону, а при $\sigma > \sigma_s$ — по разным законам. Вторичное нагружение происходит по закону разгрузки до напряжения, достигнутого при первом сжатии. Такая модель применима к грунту и некоторым твердым средам.



Фиг. 1 *а*, *б*

Будем рассматривать большие напряжения, поэтому можно считать упругий участок малым и аппроксимировать зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ при нагрузке двумя прямыми (фиг. 1).

Рассмотрим два варианта аппроксимации кривой разгрузки. В первом случае примем, что разгрузка происходит при неизменной остаточной деформации, т. е. по линии, параллельной оси σ, во втором случае линия разгрузки параллельна второму участку линеаризованной диаграммы сжатия $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.

На фиг. 1, *а* и *б* ломаная *1* соответствует линии нагрузки, прямые *2* — линиям разгрузки при неизменной остаточной деформации, прямые *3* — линиям разгрузки, параллельным второму участку ломаной *1*.

Распространение волны при первом законе разгрузки рассматривалось В. Н. Родионовым, А. Я. Сагомоняном и другими авторами; отражение от неподвижной преграды при аппроксимации кривой сжатия $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ одной прямой — С. Калиским и Я. Осецким [3].

Перейдем от параметров σ, ε к параметрам давление p и объем V.

При распространении плоской волны в среде, безграничной в направлении, перпендикулярном к ее движению, или в стержне, ограниченном несжимаемой оболочкой, сжатие среды соответствует одноосному деформированному состоянию. При этом

$$\sigma = -p, \qquad \varepsilon = (V - V_0) / V_0 \tag{1.1}$$

В силу (1.1) зависимость $p = p(V)$ будет линейной, если линейна связь $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.

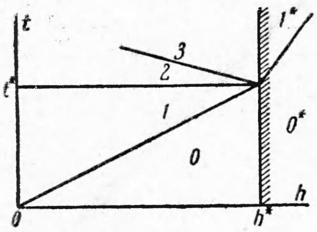
Уравнения звеньев, аппроксимирующих кривую сжатия, в системе единиц p, V имеют вид

$$p = -A_1^2 V + B_1 \quad \text{при } p \leqslant p_m, \qquad p = -A_2^2 V + B_2 \quad \text{при } p > p_m$$
$$(A, B = \text{const}) \tag{1.2}$$

Тепловые потери энергии при сжатии среды определяются площадью фигуры в плоскости pV, ограниченной прямой, соединяющей на графике сжатия $p = p(V)$ точки, соответствующие давлению на фронте и перед ним, и линией разгрузки. Поэтому при первом законе разгрузки ($\partial V / \partial t = 0$) потери энергии при движении волны являются максимально возможными при заданном законе сжатия $p = p(V)$.

2. Рассмотрим взаимодействие волны с преградой в случае, когда линия разгрузки параллельна оси p. Пусть при $t = 0$ в начальном сечении среды $h = 0$ давление скачком возрастает до p_m, а затем падает по заданному закону

$$p = f(t) \tag{2.1}$$



Фиг. 2

По среде станет распространяться ударная волна. Течение за фронтом ударной волны в координатах Лагранжа, где h — масса, t — время, определяется уравнениями движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial h} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial h} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{2.2}$$

Здесь u — скорость частиц.

В нашем случае за фронтом (область *1* на фиг. 2) происходит разгрузка среды при $\partial V / \partial t = 0$, отсюда решение уравнений (2.2) получим в виде

$$\frac{\partial u}{\partial h} = 0, \quad u = \varphi_1(t), \quad \frac{\partial p}{\partial h} = -\dot{\varphi}_1(t), \qquad p = -h\dot{\varphi}_1(t) + \psi_1(t) \tag{2.3}$$

Функции $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ должны быть определены из начальных и граничных условий задачи.

