ПМТФ, № 4, 1990

УДК 533.951

С. А. Трушин, М. М. Хапаев, Г. В. Шолин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ К АНАЛИЗУ УСЛОВИЯ ВМОРОЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЭЛЕКТРОННУЮ ЖИДКОСТЬ

В теории плазмы важное место занимает двухжидкостная магнитогидродинамическая модель [1—3]. Особенно полезной такая модель оказывается при исследовании движений плазмы в скрещенных $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ полях. Для этого случая имеется достаточно надежное обоснование применимости гидродинамических уравнений и получен ряд решений для нелинейных волновых движений. Большинство решений нелинейных уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики основано на использовании упрощающих предположений типа свойств квазинейтральности ($n_e = n_i$) или вмороженности ($n_e/B = \mathrm{const}$), справедливость которых, как правило, не анализируется. Достаточным критерием для справедливости приближения квазинейтральности считается выполнение неравенства $\mu \ll 1$ ($\mu = \omega_{Be}/\omega_{p_e}$, где $\omega_{Be} = |e|\, B_0/m_e c$ — электронная циклотронная, а $\omega_{p_e} = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m_e}$ — ленгмюровская частоты). В обратном предельном случае ($\mu \gg 1$) используют условие вмороженности.

Обращение к свойствам квазинейтральности, или вмороженности, позволяет понизить порядок системы дифференциальных уравнений. При этом неизбежно отбрасываются члены с малыми параметрами при старших производных. С математической точки зрения попытка учета отброшенных членов означает внесение сингулярных возмущений, на что впервые было обращено внимание в [4, 5]. В [6—10] показано, что квазинейтральность нельзя считать универсальным свойством плазмы при $\mu \ll 1$: поле разделения зарядов может потерять устойчивость, и в плазме разовьются колебания, амплитуда которых соответствует почти полному разделению зарядов на масштабах, значительно меньших масштаба внешнего возмущения. Развившиеся стационарные колебания могут существенно повлиять на характер изменения медленных переменных, описывающих плазму [4, 6, 8]. Таким образом, детальный анализ уравнений для переменных с наименьшим масштабом изменения должен предшествовать как аналитическому, так и численному решению гидродинамических уравнений плазмы.

В настоящей работе методы теории сингулярно возмущенных систем применены для анализа свойства вмороженности электронов ($n_e/B = \mathrm{const}$) для плазмы, в которой $\mu \gg 1$. Основная цель — предложить математический аппарат, который позволил бы получать стационарные решения в том случае, когда условие вмороженности может не выполняться, а плотность и скорость электронов в направлении, перпендикулярном магнитному полю и направлению распространения волны, совершают колебания с частотой порядка электронной циклотронной.

Рассмотрим прямую магнитозвуковую волну конечной аплитуды. Будем описывать ее в рамках уравнений двухжидкостной бесстолкновительной магнитной гидродинамики, условием применимости которой является выполнение соотношения $l \gg \rho$ (l — характерный масштаб пространственного изменения гидродинамических величин, ρ — лармоpовский радиус электронов) [11]. Используем систему координат с осью Oz, направленной вдоль магнитного поля $\mathbf{B}$. Считаем, что все величины зависят только от координаты x, магнитозвуковая волна распространяется вдоль оси Ox. Решение волнового типа ищется зависящим от переменной $\zeta = x - ut$. Тогда система уравнений Максвелла вместе с уравнениями движения и непрерывности для электронов и ионов запишется как

(1) $$E_y = (u/c)(B - B_0);$$

(2) $$dE_x/d\zeta = 4\pi|e|(n_i - n_e);$$

(3) $$-\gamma^2 dB/d\zeta = 4\pi|e|(n_i v_{iy} - n_e v_{ey})/c;$$

(4) $$m_{e,i} n_0 u dv_{e,ix}/d\zeta = dp_{e,i}/d\zeta \pm |e| n_{e,i}(E_x + v_{e,iy}B/c);$$

(5) $$m_{e,i} n_0 u dv_{e,iy}/d\zeta = \pm|e| n_{e,i}(E_y - v_{e,ix}B/c);$$

(6) $$n_{e,i} = n_0 u/(u - v_{e,ix})$$

(n_0 и B_0 — невозмущенные значения плотности частиц и магнитного поля, $\gamma = \sqrt{1-(u/c)^2}$). В (1)—(6) предполагается, что в невозмущенном состоянии при $\zeta \to +\infty$ гидродинамические движения отсутствуют: $\mathbf{v}_{e,i}(+\infty) = 0$. Тем самым не учитываются отклонения от равновесия при $\zeta \to +\infty$, вызванные тепловыми шумами собственных колебаний плазмы. Как и в [11, 12], в уравнениях (1)—(6) пренебрегается явлениями, связанными с конечностью ларморовского радиуса заряженных частиц (магнитной вязкостью), поскольку $l \gg \rho$, а также столкновительным трением. Применяя к системе (1)—(6) процедуру, описанную в [8], сведем ее при $\mu \gg 1$ к следующей:

