

УДК 532.516

**УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ
ЖИДКОСТИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ**

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, В. М. Мызников

(Пермь)

Исследована устойчивость стационарного плоскопараллельного конвективного течения между горизонтальными плоскостями, вдоль которых задан постоянный градиент температуры, относительно нормальных пространственных возмущений. Показано, что в широкой области значений числа Прандтля ($P > 0.24$) кризис течения вызывается пространственными спиральными возмущениями. Спиральные возмущения развиваются в неустойчиво стратифицированных слоях жидкости, прилегающих к верхней и нижней границам слоя, и имеют рэлеевскую природу.

1. В [1] рассмотрена устойчивость стационарного плоскопараллельного конвективного течения между горизонтальными плоскостями, вдоль которых задан постоянный градиент температуры, и определена граница устойчивости относительно плоских нормальных возмущений. В данной работе продолжено исследование устойчивости этого течения и рассмотрены пространственные возмущения.

В горизонтальном слое, ограниченном твердыми плоскостями, вдоль которых температура меняется по линейному закону (фиг. 1), возникает плоскопараллельное стационарное течение. Безразмерные скорость и температура (единицы измерения указаны в [1]) распределены по сечению следующим образом:

$$(1.1) \quad v_0 = \frac{1}{6}(x^3 - x), \quad T_0 = z + GP\tau_0 \\ \tau_0 = \frac{1}{360}(3x^5 - 10x^3 + 7x)$$

Рассмотрим пространственные нормальные возмущения этого течения, зависящие от времени и горизонтальных координат по закону

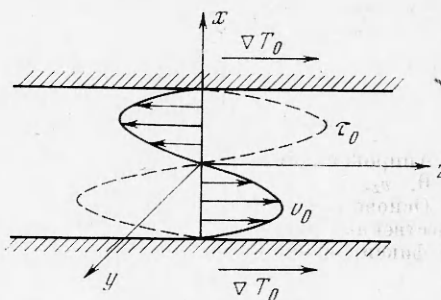
$$(1.2) \quad (v, T, p) \sim \exp[-\lambda t + i(k_y y + k_z z)]$$

Из линеаризованных уравнений возмущений (система (2.1) — (2.3) работы [1]) следует спектральная задача для амплитуд

$$(1.3) \quad \begin{aligned} -\lambda v_x + ik_z Gv_0 v_x &= -p' + (v_x'' - k^2 v_x) + \theta \\ -\lambda v_y + ik_z Gv_0 v_y &= -ik_y p + (v_y'' - k^2 v_y) \\ -\lambda v_z + ik_z Gv_0 v_z + Gv_0' v_x &= -ik_z p + (v_z'' - k^2 v_z) \\ -\lambda \theta + ik_z Gv_0 \theta + G^2 P \tau_0' v_x + Gv_z &= P^{-1}(\theta'' - k^2 \theta) \\ v_x' + ik_y v_y + ik_z v_z &= 0 \quad (k^2 = k_y^2 + k_z^2) \\ x = \pm 1: \quad v_x = v_y = v_z = \theta &= 0 \end{aligned}$$

Здесь v_x, v_y, v_z, θ и p — зависящие от поперечной координаты x амплитуды возмущений; λ — комплексный декремент; k_y, k_z — волновые числа вдоль соответствующих направлений; G и P — числа Грасгофа и Прандтля.

Случай плоских возмущений ($k_y = 0, k_z \neq 0, v_y = 0$) рассмотрен в [1]. В отличие от задачи о пространственных возмущениях в плоскопараллельном течении между параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры [2], спектральная задача (1.3) не сводится к соответствующей задаче для плоских возмущений. Поэтому вопрос о поведении пространственных возмущений требует специального рассмотрения. По аналогии с результатами [2] можно ожидать, что среди пространственных возмущений наиболее «опасными» являются спиральные возмущения ($k_z = 0, k_y \neq 0$), имеющие форму валов, оси которых параллельны скорости основного течения.



Фиг. 1

Полагая $k_z = 0$ и исключая амплитуды v_y и p , получим спектральную задачу для спиральных возмущений

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \Delta^2 v_x - k_y^2 \theta &= -\lambda \Delta v_x & (\Delta f \equiv f'' - k^2 f) \\ \Delta v_z - G v_0' v_x &= -\lambda v_z \\ \Delta \theta - G^2 P^2 \tau_0' v_x - G P v_z &= -\lambda P \theta \\ x = \pm 1: \quad v_x = v_x' = v_z = \theta &= 0 \end{aligned}$$

Ввиду нечетности профилей скорости v_0 и температуры τ_0 краевая задача (1.4) допускает решения двух типов — четные и нечетные относительно середины слоя.