При $h = 0$ имеем $p = f(t)$. Отсюда $\psi_1(t) = f(t)$. Соотношения на фронте ударной волны в координатах h, t имеют вид

$$p - p_0 = \dot{h}^2 (V_0 - V), \qquad u - u_0 = \dot{h}(V_0 - V) \tag{2.4}$$

где $\dot{h}$ — скорость фронта. Положим давление и скорость частиц перед фронтом волны $p_0 = 0$, $u_0 = 0$. Пусть максимальное давление в сечении $h = 0$ соответствует максимальному значению p_m на первом участке аппроксимации. Тогда $\dot{h} = A_1$. На линии фронта $h = A_1 t$ имеем

$$p = A_1 u, \qquad f(t) - h\dot{\varphi}_1(t) - A_1\varphi_1(t) = 0 \tag{2.5}$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем $\varphi_1(t)$. Таким образом, получено решение в области *1*

$$p(h, t) = -h\dot{\varphi}_1(t) + f(t), \qquad u = \varphi_1(t) \tag{2.6}$$

Если в начальном сечении p задано в виде

$$p(t) = p_m\left(1 - \frac{t}{\theta}\right) \qquad (2.7)$$

то, интегрируя (2.5), найдем, что в области *1*

$$u = \varphi_1(t) = \frac{p_m}{A_1}\left(1 - \frac{t}{2\theta}\right), \qquad p = p_m\left(1 - \frac{t}{\theta} + \frac{h}{2A_1\theta}\right) \qquad (2.8)$$

Пусть в сечении $h = h^*$ расположена преграда (или граница сред). Зависимость $p = p(V)$ во второй среде за преградой аппроксимируем прямой

$$p = -A^{*2}V + B^* \qquad (2.9)$$

При $t^* = h^* / A_1$ фронт волны достигнет преграды. При отражении образуются: область *2* — отраженной ударной волны, область *3* — отраженной пластической волны, область *1** — проходящей волны за преградой. В области *2* происходит нагрузка среды по линии разгрузки ($V = V(h)$) до предела упругости, разного у различных частиц. Решение в области *2* в соответствии с (2.3)

$$p = -h\varphi_2(t) + \psi_2(t), \qquad u = \varphi_2(t) \qquad (2.10)$$

При $h = 0$ имеем $p = f(t)$. Отсюда $\psi_2(t) = f(t)$. Скорость фронта

$$\dot{h} = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}} \qquad (2.11)$$

Скорость определяется углом наклона секущей на диаграмме $p = p(V)$, проведенной из точки, где p_2 соответствует давлению на фронте в точку, где p_1 — давление перед фронтом. Если время действия волны θ в сечении $h = 0$ велико, то максимальное давление в падающей волне уменьшается с возрастанием h незначительно. Отраженная волна движется по области с малыми изменениями давления. Поэтому скорость фронта отраженной волны (при $p > p_m$) может быть принята постоянной, равной в силу нашей аппроксимации — A_2. Тогда уравнение линии фронта *2-3* (фиг. 2)

$$h = -A_2 t + \frac{A_1 + A_2}{A_1} h^* \qquad (2.12)$$

На этой линии в области *2* давление в каждой частице достигает значения, которое было на фронте падающей волны $h = A_1 t$. Отсюда в силу (2.10)

$$\dot{\varphi}_2(t) = \dot{\varphi}_1(\lambda) + [f(t) - f(\lambda)] / A_1\lambda$$
$$\lambda = [(A_1 + A_2)t^* - A_2 t] / A_1 \qquad (2.13)$$

Интегрируя это уравнение при условии $\varphi_2(t^*) = \varphi_1(t^*)$, найдем $\varphi_2(t)$, что совместно с условием $\psi_2(t) = f(t)$ определяет течение в области *2*.

Если при $h = 0$ давление задано уравнением (2.7), то из (2.13) найдем, что в области *2*

$$\dot{\varphi}_2(t) = \frac{p_m}{2A_1\theta}\left(1 - \frac{2t}{\lambda}\right)$$
$$\varphi_2(t) = \frac{p_m}{2A_1}\left[\frac{(A_2 + 2A_1)(t - t^*)}{A_2\theta} + \frac{2(A_1 + A_2)h^*}{A_2^2\theta} \ln\frac{\lambda}{t^*} - \frac{t^*}{\theta} + 2\right] \qquad (2.14)$$

В области *3* происходит разгрузка среды, решение имеет вид (2.3).