(7) $$(M\sqrt{\varepsilon/\mu})dY/d\xi = F(X, Y, b, Z)/Q(X, Y, b, Z);$$

(8) $$(M\sqrt{\varepsilon/\mu})dZ/d\xi = b - \tilde{n};$$

(9) $$M\sqrt{\varepsilon\mu}\,dX/d\xi = Y;$$

(10) $$(\gamma^2/M\sqrt{\varepsilon\mu})db/d\xi = Z(\tilde{n} + \varepsilon n) - Xn\varepsilon\mu^2,$$

где $\xi = \zeta\omega_{pe}^2/c\omega_{Be}$; $X = E_x/M\sqrt{\varepsilon\mu}B_0$; $b = B/B_0$; $n = n_i/n_0$; $\tilde{n} = n_e/n_0$ ($\tilde{n} = n - Y$); $M = u/v_A$ ($v_A{}^2 = B_0^2/4\pi n_0 m_i$); $\varepsilon = m_e/m_i$; $Q(X, Y, b, Z) = 1 - \beta\tilde{n}^2$; $\beta = T_e/m_e u^2$; $F(X, Y, b, Z) = -X[\tilde{n}^3 + \varepsilon Q(X, Y, b, Z)n^3(1 + b\varepsilon\mu^2)] - bZ[\tilde{n}^3 - \varepsilon^2 Q(X, Y, b, Z)n^3]$. При этом система (7)—(10) дополняется алгебраическим уравнением, связывающим переменные n и $\tilde{n}$ [8]:

(11) $$\varepsilon(1 - 1/\tilde{n}) + 1 - 1/n = (\tilde{n} - 1)\varepsilon\beta + [\gamma^2(b^2 - 1) - M^2\varepsilon\mu^2X^2]/2M^2.$$

При получении (7)—(11) сделано единственное допущение: $T_i = 0$, $T_e = \mathrm{const}$, причем в силу наложенных на систему (1)—(6) ограничений в дальнейшем считаем $\beta \ll 1$.

Решение системы (7)—(11) ищется для $\xi \to -\infty$ при дополнительных условиях. Для переменных b и X ставятся граничные условия в области $\xi \to +\infty$, куда еще не дошла магнитозвуковая волна: $b(+\infty) = 1$, $X(+\infty) = 0$. Что касается переменных Z и Y, то из физических соображений потребуем при $\xi \to +\infty$ только близости величин $Z(+\infty)$ и $Y(+\infty)$ к их равновесным значениям: $Z_{\text{равн}} = 0$ и $\tilde{n}_{\text{равн}} = b_{\text{равн}} = 1$. Более определенное их задание невозможно. В алгебраическом выражении (11), которое можно рассматривать как уравнение для плотности ионов, переходу к невозмущенному состоянию $n(+\infty) = 1$ при учете, что $\beta \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$, отвечает корень $n = 2M^2/[2M^2 + \gamma^2(1 - b^2) + M^2\varepsilon\mu^2X^2]$. Ограничимся случаем не слишком сильных волн, для которых число Альвена—Маха $M \leqslant 2{,}76$ [3] и явления «сгребания» или «отражения» ионов не возникают. При этом совокупность уравнений (7)—(11) с дополнительными условиями при $\xi \to +\infty$ относится к классу сингулярно возмущенных систем [13, 14], так как в системе (7)—(10) при производных имеются малые параметры $M\sqrt{\varepsilon/\mu} \ll M\sqrt{\varepsilon\mu} < 1$ (отметим, что $\mu \gg 1$, но в силу $u/c < 1$ $M\sqrt{\varepsilon\mu} < 1$).

