УДК 533.9:51

# АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*А. М. Волчек, А. П. Напартович*

*(Москва)*

Описание многих физических систем сводится к решению системы двух нелинейных уравнений параболического типа. Такими системами могут быть электронно-дырочная плазма полупроводников и слабоионизованная газовая плазма, неравновесные сверхпроводники, а также ряд химических и биологических объектов, свойства которых определяются автокаталитическими реакциями.

При потере устойчивости в этих системах происходит образование сложных неоднородных структур. Мы рассмотрим конкретную задачу о развитии ионизационно-перегревной неустойчивости в самостоятельном разряде, описываемом уравнением баланса заряженных частиц плазмы и уравнением теплового баланса. Механизм этой неустойчивости связан с уменьшением плотности газа, вытекающего при постоянном давлении из перегретой области, и происходящим вследствие этого ростом электронной температуры (см., например, [1]). Для понимания нелинейной стадии этого процесса представляют интерес автомодельные зависимости для локальных значений плотности заряженных частиц и температуры газа, являющиеся решениями соответствующих уравнений баланса. В [2] изучена ионизационно-перегревная неустойчивость в высокочастотном поле и в пренебрежении теплопроводностью газа, а также рекомбинацией зарядов получено автомодельное решение, описывающее взрывное развитие проводимости в контрагирующем разряде. В данной работе исследуются автомодельные решения пары уравнений параболического типа в условиях самостоятельного тлеющего разряда. Полученные решения могут представить интерес для целого ряда физических систем.

Пусть между двумя электродами, расположенными на расстоянии $L$ друг от друга, зажжен электрический разряд. Предполагая его однородным вдоль тока, воспользуемся уравнениями баланса для плотности заряженных частиц $n$ и температуры газа $T$:

$$\partial n/\partial t - D_a \Delta n = \nu_i n - \beta n^2; \tag{1}$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} - \chi\frac{1}{T}\Delta T = \frac{\sigma E^2}{c_p p}. \tag{2}$$

Здесь $D_a$ и $\chi$ — соответственно коэффициенты амбиполярной диффузии и температуропроводности; $\nu_i$ — частота ионизации электронным ударом; $\beta$ — константа диссоциативной рекомбинации; $c_p$ — приведенная теплоемкость газа; $\sigma = e^2 n/m\nu_m$ — проводимость разрядной плазмы, которая в пренебрежении электрон-электронными столкновениями пропорциональна плотности электронов. При написании (1), (2) предположено, что время выравнивания давления мало по сравнению с характерным временем развития неустойчивости. Это возможно, если давление не увеличивается во времени из-за наличия большого балластного объема.

Частота ионизации — обычно резко растущая функция параметра $E/N \sim ET$ ($N$ — плотность газа). В условиях газового разряда частот используют аппроксимацию [1] $\nu_i = A\exp(-Bp/ET)$, где $A$, $B = \mathrm{const}$.

Для относительно малого изменения величин $\Delta E/E_0$, $\Delta T/T_0$ можно взять разложение этого выражения

$$\nu_i = \nu_{i0}\exp[C(\Delta T/T_0 + \Delta E/E_0)], \tag{3}$$

причем $C = Bp/E_0T_0 \gg 1$. Остальные коэффициенты зависят от поля и температуры слабо, так что их изменением пренебрегается.

При заданной внешним источником с ЭДС $\varepsilon$ напряженности электрического поля $E_0 = \varepsilon/L$ для безразмерных величин $u = \Delta T/T_0$, $v = n/n_0$ имеем систему уравнений ($n_0$, $T_0$ — значения плотности электронов и температуры газа)

$$\partial v/\partial t - D_a\Delta v = \nu_{i0} v \exp(Cu) - \beta v^2; \tag{4}$$

$$\partial u/\partial t - \chi\Delta u = \nu_н v \tag{5}$$

($\nu_н^{-1} = c_p p/\sigma(n_0) E_0^2$ — время нагрева нейтрального газа).

