

**ВЛИЯНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ЭФФЕКТА  
НА МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ  
ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ**

1. При малых коэффициентах вязкости ( $\nu \rightarrow 0$ ) и теплопроводности ( $\chi \rightarrow 0$ ) рассматривается нелинейная задача о малых колебаниях вязкой теплопроводной жидкости в неограниченной области  $D$  под действием термокапиллярных сил, вызванных неравномерным нагревом свободной границы  $\Gamma$ :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} &= -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ \partial T / \partial t + \mathbf{v} \nabla T &= \chi \Delta T, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} 2\nu \rho \Pi \mathbf{n} - 2\nu \rho (\mathbf{n} \Pi \mathbf{n}) \mathbf{n} &= \nabla_{\Gamma} \sigma, T = T_{\Gamma}, (x, y, z) \in \Gamma, \\ p &= 2\nu \rho \Pi \mathbf{n} + \sigma(k_1 + k_2) + p_*, \partial F / \partial t + \mathbf{v} \nabla F = 0, (x, y, z) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ;  $T$  — температура;  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ;  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$  — орт оси  $z$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к свободной границе  $\Gamma$ ;  $\Pi$  — тензор скоростей деформации;  $k_1, k_2$  — главные кривизны поверхности  $\Gamma$ ;  $p_* = \text{const}$  — давление на  $\Gamma$ ;  $\nabla_{\Gamma} = \nabla - (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{n}$  — градиент вдоль  $\Gamma$ ;  $F(t, x, y, z) = 0$  — уравнение свободной границы в неявной форме;  $\sigma$  (коэффициент поверхностного натяжения) считается линейной функцией температуры  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_T(T - T_*)$  ( $\sigma_0, \sigma_T, T_*$  — известные постоянные,  $\sigma_T < 0$ ). На бесконечности поле скоростей и градиент температуры исчезают. Начальные условия не задаются, так как решение задачи строится в виде собственных колебаний.

При исчезающих коэффициентах вязкости и теплопроводности вблизи свободной границы возникает нелинейный пограничный слой. В неограниченной области всюду вне пограничного слоя течение жидкости приближенно описывается уравнениями Эйлера. В [1—4] изучены нелинейные пограничные слои Марангони, возникающие вблизи свободной границы вследствие термокапиллярного эффекта. В [5] получены асимптотические разложения при  $\nu \rightarrow 0$  решения стационарной задачи о течении несжимаемой жидкости при неравномерном нагреве свободной границы.

Ниже строятся формальные асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) при  $\nu, \chi \rightarrow 0$ . Задача приводится к безразмерному виду и вводится малый параметр  $\varepsilon = M^{-1/3}$  ( $M = |\sigma_T| L^2 A \rho^{-1} \nu^{-2}$  — число Марангони,  $L$  и  $A$  — характерные масштабы длины и градиента температуры). Отметим, что малым  $\varepsilon$  соответствуют малые  $\nu$  или большие значения градиента температуры. Безразмерное давление  $p'$  определяется соотношением  $p = P p' - \rho g z$  ( $P = A |\sigma_T|$  — масштаб давления). Характерное значение скорости  $U = (\sigma_T^2 A^2 L \nu^{-1} \rho^{-2})^{1/3}$  в пограничном слое вблизи свободной границы принимается за масштаб скорости. Характерный масштаб времени вводится зависимостью  $(L/g)^{1/2}$ . Асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) строятся в виде

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} &\sim \mathbf{h}_0 + \varepsilon^{1/2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{h}_1) + \dots, p' \sim q_0 + p_0 + \varepsilon(p_1 + q_1) + \dots, \\ T &\sim \theta_0 + T_0 + O(\varepsilon^{1/2}), \zeta \sim \zeta_0 + \varepsilon^{1/2} \zeta_1 + \dots, \end{aligned}$$

где  $z = \zeta(x, y, t)$  — уравнение свободной границы. Обозначим через  $D_{\Gamma}$  область пограничного слоя. Тогда  $\mathbf{h}_k, q_k, \theta_0$  — функции типа решений задачи пограничного слоя в  $D_{\Gamma}$ ;  $\mathbf{v}_1, p_0, p_1, T_0$  определяют решение вне  $D_{\Gamma}$ . Порядки главных членов разложений (1.3) находятся из условий равенства порядков вязких и инерционных членов в системе Навье —

Стокса и в краевых условиях для касательных напряжений. В этом случае толщина пограничного слоя имеет порядок  $\epsilon$ .