Условие на преграде: скорость частиц среды, примыкающих к преграде с обеих сторон, равна скорости преграды $\varphi_3(t)$. Давление, действующее со стороны второй среды, при выполнении условия (2.9) связано со скоростью частиц соотношением $p = A^*u = A^*\varphi_3(t)$.

Отсюда уравнение движения преграды в области 3 имеет вид

$$m\dot{\varphi}_3(t) = -h^*\dot{\varphi}_3(t) + \psi_3(t) - A^*\varphi_3(t)$$

где m — масса преграды, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения. Индекс 3 относится к области 3. Функцию $\psi_3(t)$ найдем из условия на фронте отраженной волны. В соответствии с (2.4) и (2.3)

$$\begin{aligned} p_3 - p_2 = -A_2(u_3 - u_2), \quad -h\dot{\varphi}_3(t) + h\dot{\varphi}_2(t) + \psi_3(t) - f(t) = \\ = A_2[\varphi_2(t) - \varphi_3(t)] \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Иключив при помощи (2.15) функцию ψ_3, преобразуем уравнение движения к виду

$$\begin{aligned} (A_2 t - A_2 t^* + m)\dot{\varphi}_3(t) = -(A_2 + A^*)\varphi_3(t) + \\ + A_2\varphi_2(t) - [(A_1 + A_2)t^* - A_2 t]\dot{\varphi}_2(t) + f(t) \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Интегрируя это уравнение, при условии, что $\varphi_3(t^*) = 0$, найдем скорость преграды $\varphi_3(t)$. Определив $\psi_3(t)$ из (2.15), получим решение в области 3. Если преграда неподвижна ($m = \infty$), то в области 3 скорость частиц равна нулю $\varphi_3(t) = 0$. Из (2.15) получим

$$p(t) = \psi_3(t) = A_2\varphi_2(t) + f(t) - \dot{\varphi}_2(t)A_1\lambda \qquad (2.17)$$

Если при этом в сечении $h = 0$ выполняется условие (2.7), то в области 3 давление определяется уравнением

$$p(t) = \frac{A_1 + A_2}{A_1} p_m \left(1 + \frac{t}{\theta} - \frac{3}{2}\frac{t^*}{\theta} + \frac{A_1}{A_2}\frac{t^*}{\theta}\ln\frac{\lambda}{t^*}\right) \qquad (2.18)$$

Отсюда получим

$$p = \frac{A_1 + A_2}{A_1} p_m \left(1 - \frac{t^*}{2\theta}\right) \quad \text{при } t = t^*$$

В падающей волне в этот момент времени в соответствии с (2.8)

$$p = p_m\left(1 - \frac{t^*}{2\theta}\right)$$

Отсюда коэффициент отражения от преграды

$$\eta = \frac{A_1 + A_2}{A_1} > 2 \qquad (2.19)$$

Если при $h = 0$ давление задано в виде (2.7) и масса m конечна, то, вводя новую переменную $\tau = t - t^*$, получим дифференциальное уравнение движения преграды (2.16) в области 3 в виде

$$\begin{aligned} (m + A_2\tau)\dot{\varphi}_3(\tau) + (A_2 + A^*)\varphi_3(\tau) = \\ = p_m\frac{A_1 + A_2}{A_1}\left[1 + \frac{\tau}{\theta} - \frac{t^*}{2\theta} + \frac{A_1 t^*}{A_2\theta}\ln\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\frac{\tau}{t^*}\right)\right] \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Решение этого уравнения, т. е. выражение для скорости преграды в области 3, при $A_1^* = A_1 = A_2/2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_3(\tau) = \frac{2p_m}{A_2}\left\{\left(1 - \frac{5t^*}{6\theta} - \frac{2m}{5A_2\theta}\right)(1 - \alpha^{3/2}) + \frac{3}{5}\frac{\tau}{\theta} + \frac{t^*}{2\theta}\ln\left(1 - \frac{2\tau}{t^*}\right) - \right. \\ \left. - \frac{t^*}{\theta}\left[(1 - \alpha^{1/2})\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha\beta)^{3/2}\ln\frac{(\sqrt{\alpha\beta} + 1)(\sqrt{\beta} - 1)}{(\sqrt{\alpha\beta} - 1)(\sqrt{\beta} + 1)}\right]\right\} \end{aligned} \qquad (2.21)$$