Если стенки, ограничивающие разряд в поперечном направлении, расположены достаточно далеко, так что теплоотводом в них можно пренебречь, то однородное решение системы (4), (5) описывает медленно растущие во времени величины $u$ и $v$. При слабой обратной связи через внешнюю цепь на этом фоне возможен гораздо более быстрый взрывной рост неоднородных возмущений. Математически похожая ситуация возникает при распространении тепла в средах, содержащих распределенные нелинейные источники [3—5]. При этом оказывается, что начальные возмущения могут сосредоточиться в шнур, где температура становится как угодно большой за конечное время.

Развитие таких возмущений подчиняется определенным автомодельным зависимостям. Ищем решение системы (4), (5) в виде

$$u = \frac{\psi(\tau) - \ln[(t_0 - t)\nu_{i0}]}{C}; \tag{6}$$

$$v = \frac{\varphi(\tau)}{C\nu_{\text{н}}(t_0 - t)}, \tag{7}$$

где $t_0$ — момент взрыва; $\tau = x/2\sqrt{D_{\text{а}}(t_0 - t)}$ — автомодельная переменная. Здесь и далее рассматривается одномерный случай, когда все величины изменяются вдоль поперечной току пространственной переменной $x$. Все результаты остаются справедливыми и в цилиндрической геометрии с осью, совпадающей с положением образующегося токового шнура.

Функции $\varphi$ и $\psi$ удовлетворяют системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\varphi + \frac{\tau}{2}\varphi' - \frac{\varphi''}{4} = \varphi e^{\psi} - k\varphi^2; \tag{8}$$

$$1 + \frac{\tau}{2}\psi' - \varkappa\frac{\psi''}{4} = \varphi. \tag{9}$$

Система содержит параметры $\varkappa = \chi/D_{\text{а}}$ и $k = \beta n_0/\nu_{\text{н}}C$, величина которых определяет относительную роль теплопроводности и объемной рекомбинации. В тлеющем разряде первый из них мал. Полагая $\chi$ приблизительно равным коэффициенту молекулярной диффузии, получим $\varkappa \simeq T/T_e \simeq 3\cdot 10^{-2}$. Параметр $k$ при сделанных выше предположениях не зависит от $n_0$ и для конкретного сорта газа есть функция от аргумента $E/N$. Оценки показывают, что она может быть как больше единицы, так и меньше. Например, для азота при $E/N = 6\cdot 10^{-16}$ В·см$^2$ имеем $k \simeq 10$, а для гелия при $E/N = 10^{-16}$ В·см$^2$ — $k \simeq 0{,}1$.

Рассмотрим некоторые особенности решений системы (8), (9), имеющих физический смысл при любом значении $\tau$. Наиболее простой вид уравнения принимают при $\varkappa = k = 0$. В этом случае их порядок можно понизить на единицу, для чего умножим первое из уравнений на $\tau$ и найдем его первый интеграл, подставив значение $\varphi$ из второго. В итоге

$$\psi'' - 2\tau\psi' + 4(e^{\psi} - 1) = \text{const}/\tau^2. \tag{10}$$

Для решений уравнения (10), ограниченных при $\tau = 0$, следует положить $\text{const} = 0$. Кроме того, должно выполняться условие

$$\varphi \to 0 \text{ при } |\tau| \to \infty, \tag{11}$$

поскольку $\varphi > 0$ при любом $\tau$. Автомодельные решения такого рода описывают развивающийся токовый шнур, плотность электронов в котором гораздо больше, чем в однородной плазме.

В [3—5] исследовались симметричные решения уравнения, аналогичного (10), при этом авторы исходили из степенной зависимости мощности нелинейных источников от температуры. Такой же вид имела и температурная зависимость частоты ионизации в [2]. В данном случае различие между обоими подходами носит формальный характер, поскольку при $C \gg 1$ и небольшом изменении $T$ несущественно различие между экспонентой и степенной функцией $\nu_i = \nu_{i0}(T/T_0)^C$. Согласно указанным работам, условие (11) определяет задачу на нахождение собственной функции; такая функция существует и притом единственна.