**З а м е ч а н и е.** Асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) в линейной постановке (без учета температуры и при заданных касательных напряжениях на  $\Gamma$ ) построены в [6]. Как в нелинейной задаче, так и в линеаризованной [6] в случае конечных значений поверхностных касательных напряжений ( $\nabla_{\Gamma}\sigma = O(1)$  при  $\nu \rightarrow 0$ ) скорость жидкости в пограничном слое вблизи свободной границы на порядок больше, чем во внешнем течении (разложения (1.3)). Учет нелинейности изменяет толщину пограничного слоя  $\delta_p$ , а именно: в линейной задаче  $\delta_p \sim \nu^{1/2}$ , а в нелинейной  $\delta_p \sim \nu^{2/3}$ .

**2.** Краевая задача для главных членов асимптотики (1.3), определяющих течение в пограничном слое  $D_{\Gamma}$ , получается применением к системе (1.1), (1.2) второго итерационного процесса методом Вишика — Люстерника [7]. Вблизи свободной границы вводятся подвижные локальные ортогональные координаты  $\xi, \varphi, \theta$  ( $\xi$  — расстояние точки  $M$  до поверхности  $\Gamma$ , а  $\varphi, \theta$  — криволинейные координаты проекции точки  $M$  на  $\Gamma$ ). Поверхности  $\varphi = c_1(t), \theta = c_2(t)$  образуют два семейства ортогональных поверхностей, которые выбираются так, чтобы линии их пересечения с  $\Gamma$  образовывали линии главных кривизн. Предполагается, что отрезки нормалей к  $\Gamma$  при достаточно малых  $\xi$  не пересекаются. Приведем формулы перехода от декартовых к подвижным локальным координатам

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t, \varphi, \theta) + \xi \mathbf{n}(t, \varphi, \theta),$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ;  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ . Отметим, что  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t, \varphi, \theta)$  — параметрические уравнения поверхности  $\Gamma$ . С течением времени поверхность  $\Gamma$  деформируется. Вместе с ней перемещается и введенная локальная система координат.

Уравнения (1.1) и краевые условия (1.2) записываем в подвижных координатах. Вводим «быстрое» время  $t_1$ , связанное с малой вязкостью  $t_1 = t/\sqrt{\epsilon}$ , и учитываем, что функции  $h_k, q_k$  зависят от двух масштабов времени:  $t$  и  $t_1$ . Приведем формулу для вычисления давления в пограничном слое, полученную в результате применения метода Вишика — Люстерника к системе (1.1):

$$(2.1) \quad q_0 = -k_1 \int_s^{\infty} h_{\varphi 0}^2 ds - k_2 \int_s^{\infty} h_{\theta 0}^2 ds + \int_s^{\infty} \left[ \left( H_{\varphi}^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial \varphi} - \omega_1 \right) h_{\varphi 0} + \left( H_{\theta}^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial \theta} - \omega_2 \right) h_{\theta 0} \right] ds.$$

Здесь  $H_{\varphi}, H_{\theta}$  — коэффициенты Ламэ поверхности  $\Gamma$ ;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяют по формулам

$$\omega_1 = k_1 H_{\varphi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\xi=0} \right), \quad \omega_2 = k_2 H_{\theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{\xi=0} \right).$$

Пусть поверхность  $\Gamma$  колеблется вблизи стационарной поверхности  $\Gamma_c$  на расстоянии порядка  $\epsilon$  со скоростью  $O(\epsilon)$ . Тогда  $\partial \varphi / \partial t, \partial \theta / \partial t, \partial \xi / \partial t$  имеют порядок  $\epsilon$  и соотношение (2.1) с точностью до  $O(\epsilon)$  принимает вид

$$(2.2) \quad q_0 = -k_1 \int_s^{\infty} h_{\varphi 0}^2 ds - k_2 \int_s^{\infty} h_{\theta 0}^2 ds.$$