2. Для решения задачи (1.4) применялся метод Галеркина. Аппроксимации амплитуд v_x , v_z и θ имеют вид

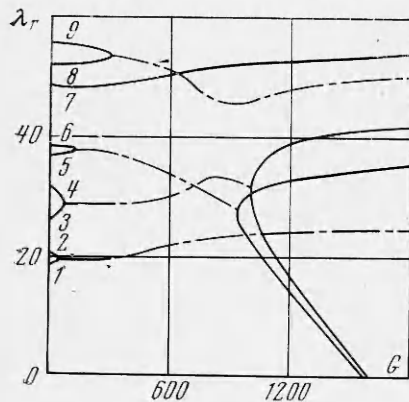
$$(2.1) \quad v_x = \sum_{m=0}^{M-1} a_m \varphi_m, \quad \theta = \sum_{n=0}^{N-1} b_n \theta_n, \quad v_z = \sum_{l=0}^{L-1} c_l \sigma_l$$

Базисные функции φ_m , θ_n , σ_l (они имеют смысл амплитуд возмущений в неподвижном слое жидкости) определяются решениями краевых задач

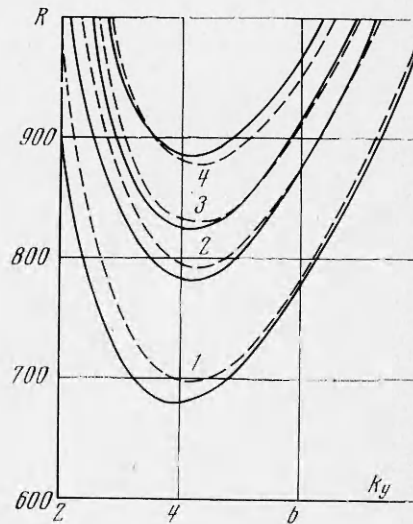
$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Delta^2 \varphi_m &= -\mu_m \Delta \varphi_m, & \varphi_m(\pm 1) = \varphi_m'(\pm 1) = 0 \\ \Delta \theta_n &= -\nu_n P \theta_n, & \theta_n(\pm 1) = 0 \\ \Delta \sigma_l &= -\chi_l \sigma_l, & \sigma_l(\pm 1) = 0 \end{aligned}$$

Аппроксимации (2.1) содержали от 4 до 20 базисных функций в разложениях v_x , θ , v_z .

Основные результаты расчетов представлены на фиг. 2—4. На фиг. 2 изображены вещественные части декрементов возмущений λ_r в зависимости от числа Грасгофа G при фиксированных параметрах $P = 0.5$, $k_y = 4$. Сплошными линиями изображены



Фиг. 2



Фиг. 3

вещественные ветви спектра; штрихпунктирные линии обозначают общую вещественную часть пары комплексно-сопряженных декрементов. При $G = 0$ все уровни вещественны и в порядке возрастания декрементов чередуются следующим образом: χ_0 , μ_0 , χ_1 , μ_1 , ν_0 , χ_2 , μ_2 , ν_1 , χ_3 . Как видно из спектра, имеются две критические точки, в которых возникает неустойчивость монотонного вида (обращение в нуль вещественного декремента). Нижний (четный) уровень неустойчивости порождается смесью четных ветвей ν_0 и χ_2 . Более высокий (нечетный) уровень порождается смесью нечетных ветвей χ_1 и μ_1 . Критические числа Грасгофа близки. Монотонный характер неустойчивости, наличие двух критических точек и их близость сохраняются и при других значениях параметров P и k_y .