Так как (10) не содержит параметров, то значения $\psi(0)$ и $\Delta\tau$ (ширины шнура) должны быть порядка единицы. При больших $\tau$ функции $\psi$ и $\varphi$ имеют асимптотики $\psi \simeq -2 \ln \tau$, $\varphi \simeq 1/\tau^2$. Это означает, что температура газа и плотность электронов вдали от шнура не зависят от времени:

$$T \simeq T_0 \left(-\frac{2}{C}\right) \ln \frac{x}{2\sqrt{\frac{D_a}{\nu_{i0}}}}, \quad n \simeq n_0 \frac{4D_a}{x^2 \nu_н}.$$

Величина полного тока в шнуре растет со временем как $(t_0 - t)^{-1/2}$. В общем случае $\varkappa \neq 0$, $k \neq 0$ понизить порядок системы (8), (9) не удалось. Однако оказалось возможным выяснить характер отдельных решений и провести качественные оценки.

О монотонности поведения функций $\varphi$ и $\psi$ можно судить по их поведению вблизи «положения равновесия» $\varphi_0 = 1$, $\psi_0 = \ln(1 + k)$. Так же как и в [4], найдем, что для малого отклонения функции $\psi$ $(\psi_1 = \psi - \psi_0)$, удовлетворяющего линеаризованной системе (8), (9), существует единственное решение, не растущее экспоненциально при $|\tau| \to \infty$:

$$\psi_1 \sim \tau^2 - (1 + k\varkappa)/2(1 + k). \tag{12}$$

Это дает основания предположить, что, хотя при $\varkappa \neq 0$ порядок системы выше, собственная функция, удовлетворяющая условиям (11), остается единственной, а все новые решения, появляющиеся с повышением порядка, имеют нефизическую асимптотику $\psi \sim \exp(\tau^2/\varkappa)$ при $|\tau| \to \infty$. Решение (12) приближенно описывает поведение собственной функции вблизи максимума и позволяет оценить ширину шнура. Полагая в (12) $\psi_1 = 0$, найдем

$$\Delta\tau = \left[\frac{1 + k\varkappa}{2(1 + k)}\right]^{1/2}.$$

Условия конкретной системы определяют различный вклад процессов переноса в образование шнура. При $k\varkappa \ll 1$ следует пренебречь теплопроводностью. Тогда $\Delta\tau \simeq (1 + k)^{-1/2}$, $\psi(0) \simeq 1 + \ln(1 + k)$. Внутри шнура, если $k \gg 1$, ионизация уравновешивается рекомбинацией, а размер определяется диффузией. При $k\varkappa \gg 1$, $k \gg 1$ значение $\Delta\tau$ определяется теплопроводностью и имеет порядок $\sqrt{\varkappa}$. Плотность электронов и температура газа при этом связаны локально, $\varphi = (1/k)e^{\psi}$, а функция $\psi$ удовлетворяет уравнению, аналогичному (10). В условиях газового разряда $\varkappa \ll 1$, как правило, $k\varkappa \ll 1$.

Оценим время взрывного развития неустойчивости. При начальной ширине шнура $\Lambda$, равной расстоянию между стенками (для определенности $\Lambda = 1$ см), коэффициенте диффузии $D_a = 10^3$ см$^3$/с и $k = 10$ получим $t_0 \simeq \Lambda^2/4D_a k = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ с.