Для этого случая приведем уравнения пограничного слоя для плоской задачи, считая координату  $\varphi$  длиной дуги вдоль свободной границы:

$$(2.3) \quad \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial t_1} + H_{\xi 2} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} + h_{\varphi 0} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 h_{\varphi 0}}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_{\xi 2}}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} = - \frac{\partial \sigma(t, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad H_{\xi 2} = 0 \quad (s = 0),$$

$$h_{\varphi 0} = h_{\xi 2} = 0 \quad (s = \infty), \quad H_{\xi 2} = h_{\xi 2} + \nu_2 \mathbf{n} |_{\Gamma}.$$

Здесь  $s = \frac{\xi}{\varepsilon}$  — растянутая переменная;  $h_{\varphi_0}$ ,  $h_{\xi_2}$  — продольная и поперечная компоненты вектора скорости в пограничном слое;  $\dot{h}_{\xi_0} = 0$ .

Учитывая, что коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  зависит только от координаты  $\varphi$  и медленного времени  $t$ , не связанного с вязкостью, рассмотрим те из решений задачи (2.3), которые не зависят от быстрого времени  $t_1$ , т. е.  $h_{\varphi_0} = h_{\varphi_0}(s, \varphi, t)$ . В [4] доказана однозначная разрешимость краевой задачи, которая получается из (2.3) при  $\partial h_{\varphi_0} / \partial t_1 = 0$  и где  $t$  — параметр. Таким образом, вектор-функция  $\mathbf{h}_0(s, \varphi, t)$  определяет поле скоростей в квазистационарном пограничном слое.

3. Функции  $\mathbf{v}_1$ ,  $p_0$ ,  $\xi_0$ , определяющие невязкое течение вне пограничного слоя и асимптотическую форму свободной границы, получаются применением первого итерационного процесса [7] к системе (1.1), (1.2). Обозначим через  $\Gamma_0$  свободную границу невязкого течения. Вблизи  $\Gamma_0$  введем подвижные локальные ортогональные координаты  $\xi_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\theta_1$  ( $\xi_1$  — расстояние до  $\Gamma_0$ ). Главные кривизны поверхности  $\Gamma$  представим в виде рядов  $k_i = k_{i0} + \varepsilon^{1/2} k_{i1} + \dots$  ( $i = 1; 2$ ) ( $k_{i0}$  — главные кривизны поверхности  $\Gamma_0$ ). Подставляем разложения (1.3) в систему (1.1), (1.2) и учитываем, что  $\mathbf{h}_0 = \dot{\mathbf{h}}_1 = q_0 = q_1 = \theta_0 = 0$  вне пограничного слоя. Приравнявая нулю коэффициенты при  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon$ , выводим краевую задачу для  $\mathbf{v}_1$ ,  $p_0$ ,  $\xi_0$ , которую приведем в размерном виде

$$(3.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1, \nabla) \mathbf{v}_1 = -\rho^{-1} \nabla p_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0,$$

$$p_0 = \rho g \xi_0 + \sigma (k_{10} + k_{20}) + q_0|_{s=0} + p_*, \quad (x, y, z) \in \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + v_{x0} \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + v_{y0} \frac{\partial \xi_0}{\partial y} = v_{z0} \quad (z = \xi_0).$$

Так же как и для задачи (1.1), (1.2), начальные условия для (3.1) не задаются, так как далее изучаются лишь малые колебания, определяемые системой (3.1).

Таким образом, действие касательных напряжений на свободной границе маловязкой жидкости приводит к появлению в динамическом краевом условии предельного невязкого течения (3.1) дополнительных членов  $q_0$  (формула (2.2)), зависящих от поля скоростей в пограничном слое, главных кривизн и касательной нагрузки.

4. Рассмотрим задачу о малых колебаниях жидкости вблизи некоторого стационарного решения. Стационарная задача о движении жидкости при неравномерном нагреве свободной границы для больших чисел Марангони приведена в [5], где найдено уравнение свободной поверхности

$$(4.1) \quad (k_1 + k_2) \sigma + k_1 \int_0^{\infty} h_{\varphi_0}^2 ds + k_2 \int_0^{\infty} h_{\theta_0}^2 ds = \rho g z + c.$$