На фиг. 3 изображены нейтральные кривые на плоскости критическое число Рэлея R — волновое число k_y ($R = GP$). Сплошными линиями изображены нейтральные кривые для четного уровня неустойчивости; штриховые линии относятся к нечетному

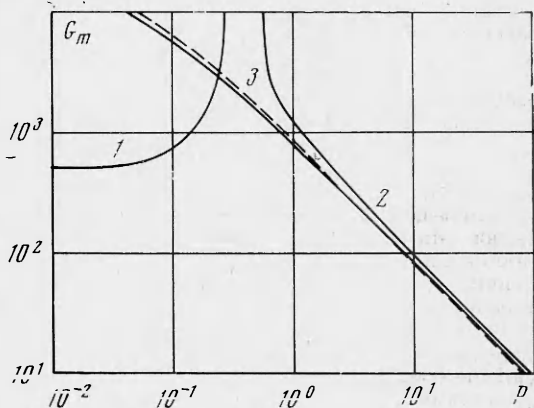
уровню. Номера пар нейтральных кривых 1—4 соответствуют значениям числа Прандтля 0,2, 0,5, 1 и 10. Видно, что критическое волновое число в широком интервале значений P близко к $k_m \approx 4$.

Сводная диаграмма устойчивости приведена на фиг. 4. Изображена зависимость минимального критического числа Грасгофа G_m от числа Прандтля P для разных мод неустойчивости. Кривая 1 дает границу устойчивости относительно плоских монотонных возмущений гидродинамического типа; кривая 2 определяет границу устойчивости относительно плоских бегущих возмущений рэлеевского типа (кривые 1 и 2 найдены в [1]). Пара кривых 3 относится к обсуждаемым в данной статье пространственным спиральным возмущениям. Сплошная и штриховая линии изображают соответственно границы устойчивости по отношению к четным и нечетным возмущениям. В широкой области чисел Прандтля $P > 0.24$ спиральные возмущения являются наиболее опасными среди всех рассмотренных типов возмущений и приводят к кризису плоскопараллельного течения.

Минимальные критические числа G_m для четных и нечетных спиральных возмущений мало отличаются. При $P < 2.7$ более опасны возмущения четного типа; при $P > 2.7$ кризис переходит к нечетному возмущению. В этой области чисел Прандтля границы устойчивости настолько близки, что в масштабе фиг. 4 они практически совпадают.

Критические числа G_m с ростом P монотонно уменьшаются, и при больших P справедлива асимптотика

$$(2.3) \quad G_m = a / P$$



Фиг. 4

где коэффициент a для четных и нечетных уровней равен соответственно 886 и 879.

Численные исследования собственных функций показывают, что спиральная неустойчивость возникает в результате развития возмущений в неустойчиво стратифицированных слоях жидкости, прилегающих к верхней и нижней плоскостям (фиг. 1). Расчеты линий тока в плоскости xu , перпендикулярной направлению основного течения, показывают, что на длине полуволны λ / k_y в направлении оси y образуются два основных вихря, локализованных в верхней и нижней половинах сечения канала. В случае нечетного возмущения два расположенных один над другим вихря имеют противоположные направления циркуляции. В случае четного возмущения основные вихри имеют одинаковое направление циркуляции, а между ними образуется слабый буферный вихрь противоположной циркуляции.

Спиральная неустойчивость, как и неустойчивость относительно плоских бегущих волн (кривая 2 на фиг. 4), обусловлена кризисом равновесия жидкости, подогреваемой снизу. Неустойчивая температурная стратификация создается плоскопараллельным течением. Это течение оказывает влияние на условия возникновения неустойчивости рэлеевского типа.

Рэлеевский характер спиральной неустойчивости подтверждается тем, что при больших P определяющим параметром служит число Рэлея (формула (2.3)). При больших P краевая задача (1.4) может быть упрощена. Из первых двух уравнений системы (1.4) следует, что на границе устойчивости ($\lambda = 0$) амплитуды имеют порядок $\theta \sim v_x$, $v_z \sim G v_x \sim P^{-1} v_x$. Первое и третье уравнения тогда принимают вид

$$(2.4) \quad \Delta^2 v_x = k_y^2 \theta, \quad \Delta \theta = R^2 \tau_0' v_x$$

Вместе с соответствующими граничными условиями эти уравнения определяют нейтральные возмущения в неподвижной жидкости с вертикальным градиентом температуры τ_0' . В отличие от спиральных возмущений плоские бегущие возмущения, рассмотренные в [1], представляют собой также рэлеевскую неустойчивость, на которую стабилизирующим образом действует основной поток.

Поступила 1 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Мызников В. М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое. ПМТФ, 1974, № 1.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного движения относительно пространственных возмущений. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.