УДК 532.5: 533.6

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ПРОФИЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А. И. Зобнин

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 644099 Омск
E-mail: alzobnin@mail.ru

Решена нестационарная кинематическая задача для произвольного плоского движения профиля в идеальной несжимаемой жидкости с образованием одного и двух вихревых следов. Задача решалась методом конформного отображения области течения на внешность круга, при этом анализировались особенности решения в окрестности острой кромки и учитывалась начальная асимптотика решения. Установлено, что результаты расчетов хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными по визуализации картины течения. Показана необходимость корректного моделирования начальной стадии формирования вихревых следов. Установлено, что регулярная картина течения формируется по истечении трех и более периодов колебаний.

Ключевые слова: профиль, плоская задача, идеальная жидкость, вихревой след.

При решении задач обтекания профилей идеальной несжимаемой жидкостью широко применяется метод конформных отображений. При этом в общем случае произвольного закона движения контура картина течения может быть построена тем же способом, что и в работе [1]. Однако, как отмечено в [1], при использовании этого способа даже для простейших законов движения профиля требуется ряд громоздких выкладок. Наиболее просто задача решается в случае поступательного движения [2–6]. В [1] также приведено предложение, облегчающее получение эффективных выражений для решения в случае, когда учитывается вращение. Тем не менее даже после упрощения конкретная реализация при организации численного расчета не является простой.

В настоящей работе предлагается решение задачи обтекания профилей с образованием вихревых следов, моделируемых тангенциальными разрывами поля скоростей, методом конформного отображения. Предложенный подход, в отличие от рассмотренного в [1], более удобен при численной реализации решения задачи, что особенно актуально, если движение профиля не является строго поступательным. Закон движения определяется перемещением фиксированного в некоторой связанной с профилем системе координат центра и поворотом обтекаемого контура неизменной формы вокруг выбранной точки.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское нестационарное течение идеальной несжимаемой жидкости вблизи профиля при условии отсутствия массовых сил и начальной завихренности (в этом случае имеет место теорема Томсона). Профиль движется в плоскости по произвольному закону из состояния покоя. Обтекание происходит с образованием вихревых следов в виде линий разрыва скорости, сходящих с острых и гладких кромок. Вне обтекаемого контура и линий разрыва течение считается потенциальным, скорости частиц жидкости — конечными.

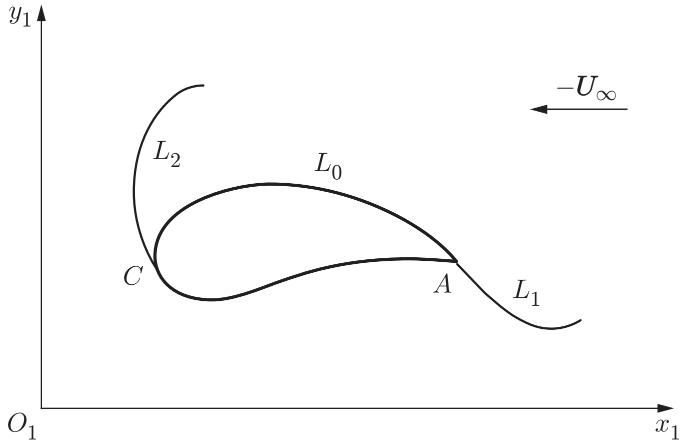


Рис. 1. Схема задачи

Введем неподвижную прямоугольную систему координат $O_1x_1y_1$, в бесконечно удаленной точке которой жидкость покоится. Предположим, что точки контура движутся со скоростью $-\boldsymbol{U}_\infty(x_1, y_1, t)$ (рис. 1).