Уравнения малых колебаний при нестационарном нагреве получают линейризацией краевой задачи (3.1), причем уравнение свободной границы следует линейризовать вблизи поверхности (4.1). Отметим, что в [5] даны примеры расчета свободной поверхности  $\Gamma_c$  по формуле (4.1). Обозначим через  $\Gamma_t$  нестационарную близкую к  $\Gamma_c$  поверхность. На каждой из этих поверхностей введем параметризацию. Пусть  $N$  — расстояние по нормали к  $\Gamma_c$ , тогда в локальных координатах  $N = N(\varphi, \theta, t)$  — уравнение  $\Gamma_t$  ( $\varphi, \theta$  — параметризация поверхности  $\Gamma_c$  в момент времени  $t$ ). Линейризацию динамического краевого условия в (3.1) проводим, используя формулы, связывающие кривизны и длины дуг по главным направлениям для близких поверхностей [8]. Ввиду громоздкости задача о малых колебаниях вблизи трехмерной криволинейной поверхности (4.1) не приводится. Предположим, что внешнее невязкое течение безвихревое, тогда, определив потенциал скоростей  $\Phi$  соотношением  $\mathbf{v}_1 = \nabla \Phi$  из (3.1), выводим, что функция  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа, а давление  $p_1$  легко исключается из (3.1). Приведем в размерной форме краевую за-

дачу о малых колебаниях капиллярной жидкости вблизи плоской поверхности  $\Gamma_c$ :

$$(4.2) \quad \Delta\Phi = 0, \\ -\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho g N + \sigma \Delta N + \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \int_0^\infty h_{\varphi_0}^2 ds + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \int_0^\infty h_{\theta_0}^2 ds = 0 \quad (z = 0), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad (z = 0), \quad \nabla\Phi = 0 \quad (x^2 + y^2 + z^2 = \infty).$$

Рассмотрим плоскую задачу о колебаниях жидкости вблизи горизонтальной поверхности ( $z = 0$ ) при заданном неравномерном нагреве свободной границы  $T = T_* + ALf(x, t)$  ( $f(x, t)$  — безразмерная температура). Коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = \sigma_0(1 - \lambda f(x, t))$ , где  $\lambda = |\sigma_T|AL/\sigma_0 \geq 0$ . Считая  $\sigma$  положительным, предположим, что для некоторых  $t$  коэффициент  $\sigma$  может обращаться в нуль в точке максимума температуры. Это приводит к условию  $0 \leq \lambda \leq (\max_{x,t} f)^{-1}$ . Используем аналог известного соотношения [5], которое справедливо в данном случае:

$$\int_0^\infty h_{\varphi_0}^2 ds = \sigma(x, t) - \sigma(x_0, t) + \int_0^\infty f_0^2 ds$$

( $f_0 = h_{\varphi_0}|_{x=x_0}$  — профиль скорости в сечении  $x = x_0$ ). Теперь запишем динамическое краевое условие задачи (4.2) для плоского случая в виде

$$(4.3) \quad \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho g \zeta_0 - \sigma_0(1 + \lambda f(x_0, t) - 2\lambda f(x, t)) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь учтено, что за начало системы координат выбрана точка максимума температуры, в которой  $f_0 = 0$ . Последнее соотношение легко доказывается, так как в окрестности максимума строится автомодельное решение для пограничного слоя Марангони [2].

Далее, предположим, что нагрев свободной границы задан локально, поэтому функцию  $f$  представим в виде  $f = f(x/\delta, t)$  ( $\delta \ll 1$  — малый параметр). К задаче (4.2) с учетом (4.3) применяем метод осреднения по координате  $x$  [9]. Вводим медленную переменную  $x_1 = x/\delta$  и разлагаем функции  $\Phi$ ,  $\zeta_0$  в ряды по степеням параметра  $\delta$ . Задача для главных членов асимптотических разложений приводится к системе (4.2), в которой динамическое краевое условие следует заменить соотношением

$$\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho g \zeta_0 - \sigma_0(1 + \lambda f_c(t)) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = 0,$$

где  $f_c = f(0, t)$  — значение температуры в точке максимума. Отметим, что последняя формула получается также и тогда, когда температуру свободной границы задать дельта-функцией и учесть, что система уравнений пограничного слоя имеет точное решение  $h_{x_0} = 6k_t^2 x^{-1/2} \text{ch}^{-2}(k_t s x^{-1/3})$  ( $k_t$  — параметр).