Система (7)—(11) в общих чертах совпадает с соответствующими уравнениями из [4, 10], полученными для $\mu \ll 1$. В отличие от [4, 10] при $\mu \gg 1$, исходя из требования представительности системы (7)—(10) (возможность выразить быстрые переменные через медленные тогда, когда малый параметр формально устремляется к нулю [13, 14]), в качестве быстрой подсистемы с самым малым параметром при производных необходимо рассматривать уравнения для Y и Z, в то время как при $\mu \ll 1$

малый параметр при производных появлялся в уравнениях для X и Y. Второе принципиальное отличие от [4, 10] — уравнение для магнитного поля — отдельно не выделяется. Для записи анализируемых уравнений в стандартной форме [15] при условии ограниченности производных медленных переменных необходимо использовать переменную Z (10), а не $\alpha = db/d\xi$, как в [4, 6—10]*.

При анализе уравнений (7)—(11) методами теории сингулярно возмущенных систем [13, 14] необходимо прежде всего рассмотреть вырожденную систему, которая получается, если в (7)—(11) формально положить $M\sqrt{\varepsilon}/\mu = 0$ и считать $M\sqrt{\varepsilon\mu} \neq 0$:

$$F(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{b}, \bar{Z}) = 0, \ (Q(X, Y, b, Z) \neq 0); \tag{12}$$

$$\bar{\bar{n}} - \bar{b} = 0; \tag{13}$$

$$M\sqrt{\varepsilon\mu}d\bar{X}/d\xi = \bar{Y}; \tag{14}$$

$$(\gamma^2/M\sqrt{\varepsilon\mu})d\bar{b}/d\xi = \bar{Z}\bar{\bar{n}} - \bar{X}\bar{n}\varepsilon\mu^2; \tag{15}$$

$$\bar{n} = 2M^2/[2M^2 + \gamma^2(1 - \bar{b}^2) + M^2\varepsilon\mu^2\bar{X}^2]. \tag{16}$$

В (12)—(16) для простоты изложения опущены члены, содержащие параметр ε, так как $\varepsilon \ll M\sqrt{\varepsilon\mu} < 1$. Согласно (13), условию вмороженности отвечает переход от системы (7)—(11) к вырожденной системе (12)—(16), которая дает все известные результаты по структуре магнитогидродинамических ударных волн [12]. В самом деле, полагая $\bar{X} = -(d\varphi/d\xi)/ /M\sqrt{\varepsilon\mu}$ и учитывая, что $(u/c)^2 \ll 1$, из (12)—(16) легко вывести уравнение для φ:

$$d^2\varphi/d\xi^2 = \varphi + 1 - \bar{n}, \tag{17}$$

которое по внешнему виду совпадает с соответствующим уравнением из [12], полученным в предположениях $\mu \gg 1$, $u/c < 1$. Однако в (17) $\bar{n} \approx 2M^2/[1 + 2M^2 - (1 + \varphi)^2]$, в то время как в [12] из-за нереупрощения уравнения движения ионов их плотность выражается несколько иначе, что, впрочем, существенно не влияет на поведение функции $\varphi = = \varphi(\xi)$. Из анализа уравнения (17) следует, что при изменении ξ от $+\infty$ до $-\infty$ знак $\bar{X}$ меняется с $+$ на $-$ [12].

Возможность использования (12)—(16) вместо (7)—(11) зависит от асимптотической устойчивости присоединенной системы [13, 14] в окрестности выбранного корня ($\bar{Z} = \bar{Z}(\bar{X}, \bar{b})$; $\bar{Y} = \bar{Y}(\bar{X}, b)$). Запишем присоединенную систему

$$(M\sqrt{\varepsilon}/\mu)d\bar{\bar{Y}}/d\xi = F(\bar{X}, \bar{\bar{Y}}, \bar{b}, \bar{Z})/Q(\bar{X}, \bar{\bar{Y}}, \bar{b}, \bar{\bar{Z}}); \tag{18}$$

$$(M\sqrt{\varepsilon}/\mu)d\bar{\bar{Z}}/d\xi = \bar{b} - (\bar{n} - \bar{Y}), \tag{19}$$

в которой переменные $\bar{X}$ и $\bar{b}$ рассматриваются как параметры. Асимпто-

* Поведение быстрых переменных сказывается на характере изменения медленных [13, 14], которые, согласно процедуре решения сингулярно возмущенных уравнений [18], при осцилляторном характере изменения быстрых переменных заменяются на некоторые средние. В качестве быстрых естественно выбирать такие физические величины, которые могут быть измерены в эксперименте локально. В качестве медленных — те, которые измеряются усредненными. В этом случае результаты теории могут быть поставлены в соответствие эксперименту. Кроме того, если точка равновесия для быстрых переменных окажется неустойчивой [19], то при наличии ограничивающих кривых (только тогда можно построить решение) и возможного выхода решения на них система (7)—(10) должна остаться представительной [13, 14] и переменные, выбранные в начальный момент в качестве медленных, должны при выходе на ограничивающие кривые такими и остаться. Согласно [4, 7, 10], при $\mu \ll 1$ имеется особое многообразие $Q = 0$, которое, как было показано в [10], обладает притягивающими свойствами. Следовательно, выбор в качестве медленных переменных (b, α) неправомерен и нужно рассматривать переменные (b, Z). В результате критерий асимптотической устойчивости, полученный в [10] для выполнения условия квазинейтральности ($n_e = n_i$), выполнен при $Z > 0$, т. е. при $db/d\xi > 0$.