Рассмотрим эффективность отрицательной обратной связи между плотностью электронов и их температурой, осуществляемой за счет балластного сопротивления в цепи разряда. Предположим электроды бесконечно мелко секционированными, а каждую секцию — присоединенной к источнику тока через отдельное балластное сопротивление. Обратная связь при этом локальна и количественно описывается уравнением внешней цепи

$$\sigma E R_б + EL = \varepsilon, \tag{13}$$

где $R_б$ — величина удельного балластного сопротивления, пересчитанная на единицу площади. Достаточно рассмотреть небольшие изменения электрического поля, которые, согласно (13), линейно связаны с плотностью электронов:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{\sigma(n_0) R_б}{L} \frac{n - n_0}{n_0} = -\alpha(v - 1).$$

Решения системы (1), (2) не будут иметь взрывного характера, если частота ионизации перестанет резко зависеть только от температуры газа. Согласно (3), (6), (7), это произойдет при $\nu_н(t_0 - t) \simeq \alpha$. В этот момент в максимуме неоднородности $n = n_0 + n_0/\alpha C$.

Если считать, что шнур появляется при $n = 2n_0$ ($n_0$ — плотность электронов однородного фона), то для проявления взрывного характера неустойчивости критическим оказывается значение $\alpha_к \sim 1/C$ (отношение удельного балластного сопротивления к удельному сопротивлению разряда); оно определено в пределе бесконечного секционирования электродов. В реальной ситуации в общем случае имеется интегральная связь между полем и током разряда [6], поэтому следует ожидать более высоких значений $\alpha_к$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Райзер Ю. П.** Основы современной физики газоразрядных процессов.— М.: Наука, 1980.
2. **Ким А. В., Фрайман Г. М.** О нелинейной стадии ионизационно-перегревной неустойчивости в высокочастотном разряде высокого давления.— Физика плазмы, 1983, № 3.
3. **Змитренко Н. В., Самарский А. А. и др.** Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла.— ДАН СССР, 1976, т. 227, № 2.
4. **Змитренко Н. В., Самарский А. А. и др.** Горение нелинейной среды в виде сложных структур.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 6.
5. **Курдюмов С. П.** Локализация тепла в нелинейной среде. Препринт № 39.— М.: ИПМ, 1976.
6. **Напартович А. П., Старостин А. Н.** Механизмы неустойчивости тлеющего разряда повышенного давления.— В кн.: Химия плазмы/Под ред. Б. М. Смирнова. М.: Атомиздат, 1979, вып. 6.


*Поступила 5/II 1985 г.*

---

УДК 533.6.011.8

# О ВОЗМОЖНОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ ИНВЕРСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ВРАЩАТЕЛЬНЫХ УРОВНЯХ АЗОТА В ПОТОКЕ РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ ГАЗА

*Н. Б. Бондаренко, А. И. Луковников*

(*Москва*)

Исследованию кинетики релаксации заселения системы вращательных уровней молекул в струе свободно расширяющегося из звукового сопла газа посвящен ряд теоретических работ [1—3]. Однако сложность задачи построения согласованных по точности моделей релаксации и столкновений, а также трудности решения получаемой в результате системы кинетических и газодинамических уравнений приводят к необходимости использования существенных приближений. Некоторое расхождение экспериментальных данных и результатов расчетов [1, 2] требует проведения оценки точности различных используемых приближений и дальнейшего усовершенствования теоретических моделей. В отличие от [1] с целью выявления возможного взаимного влияния неравновесного энергообмена между степенями свободы молекул азота и изменения газодинамических параметров представленный ниже расчет основан на численном решении самосогласованной системы кинетических и газодинамических уравнений для заселенностей вращательных состояний, температуры, плотности и скорости газа в струе. При этом использованы столкновительные вероятности вращательных переходов, рассчитанные с учетом дальнодействующей части потенциала взаимодействия между молекулами [4].

**Уравнения для описания релаксации в потоке молекулярного газа.** Рассмотрим образование неравновесного распределения в системе вращательных уровней свободно расширяющегося из звукового сопла молекулярного азота. При расширении газа из щели или сопла поступательная температура его быстро уменьшается. Внутренняя энергия расширяющегося газа за это время релаксирует не полностью, что приводит к нарушению равновесного распределения по степеням свободы молекул. Имея в виду