где

$$\alpha = \frac{m}{m + A_2\tau}, \qquad \beta = 1 + \frac{h^*}{m},$$

При больших значениях t^*/θ падение давления на фронте надающей волны на участке $0 < h < h^*$ велико и скорость фронта отраженной пластической волны может сильно отличаться от $-A_2$. В этом случае течение в областях *2* и *3* должно быть найдено при одновременном определении границы между ними.

Если зависимость $p(V)$ при сжатии аппроксимируется одной прямой, имеющей наклон A_1, а разгрузка происходит по вертикали, то, полагая в уравнении (2.20) $A^* = A_2 = A_1$, найдем его решение в виде

$$\varphi_3(\tau) = \frac{P_m}{A_1}\left\{\left(1 - \frac{t^*}{2\theta} - \frac{m}{A_1\theta}\right)(1-\alpha^2) + \frac{2}{3}\frac{m}{A\theta}\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{t^*}{\theta}\left[\frac{1}{2}\left[\left(\alpha + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right] + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\ln\frac{1-\alpha/\beta}{\alpha - \alpha/\beta}\right]\right\}$$

Здесь

$$\alpha = \frac{m}{m + A_1\tau}, \qquad \beta = \frac{m}{m + A_1 t^*}$$

Скорость фронта отраженной пластической волны равна $-A_1$.

В зависимости от параметров падающей волны, характеристик сред по обе стороны от преграды, массы и удаления преграды от начального сечения возможны различные конфигурации системы отраженных волн (в частности, области разгрузки могут сменяться областями нагрузки и т. д.).

3. Рассмотрим взаимодействие волны с преградой в случае, когда линия разгрузки непараллельна оси p. Пусть в сечении $h = 0$ давление меняется в соответствии с (2.7). Аппроксимируем кривую сжатия среды прямыми (1.2), а линию разгрузки — прямой

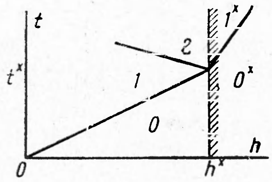
$$p = -A_2^2 V + B_2 \tag{3.1}$$

где B_2 зависит от значения максимального напряжения, достигнутого при сжатии; p_m соответствует максимальному давлению на первом участке аппроксимации. Решение уравнений (2.2), определяющих течение за фронтом волны, образующейся в среде, при линейной аппроксимации зависимости $p = p(V)$, как было показано в [1], имеет вид

$$p = F_1(h - A_2 t) + F_2(h + A_2 t), \qquad A_2 u = F_1(h - A_2 t) - F_2(h + A_2 t) \tag{3.2}$$

Функции F_1 и F_2 определяются начальными и граничными условиями. Течение за фронтом волны (область *1* на фиг. 3), найденное из (3.2) в соответствии с [1], определяется уравнениями

$$p = p_m\left(1 - \frac{A_2^2 + A_1^2}{2A_1A_2^2}\frac{h}{\theta} - \frac{t}{\theta}\right) \tag{3.3}$$
$$A_2 u = p_m\left(\frac{A_2}{A_1} + \frac{h}{A_2\theta} - \frac{A_1^2 + A_2^2}{2A_1A_2}\frac{t}{\theta}\right)$$



Фиг. 3.

При $t = h^\times / A_1 = t^\times$ фронт достигает преграды. При этом образуются области *2* и $1^\times$. Как и в п. 2, примем уравнение фронта отраженной волны в виде (2.12), а зависимость $p = p(V)$ во второй среде за преградой в виде (2.9).