тическая устойчивость имеет место, если корни системы $F(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{b}, \bar{Z}) = 0$ и $\bar{b} - \bar{\bar{n}} = 0$, отвечающие точке равновесия $(\bar{Z} = \bar{Z}(\bar{X}, \bar{b}),\ \bar{Y} = \bar{Y}(\bar{X}, \bar{b}))$ присоединенной системы (18), (19), обладают при $\xi \to -\infty$ свойствами устойчивых узла или фокуса. Точка равновесия $(\bar{Z}, \bar{Y})$ оказывается центром. В связи с этим воспользуемся результатами [16], где условие асимптотической устойчивости системы (18), (19) заменяется условием устойчивости при дополнительном предположении о существовании и положительности среднего от производной функции Ляпунова (ищем решение при $\xi \to -\infty$), где среднее вычисляется вдоль интегральных кривых системы (18), (19). Введем в системе (7)—(10) медленную координату $\tau = \xi\mu/M\sqrt{\varepsilon}$ и сделаем замену переменных $Y = Y_0 + u$, $Z = Z_0 + v$, где $(Y_0; Z_0)$ — корень системы (12), (13). В результате с точностью до членов порядка $1/\mu^2$, ε и β получим

$$du/d\tau = -vb(b-u)^3 - \varepsilon n^3 X[1 - ((b-n)/b)^3] - (Y_0 + u)(dn/dX)/\mu^2 + (1 - dn/db)(-X/b + v)(b-u)(M^2\varepsilon/\gamma^2) - \beta v\Phi(u, b, X); \tag{20}$$

$$dv/d\tau = u + (Y_0 + u)/\mu^2 b - (M^2\varepsilon/\gamma^2)(X/b^2)(v - X/b)(b-u); \tag{21}$$

$$dX/d\tau = (n - b + u)/\mu^2; \tag{22}$$

$$db/d\tau = (M^2\varepsilon/\gamma^2)(v - X/b)(b-u). \tag{23}$$

Здесь $\Phi(u, b, X)$ — некоторая функция, конкретный вид которой неважен, так как в критерий устойчивости она, как будет видно в дальнейшем, не входит. Функцию Ляпунова $\mathscr{V}_0$ введем исходя из интеграла движения системы (20)—(23) в приближении $\varepsilon = \beta = 1/\mu^2 = 0$:

$$\mathscr{V}_0 = (b/2)v^2 - (b - 2u)/2(b-u)^2 + 1/2b.$$

Продифференцируем $\mathscr{V}_0$ в силу системы (20)—(23):

$$d\mathscr{V}_0/d\tau = \varkappa(u, v, b, X) \tag{24}$$

$$(\varkappa(u, v, b, X) = (Y_0 + u)v/\mu^2 - \beta v\Phi(u, b, X)u/(b-u)^3 - (\varepsilon M^2/\gamma^2)[v(X/b)(v - X/b)(b-u) + n^3X(b^3 - (b-u)^3)(u/(b-u)^3)/b^3M^2 + (n^2b - 1)(v - X/b)(b-u)(u/(b-u)^3) - XY_0n^2u/(b-u)^2M^2]).$$

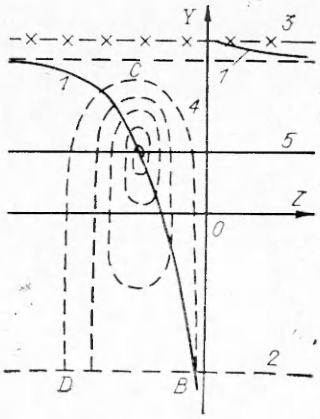
Выражение (24) получено в первом неисчезающем приближении с точностью до членов порядка ε, β и $1/\mu^2$. Согласно [16], решение системы (7)—(10) близко к решению системы (12)—(16) при выполнении неравенства