Предполагая, что жидкость заполняет полупространство  $z \leq \zeta(x, t)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ , решение задачи находим явно:

$$\Phi = B'(t) \exp(kz) \cos(kx), \quad \zeta_0 = kB(t) \cos(kx).$$

Амплитуда колебаний удовлетворяет уравнению

$$(4.4) \quad B'' + [gk + k^3 \sigma_0 \rho^{-1}(1 + \lambda f_c(t))]B = 0$$

( $k$  — волновое число).

Допустим, что нагрев свободной границы не зависит от времени ( $f_c \equiv 1$ ), тогда уравнение (4.4) описывает гармонические колебания  $B = B_0 \exp(i\omega t)$  с частотой

$$\omega = \sqrt{gk + k^3 \sigma_0 (1 + \lambda) \rho^{-1}}.$$

В этом случае термокапиллярный эффект приводит к увеличению частоты колебаний.

При температуре свободной границы, линейно растущей со временем  $f_c = 1 + bt$ , уравнение (4.4) имеет решение, выражающееся через функции Бесселя  $J_{1/3}$ ,  $Y_{1/3}$ :

$$B = \sqrt{\tau} \left[ c_1 J_{1/3} \left( \frac{2}{3} \tau^{3/2} \right) + c_2 Y_{1/3} \left( \frac{2}{3} \tau^{3/2} \right) \right],$$

$$\tau = [\rho g k + (1 + \lambda) k^3 \sigma_0 + \lambda b \sigma_0 t] / (\lambda \rho^{1/2} k^3 \sigma_0).$$

Действие термокапиллярного эффекта сводится к гашению малых колебаний.

Рассмотрим малые колебания при локальном нагреве с периодически изменяющейся по времени температурой  $f_c = a - b \cos(2\Omega t)$ , где  $|b| < a$ . Уравнение (4.4) приводится к известному уравнению Матье, для которого известны области устойчивости и неустойчивости [10]. Анализ решений показывает, что амплитуда колебаний может неограниченно возрастать, затухать или периодически изменяться со временем в зависимости от значений параметров. Отметим, что колебания всегда растут при  $b \neq 0$  и  $\lambda > 0$ , удовлетворяющих соотношению  $\rho g k + \lambda k^3 \sigma_0 = \rho \Omega^2 m^2$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ).

5. Рассмотрим задачу о малых колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде бесконечной глубины при нагреве свободной границы по гармоническому закону, задавая коэффициент поверхностного натяжения в виде  $\sigma = \sigma_0(1 - \lambda f(x))$ ,  $f(x) = \cos(\pi x/l)$  ( $0 \leq x \leq 2l$ ). Здесь  $0 \leq \lambda \leq 1$ , при  $\lambda = 1$  коэффициент  $\sigma$  обращается в нуль при  $x = 0$  и  $x = 2l$ . Обозначим  $2l$  и  $2L$  размеры сторон сосуда по осям  $x$  и  $y$ . В данном случае наибольшего значения температура достигает на линии контакта свободной и твердой границ. Задача о малых колебаниях приводится к уравнению Лапласа для потенциала  $\Phi$  с краевыми условиями на невозмущенной горизонтальной поверхности  $\Gamma_c$ :

$$-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho g \zeta_0 + \sigma_0(1 + \lambda F(x)) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \sigma_0(1 - \lambda f(x)) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} \quad (z = 0), \quad F = 1 - 2f(x).$$

На твердых стенках выполняется условие непротекания

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, x = 2l), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, y = 2L).$$

Решение задачи представим в виде рядов Фурье

$$(5.4) \quad \Phi = \cos \frac{\pi n y}{2L} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp(k_{m,n} z) \cos \frac{\pi m x}{2l} \cos \omega t,$$

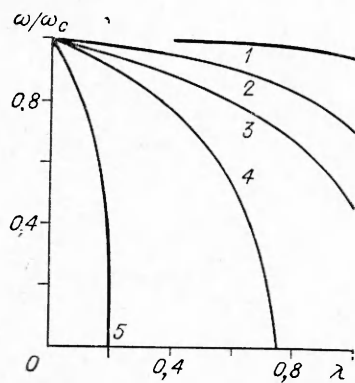
$$\zeta_0 = \cos \frac{\pi n y}{2L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{m,n}}{\omega} A_m \cos \frac{\pi m x}{2l} \sin \omega t, \quad k_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{2L}\right)^2}, \quad n=0,1,2,\dots$$

Случай  $n = 0$  соответствует плоской задаче о колебаниях в канале со стенками, параллельными оси  $y$ .