Область, соответствующая области *2* на фиг. 2, в рассматриваемом случае не возникает, так как скорость фронта отраженной волны совпадает со скоростью разгрузки. Условие на границе *1-2* (фиг. 3)

$$p_2 + A_2 u_2 = p_1 + A_2 u_1 \tag{3.4}$$

дает, что из области 1 в 2 переходит функция

$$F_1(h - A_2 t) = p_m\left\{\frac{A_1 + A_2}{2A_1} + \frac{(A_1 + A_2)^2}{4A_1A_2^2\theta}(h - A_2 t)\right\} \tag{3.5}$$

Отсюда дифференциальное уравнение движения преграды

$$m\dot{\varphi}(t) = p_2 - p_1^\times = 2F_1(h^\times - A_2 t) - (A_2 + A_1^\times)\varphi(t)$$

или

$$\dot{\varphi} + C\varphi + Bt + D = 0 \qquad (3.6)$$

где

$$C = \frac{A_2 + A_1^\times}{m}, \quad B = \frac{(A_1 + A_2)^2}{2A_1A_2}\frac{p_m}{\theta m}, \quad D = -p_m\frac{A_1 + A_2}{mA_1}\left[1 + \frac{(A_1 + A_2)h^\times}{2A_2^2\theta}\right]$$

Интегрируя (3.6) при условии $\varphi(t^\times) = 0$, найдем скорость преграды

$$\varphi(t) = \frac{B}{C}\left\{-t + \frac{h^\times}{A_1} + \left(\frac{1}{C} - \frac{D}{B} - \frac{h^\times}{A_1}\right)\left(1 - \exp\left[-C\left(t - \frac{h^\times}{A_1}\right)\right]\right)\right\} \qquad (3.7)$$

Определим вторую функцию в области *2* из условия

$$F_1(h^\times - A_2t) - F_2(h^\times + A_2t) = A_2\varphi(t)$$

Отсюда

$$F_2(h + A_2t) = \frac{A_1 + A_2}{2A_1}p_m\left\{1 + \frac{A_1 + A_2}{2A_2^2\theta}(2h^\times - h - A_2t)\right\} - A_2\varphi\left(\frac{h - h^\times + A_2t}{A_2}\right)$$

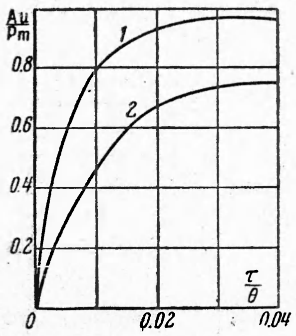
Решение в области *2*

$$p = \frac{A_1 + A_2}{A_1}p_m\left[1 + \frac{A_1 + A_2}{2A_2^2\theta}h^\times - \frac{A_1 + A_2}{2A_2\theta}t\right] - A_2\varphi\left(\frac{h - h^\times + A_2t}{A_2}\right) \qquad (3.8)$$

$$u = \frac{A_1 + A_2}{2A_1A_2^2}p_m\left(\frac{h - h^\times}{\theta}\right) + \varphi\left(\frac{h - h^\times + A_2t}{A_2}\right)$$

Решение в области $1^\times$ находим из условия на фронте проходящей волны $p_1^\times - A^\times u_1^\times = 2F_2^\times = 0$ и условия, что при $h = h^\times$ скорость частиц равна скорости преграды

$$p = A^\times u = F_1^\times(h - A^\times t) = A^\times\varphi\left(\frac{h^\times - h + A^\times t}{A^\times}\right)$$



Фиг. 4

Скорость преграды, определяемая уравнением (3.7), сначала растет, а затем падает. Дифференцируя (3.7) и приравнивая производную нулю, найдем, что максимальное значение скорости достигается в момент времени τ, определяемый из условия

$$\exp\left[-C\left(\tau - \frac{h^\times}{A_1}\right)\right] = \frac{A_1B}{A_1B - A_1CD - BCh^\times} = \qquad (3.9)$$

$$= \left[1 + \frac{A^\times + A_2}{A_1 + A_2}\frac{2A_2\theta}{m} + \frac{(A^\times + A_2)(A^\times - A_2)h^\times}{A_1A_2m}\right]^{-1}$$