$$L = \int_0^T \varkappa(u, v, b, X)\, d\tau > 0 \qquad (T \gg 1). \tag{25}$$

Интеграл в (25) вычисляется при фиксированных b и X вдоль решения системы (20), (21). Приближенно найти L можно исходя из того, что точка покоя системы (18), (19) является центром, поэтому, полагая $u \approx |a|\sin\tau$, $v \approx -|a|\cos\tau$ ($|a|$ — амплитуда изменения быстрых переменных, причем $|a| \ll 1$), с точностью до членов $\sim a^2$ имеем

$$L = -(M^2\varepsilon/\gamma^2)(X/b)(a^2/2)(1 + 8M^4(bn+1)/nb). \tag{26}$$

Условие (25) гарантирует близость решения системы (7)—(10) к решению вырожденной системы (12)—(16), когда параметры $M\sqrt{\varepsilon}$ и $1/\mu$ имеют одинаковый порядок величины [16]. Согласно (25), (26), приближение вмороженности оправдано для $X < 0$ (из (12)—(16) следует, что это участок «спадания» b при $\tau \to -\infty$). При $X > 0$ это приближение, вообще говоря, может оказаться несправедливым и потребуется дополнительный анализ. На рисунке представлена фазовая плоскость (Z, Y), качественно отображающая основные особенности быстрой подсистемы (7), (8) при $\beta b^2 \ll 1$. По физическому смыслу движению по кривой $F(X, Y, b, Z) = 0$ (линия *1*) соответствует дрейфовый характер y-составляющей электронного тока. Кривая $Q(X, Y, b, Z) = 0$ определяет особое многообразие, на котором происходит перемена знака правой части уравнения для Y, на ней тепловой поток электронов сравнивается с гидродинамическим: $n_e v_{T_e} = n_0 u$ $\left(v_{T_e} = \sqrt{T_e/m_e}\right)$ и достигается максимально возможная синхронность колебаний частиц. Особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$ играет такую же роль в сингулярно возмущенных системах, как и устойчивые корни вырожденных уравнений [5]. Штриховая линия *4* на рисунке — траектория системы, *5* — линия, на которой выполнено условие вмороженности ($\tilde{n} = b$), линия *3* — $\tilde{n} = 0$.



Поскольку у вырожденной системы (12)—(16) нельзя указать других алгебраических корней, обладающих свойством устойчивости в области $X > 0$, к которым бы могло устремиться решение, необходим анализ на фазовой плоскости всех особенностей системы (7)—(10). Движение интегральной кривой подсистемы (7), (8) определяется тремя режимами в зависимости от соотношения между $M\sqrt{\varepsilon}$ и $1/\mu$. Вблизи положения равновесия движение описывается согласно теории, развитой в [16]. При удалении от точки (Y, Z) оно ограничено снизу особым многообразием $Q(X, Y, b, Z) = 0$ (кривая *2*). Если за время изменения медленных переменных (9), (10), когда знак X не меняется, интегральная кривая попадает на особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$, то в этом случае, согласно [5], движение происходит вдоль кривой *2*, согласно (8), где Y принадлежит $Q(X, Y, b, Z) = 0$. Однозначность поведения будет нарушена в точке пересечения кривых *2* и *1*, которая является седлом. После ее прохождения особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$ становится неустойчивым. Выбирая из физических соображений направление движения в сторону возрастания Y (так как при $Y \to -\infty$ $n_e \to \infty$), убеждаемся, что траектория совершит обход точки $(\bar{Y}, \bar{Z})$ и вновь попадет на кривую *2*, т. е. движение повторится. Из анализа фазового портрета системы, изображенной на рисунке, видно, что предельная траектория быстрой подсистемы (7), (8) не зависит от начальных возмущений и тем самым обладает устойчивостью. Действительно, если начальное значение удалено от $(\bar{Y}, \bar{Z})$ на значительное расстояние, например, находится в первом квадранте плоскости (Y, Z), то в направлении $Y \to +\infty$ движение запрещено, поскольку при $\tilde{n} \to \varepsilon^{1/3} n$ $(\tilde{n} = n - Y)$ в (7) величина $F(X, Y, b, Z)$ становится порядка ε. Движение вдоль OY при этом прекращается и может происходить только вдоль оси OZ до тех пор, пока интегральная кривая не пересечет кривую *1*. Затем движение пойдет в направлении $Y \to -\infty$ и интегральная кривая попадает на кривую *2*. Именно выход любой траектории на особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$ и движение вдоль него до точки пересечения с $F(X, Y, b, Z) = 0$ обеспечивают устойчивость предельной траектории. (Начальные значения должны располагаться на фазовой плоскости выше кривой *2*, поскольку ниже ее уравнения (1)—(6) недостаточны: там необходимо учитывать вязкие члены тензора давления.) Полученная картина изменения быстрых переменных близка к релаксационным колебаниям [17]. При этом осциллируют концентрация электронов $\tilde{n} = n - Y$ и y-составляющая скорости электронов: $v_{ey} \sim Z$. Нетрудно оценить период этих колебаний. Предельная траектория на плоскости (Y, Z) состоит из участка DB особого многообразия $Q(X, Y, b, Z) = 0$, вдоль которого она движется за характерное время T_1, и кривой BCD, охватывающей точку