Отметим, что при отсутствии градиента температуры ( $\lambda = 0$ ) собственные частоты находятся явно:

$$\omega = \omega_c = \sqrt{g k_{m,n} + \sigma_0 k_{m,n}^3 / \rho}.$$

В общем случае частоты колебаний удовлетворяют трансцендентному уравнению и при  $\lambda > 0$  найдены численно. В рядах Фурье удержаны первые четыре гармоники, что позволило вычислить частоты  $\omega$  с тремя значащими цифрами. На рисунке приведен график первой собственной частоты, отнесенной к  $\omega_c$ , в зависимости от амплитуды температуры  $\lambda$  при



$n = 1$  и  $l = L$ . Кривые 1 — 5 отвечают числам Бонда  $Bo = \rho g l^2 / \sigma_0$ , равным 10, 1, 0, -1, -1,8. При фиксированном числе Бонда частоты колебаний монотонно убывают с ростом температуры. Случай  $Bo = 0$  отвечает условиям невесомости. С ростом  $Bo$  частоты увеличиваются при фиксированном  $\lambda$  и  $\omega \rightarrow \omega_c$  при  $Bo \rightarrow \infty$ .

Частоты колебаний рассчитаны и в случае  $f(x) = \cos(\pi x/l)$  при  $-l \leq x \leq l$ , т. е. когда температура достигает минимального значения на линиях контакта  $x = \pm l$  свободной и твердой границ. Теперь собственные частоты монотонно увеличиваются с ростом

амплитуды температуры и монотонно убывают при возрастании  $Bo$ . Нагрев свободной границы увеличивает значение  $\omega$ .

Приведем формулы, определяющие частоты колебаний в прямоугольном сосуде, когда нагрев свободной границы задан дельта-функцией  $f(x) = \lambda \delta(x) + \lambda \delta(l-x)$  ( $0 \leq x \leq l$ ):

$$(5.2) \quad \omega^2 = g k_{m,n} \left[ 1 + \left( \frac{\pi m}{2l} \right)^2 \frac{\sigma_0}{\rho g} (1 + \lambda) + \left( \frac{\pi n}{2L} \right)^2 \frac{\sigma_0}{\rho g} \right], \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Коэффициент  $k_{m,n}$  приведен в (5.1). Случай  $\lambda = 0$  соответствует отсутствию градиента температуры. Усиление нагрева  $\lambda > 0$  увеличивает собственные частоты. При нагреве по закону  $f(x) = \lambda \delta(x - l/2)$  в формуле (5.2) коэффициент  $\lambda$  следует заменить на  $-\lambda$ . Теперь усиление нагрева уменьшает частоты колебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Napolitano L. G. Marangoni boundary layers // Proceedings of III European Symposium on Material Science in Space.— Grenoble, 1979.
2. Napolitano L. G., Golia C. Coupled Marangoni boundary layers // Acta Astronautica.— 1981.— V. 8, N 5—6: Special issue. Applications of space developments: Selected papers from the 31st Intern. Astronaut. Congr., Tokyo, 1980.
3. Рачкович В. В. Boundary layers near free surfaces // Computational and asymptotic methods for boundary and interior layers.— Dublin: Bool Press, 1982.
4. Кузнецов В. В. О существовании пограничного слоя вблизи свободной границы // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Спб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1984.— Вып. 67.
5. Батищев В. А. Асимптотика неравномерно нагретой свободной границы капиллярной жидкости при больших числах Марангони // ПММ.— 1989.— Т. 53, вып. 3.
6. Потетюнок Э. Н., Срубщик Л. С. Асимптотический анализ волновых движений жидкости со свободной границей // ПММ.— 1970.— № 5, вып. 34.
7. Вишик М. А., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Усп. мат. наук.— 1957.— Т. 12, № 5(77).
8. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна.— М.: ОНТИ, 1935.
9. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов.— М.: Наука, 1984.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.— М.: Наука, 1979.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 24/IX 1991 г.