Если $m = \infty$, то в области *2* при $h = h^\times$

$$u = 0, \qquad F_1(h^\times - A_2t) - F_2(h^\times + A_2t) = 0$$

Отсюда

$$F_2(h + A_2t) = F_1(2h^\times - h - A_2t) = p_m\frac{A_1 + A_2}{2A_1} \times$$

$$\times\left[1 + \frac{A_1 + A_2}{2A_2^2\theta}(2h^\times - h - A_2t)\right]$$

$$p = p_m\frac{A_1 + A_2}{A_1}\left[1 + \frac{A_1 + A_2}{2A_2^2\theta}(h^\times - A_2t)\right], \quad u = \frac{p_m(A_1 + A_2)^2}{2A_1A_2^3}(h - h^\times) \qquad (3.10)$$

Если $m = 0$, то из (3.6) получим, что при $h = h^\times$

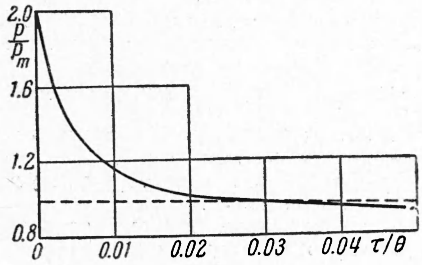
$$\varphi(t) = \frac{2F_1(h^\times - A_2t)}{A^\times + A_2} = \frac{(A_1 + A_2)}{(A^\times + A_2)}\frac{p_m}{A_1}\left[1 + \frac{A_1 + A_2}{2A_2^2\theta}(h^\times - A_2t)\right] \qquad (3.11)$$

4. Анализ закономерности движения преграды проведем для простейшего случая, когда зависимость $\sigma(\varepsilon)$ при сжатии аппроксимируется одной прямой.

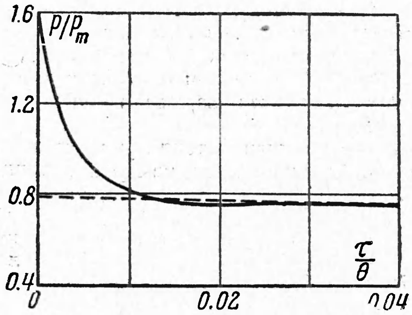
Рассмотрим результаты расчета скорости преграды, представленные на фиг. 4 двумя графиками, соответствующими различным моделям среды.

В обоих случаях масса преграды m, удаление ее от начального сечения $h^\times$ и изменение давления в сечении $h = 0$ (уравнение (2.7)) приняты одинаковыми.

Графики соответствуют одинаковому закону сжатия среды (одно прямолинейное звено), однако линия разгрузки различна: кривая *1* — линия разгрузки совпадает с линией нагрузки; кривая *2* — линия разгрузки параллельна оси p.



Фиг. 5а



Фиг. 5б

При этих условиях во втором случае потери энергии при движении падающей и отраженной волн, как отмечалось выше, наибольшие, а в первом — наименьшие.

Различие в характере графиков связано с различием в потерях энергии. С увеличением потерь значение максимальной скорости преграды уменьшается.

На фиг. 5а и 5б показано изменение давления на преграду при ее движении для этих двух моделей сред: фиг. 5а — среда подчиняется закону Гука; фиг. 5б — линия разгрузки вертикальна. Пунктиром на фиг. 5а и 5б показано давление в волне в сечении $h = h^\times$ при отсутствии преграды. Как видно из фигур, наличие преграды заметно искажает волну лишь в течение небольшого, по сравнению с θ, промежутка времени.

Таким образом, в упруго-пластической среде с вертикальной разгрузкой, так же как и в линейно упругой среде, подчиняющейся закону Гука, даже преграда с относительно большой массой вовлекается в движение вместе со средой за промежуток времени, малый по сравнению со временем действия волны.

Этот вывод относится также и к средам с наклонной линией разгрузки.

Поступила 18 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляхов Г. М. и Полякова Н. И. Распространение и взаимодействие волн сжатия и разрежения в упруго-пластических средах. Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 3.
2. Ляхов Г. М. О взаимодействии ударных волн в водонасыщенном грунте и в воде. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 1.
3. Kaliski S., Osiecki J. The Problem of Reflection by a Rigid or Elastic Wall of an Unloading Wave in a Body with Rigid Unloading Characteristic. Proc. of Vibr. Problems, Warsaw, 1959, № 1.