$(\bar{Y}, \bar{Z})$, начинающейся от точки пересечения кривых *1* и *2* и попадающей на особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$ после обхода точки $(\bar{Y}, \bar{Z})$. Эту кривую система проходит за характерное время T_2. Используя (8) и учитывая, что $\zeta = x - ut$, оценим T_1 и T_2. При движении по участку BCD предельной траектории можно считать $\beta \tilde{n}^2 \ll 1$, поэтому из (18) и (19) в приближении $\varepsilon = 0$ имеем

$$dY^*/dZ^* = -\bar{b}Z^*(\bar{b} - Y^*)^3/Y^* \tag{27}$$

$$(Y^* = \bar{b} - \bar{n} + \bar{Y},\ Z^* = \bar{Z} + \bar{X}/\bar{b}).$$

Интегрируя (27) и полагая для простоты $\bar{b} \simeq 1$, получим

$$Z^{*2} + (Y^*/(1 - Y^*))^2 = A^2 \quad (A = \text{const}). \tag{28}$$

Из (28), ввиду того что $\bar{Y} < \bar{n}$, легко найти ограничение на $|A|$: $|A| < 1$. Отсюда следует, что при движении по предельной траектории на участке BCD (см. рисунок) $Y^* < 1/2$ и $Z^* < 1$, т. е. $n_e \geqslant B/2$, а максимальная амплитуда колебаний y-составляющей скорости электронов $|v_{ey}| \leqslant u$. В силу сказанного $T_2 \sim 1/\omega_{Be}$. При движении по участку DB $(\tilde{n} = 1/\sqrt{\beta} \gg 1$, где $\beta \ll 1)$ $\tilde{n} \gg b$, следовательно, $T_1 \sim v_{T_e}/u \times \times \omega_{Be}$. Так как $\beta \ll 1$, то $T_1 \ll T_2$, поэтому период возникающих колебаний $T = T_1 + T_2 \simeq 1/\omega_{Be}$.

Таким образом, при $\mu \gg 1$ имеем дело с «бунчировкой» электронов на ларморовском радиусе с раскачкой циклотронных колебаний релаксационного типа, поскольку движение вдоль особого многообразия в данном случае можно рассматривать как скачок y-составляющей скорости электронов при их неизменной концентрации. Следует подчеркнуть, что регулярные колебания на фронте волны при этом совершают плотность электронов и y-составляющая скорости электронов. Более сложным является промежуточный режим, когда при изменении медленных переменных (9), (10) знак X меняется до того, как интегральная кривая быстрой подсистемы (7), (8) успевает попасть на особое многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$. В этом случае она совершает движение в области между точкой равновесия $(\bar{Y}, \bar{Z})$ и предельной траекторией, не выходя на последнюю. Реализация такого движения происходит, по-видимому, когда между $M\sqrt{\varepsilon}$ и $1/\mu$ выполняется соотношение $M\sqrt{\varepsilon}\mu \ll 1$.

Поскольку быстрые переменные (Y, Z) меняются в ограниченной области, то, когда их изменение происходит вблизи точки равновесия $(\bar{Y}, \bar{Z})$ или осуществляется выход на предельную траекторию, в уравнениях для (X, b) можно проводить процедуру усреднения. В первом случае усреднение ведется в полном соответствии с [16]. Во втором имеется особенность, связанная с тем, что при попадании на многообразие $Q(X, Y, b, Z) = 0$ производные быстрых переменных не определены, так что гладкость правых частей в уравнениях для (X, b) отсутствует. Однако и здесь процедура усреднения может быть обоснована [18]. После усреднения уравнений для медленных переменных (9), (10) получим

$$M\sqrt{\varepsilon}\mu\, d\langle X\rangle/d\xi = \langle Y\rangle; \tag{29}$$

$$(\gamma^2/M\sqrt{\varepsilon}\mu)\, d\langle b\rangle/d\xi = \langle Zn\rangle - \langle ZY\rangle - \varepsilon\mu^2\langle Xn\rangle, \tag{30}$$

где $\langle A\rangle$ означает среднее значение A, причем $\langle A\rangle$ зависит от того, какой режим в зависимости от $M\sqrt{\varepsilon}$ и $1/\mu$ устанавливается в быстрой подсистеме (7), (8). Так как $\langle Y\rangle$, $\langle Zn\rangle$, $\langle ZY\rangle$, $\langle Xn\rangle$ — функции $\langle X\rangle$ и $\langle b\rangle$, то система (29), (30) описывает изменение новых медленных переменных $(\langle X\rangle, \langle b\rangle)$, которые близки к (X, b) в первом случае [16, 18]. Во втором решение системы (29), (30) может, однако, отличаться от решения системы (12)—(16) как масштабом изменения медленных переменных, так и функциональной зависимостью.

Таким образом, для исследования области применимости таких характерных свойств плазмы, как вмороженность и квазинейтральность, необходимо прибегать к теории сингулярных возмущений [13, 14]. Особенность гидродинамических уравнений плазмы как объекта теории сингулярно-возмущенных систем в том, что положение равновесия соответствующей присоединенной системы в нулевом приближении по малым параметрам оказывается, как правило, центром, и поэтому требуется более тщательный анализ его устойчивости, основанный на построении функций Ляпунова [16]. Осцилляторный характер изменения быстрых переменных требует обязательной процедуры усреднения при решении системы уравнений для медленных переменных [18]. При устойчивом характере движения быстрых переменных около положения равновесия средние значения медленных переменных не будут отличаться от тех, которые получаются при замене присоединенной системы на вырожденную. В случае неустойчивости, как показал анализ, проведенный в [10, 5] и в данной работе, быстрые переменные изменяются в ограниченной области фазового пространства, и даже в простейшей модели плазмы с «холодными» электронами $(v_{T_e} < u)$ и при пренебрежении эффектом конечного ларморовского радиуса можно указать предельную траекторию, на которую асимптотически выходит интегральная кривая быстрой подсистемы. Существование предельной траектории обеспечивается, в первую очередь, особым многообразием $Q = 0$, обладающим притягивающими свойствами [5]. Наличие особого многообразия не только гарантирует устойчивость предельной траектории для быстрых переменных, но и является определяющим при выборе медленных переменных, которые необходимо представлять в стандартной форме [15], чтобы процедура усреднения имела смысл и при выходе на $Q = 0$.

Анализ быстрых переменных уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики методами теории сингулярно-возмущенных систем позволяет асимптотически точно описывать нелинейные электростатические колебания, имеющие релаксационный характер [17, 19] благодаря существованию особого многообразия $Q = 0$. Изменение концентрации электронов и y-составляющей скорости электронов приобретает характер регулярных циклотронных колебаний релаксационного типа с довольно существенным изменением концентрации электронов, поэтому можно говорить о «бунчировке» как о конечной стадии колебательного процесса с предельными значениями концентрации электронов, определяемыми ограничивающими кривыми $Q = 0$ и $n_e = 0$.

В заключение авторы выражают признательность А. Н. Тихонову и В. Д. Русанову за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кадомцев Б. Б.** Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
2. **Сагдеев Р. З.** Коллективные процессы и ударные волны в разряженной плазме.— М.: Атомиздат, 1964.— Т. 4.
3. **Березин Ю. А.** Численные исследования нелинейных волн в разряженной плазме.— Новосибирск: Наука, 1977.
4. **Sholin G. V., Trushin S. A.** Stationary diviations from quasineutrality in plasma dynamics // Proc. XVII th Intern. conf. on phenomena in ionized gases, Budapest, Hungary, 1985.
5. **Хапаев М. М., Шолин Г. В.** Анализ гидродинамических уравнений плазмы методами теории сингулярных возмущений // ДАН СССР.— 1986.— Т. 286, № 3.
6. **Трушин С. А., Шолин Г. В.** Развитие ленгмюровских колебаний при движении плазмы поперек магнитного поля // ДАН СССР.— 1980.— Т. 255, № 5.
7. **Трушин С. А., Шолин Г. В.** Автоколебательный режим возбуждения стохастических электростатических волн при движении плазмы поперек магнитного поля // ДАН СССР.— 1981.— Т. 261, № 3.
8. **Трушин С. А., Шолин Г. В.** Автоколебательный режим возбуждения электростатических шумов и динамика диссипативных процессов на фронте поперечных магнитозвуковых волн конечной амплитуды.— М., 1981.— (Препр./АН СССР, ИАЭ; № 3449/6).

9. **Жданов С. К., Трубников Б. А.** Магнитозвуковой солитон разряжения и генерация ВЧ колебаний при динамическом развитии z-пинча // ЖЭТФ.— 1982.— Т. 83, № 6.
10. **Трушин С. А., Шолин Г. В., Хапаев М. М.** О характере изменения электрического поля разделения зарядов на фронте нелинейных магнитозвуковых волн // Физика плазмы.— 1988.— Т. 14, № 1.
11. **Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.** Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
12. **Лонгмайр К.** Физика плазмы.— М.: Атомиздат, 1966.
13. **Тихонов А. Н.** Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб.— 1952.— Т. 31(93), № 3.
14. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.
15. **Крылов Н. Н., Боголюбов Н. Н.** Новые методы в нелинейной механике.— Киев: ГТТЦ, 1934.
16. **Хапаев М. М.** О теореме А. Н. Тихонова для сингулярно возмущенных систем // ДАН СССР.— 1983.— Т. 271, № 5.
17. **Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.** Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М.: Наука, 1975.
18. **Хапаев М. М.** О методе усреднения и некоторых задачах, связанных с усреднением // Дифференц. уравнения.— 1966.— Т. 2, № 5.
19. **Андронов А. А., Витт А. В., Хайкин С. З.** Теория колебаний.— М.: Наука, 1977.

г. Москва *Поступила 8/II 1988 г., в окончательном варианте — 20/II 1989 г.*

УДК 537.521+621.391.821

Е. А. Зобов, А. Н. Сидоров

СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МОЛНИИ И СКОЛЬЗЯЩЕЙ ИСКРЫ

Разряд молнии носит случайный и неконтролируемый характер, и получение экспериментальных данных о нем связано с определенными трудностями. Многие результаты получают при лабораторном изучении длинных искр [1, 2], которые иногда используют для моделирования молнии при испытаниях уязвимости топливных систем и электронного оборудования самолетов к воздействию атмосферного электричества [3]. Естественно, воздействие на аппаратуру можно моделировать любым разрядом с подходящим током, однако в модельных испытаниях для определения вероятного удара молнии [4, 5] ценность подобных испытаний зачастую сомнительна [6], поскольку молнии и длинные искры различаются многими характеристиками.

По нашему мнению, практически единственным видом разряда, процесс пробоя в котором наиболее близок к молнии и происходит с образованием ступенчатого лидера, является скользящая искра (СИ). Причины, почему эти несопоставимые по масштабам явления подчиняются примерно одинаковым закономерностям, исследованы пока недостаточно. Создание теории или моделей сильноточной стадии молнии [7, 8] затруднено из-за отсутствия начальных условий развития ее канала разряда. Разработка экспериментальной модели молнии, каковой может быть СИ на стадии пробоя, представляется полезным для понимания процессов пробоя в молнии.

Цель данной работы — сравнительное сопоставление электрических полей СИ и молнии, генерируемых развивающимся лидерным процессом, а также сопоставление на этой основе последующих стадий пробоя. Данные о молнии взяты из литературы, исследования СИ в основном выполнены авторами.

Каждый импульс молнии начинается со слабосветящегося предразряда, который получил название лидерного процесса [1, 2, 9, 10]. Чаще всего лидер движется от облака к земле отдельными ступенями, характерная длина которых около 50 м. В конце каждой ступени лидер останавливается на время около 50 мкс, а затем проходит следующую ступень, поэтому его часто называют ступенчатым. После замыкания разрядного промежутка (РП) облако — земля по создавшемуся проводящему каналу от земли к облаку развивается так называемый возвратный удар (главный или обратный разряд), формирующий яркий светящийся искровой канал. После некоторой паузы распространяется второй (стреловидный) лидер и второй возвратный удар.

Существующие теории ступенчатого лидера не дают ясной качественной картины происходящих процессов. Многие исследователи ([10] и цитируемая литература) считают несомненным, что необнаруживаемые световые процессы: стример-пилот, который движется непрерывно со скоростью, равной эффективной скорости распространения ступенчатого лидера, коронный разряд с вершины лидера, радиальные токи короны, вследствие которых канал лидера окружен оболочкой из коронного разряда с радиусом в несколько метров, первичные и вторичные стримеры,— все эти процессы пред-