Для определения скорости частиц жидкости $\boldsymbol{v}(x_1, y_1, t)$ сформулируем следующую начально-краевую задачу. Обозначим через L_0 контур профиля, через L_1 и L_2 — контуры следов (линий тангенциального разрыва скорости). Вне контура $L = L_0 + L_1 + L_2$ движение жидкости удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p$$

(ρ — плотность; p — давление), а также уравнению неразрывности и условию потенциальности:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0.$$

В точках контура L_0 должно выполняться условие непротекания

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{U}_\infty)\cdot\boldsymbol{n}_0 = 0 \quad \text{при} \quad (x_1, y_1) \in L_0(t),$$

на вихревых следах — условия отсутствия перепада давления:

$$[p] = 0 \quad \text{при} \quad (x_1, y_1) \in L_1(t), \quad (x_1, y_1) \in L_2(t)$$

и непрерывности нормальной к следу компоненты скорости жидкости:

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = v_n \quad \text{при} \quad (x_1, y_1) \in L_1(t), \quad (x_1, y_1) \in L_2(t),$$

а в бесконечно удаленной точке — условие затухания возмущенных скоростей

$$\lim \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{при} \quad (x_1, y_1) \to \infty.$$

Кроме того, в точках схода вихревых следов будем требовать выполнения постулата Чаплыгина — Жуковского

$$|\boldsymbol{v}| < \infty \quad \text{при} \quad (x_1, y_1) \to (x_{1A}, y_{1A}), \quad (x_1, y_1) \to (x_{1C}, y_{1C}).$$

В качестве начальных данных принимаются следующие условия:

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=0} = 0, \qquad \boldsymbol{U}_\infty\big|_{t=0} = 0, \qquad L\big|_{t=0} = L_0\big|_{t=0}.$$

В приведенных выше формулах $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{n}$ — единичные орты к L_0 и $L_1 + L_2$ соответственно; (x_{1A}, y_{1A}), (x_{1C}, y_{1C}) — координаты точек схода; v_n — скорость движения точек следа в направлении нормали.

Сформулированная начально-краевая задача разделяется на две: 1) краевая задача Римана — Гильберта об определении поля скоростей в каждый момент времени [2]; 2) задача Коши для интегродифференциального уравнения движения точек вихревых следов.

1.1. *Формулировка задачи Римана — Гильберта.* Рассмотрим профиль и вихревые следы в некоторый фиксированный момент времени $t > 0$ в комплексной плоскости $z_1 = x_1 + iy_1$ (см. рис. 1). Пусть контуры следов L_1, L_2 с направлениями обхода от точки схода к свободному концу и их интенсивности известны. Тогда для комплексной скорости частиц жидкости $\bar v(t, z_1)$ можно сформулировать краевую задачу о построении вне контуров L_0, L_1, L_2 функции $\bar v(t, z_1)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) $\bar v(t, z_1)$ — аналитическая функция комплексной переменной z_1;

2) жидкость не проникает через контур L_0 (условие непротекания):

$$\operatorname{Re}[n_0(\zeta)\,\bar v(\zeta)] = -\operatorname{Re}[n_0(\zeta)\,\bar U_\infty], \qquad \zeta \in L_0$$

($n_0(\zeta)$ — комплексная форма записи единичного орта нормали к L_0; $-\bar U_\infty$ — комплексная скорость точек профиля);

3) комплексная скорость $\bar v(t, z_1)$ имеет заданный скачок γ на линиях L_1, L_2:

$$\bar v^+(\zeta) - \bar v^-(\zeta) = \gamma(\zeta), \qquad \zeta \in L_1 + L_2$$

($\bar v^+$, $\bar v^-$ — предельные значения $\bar v(t, z_1)$ при подходе к контуру L_1 или L_2 справа и слева соответственно);

4) комплексная скорость $\bar v(t, z_1)$ затухает на бесконечности:

$$\bar v(t, z_1) \to 0 \quad \text{при} \quad |z_1| \to \infty;$$

5) функция $\bar v(t, z_1)$ всюду конечна в области своего определения (в том числе выполняется условие Чаплыгина — Жуковского):

$$|\bar v(t, z_1)| < \infty;$$

6) циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру, охватывающему профиль и вихревые следы, равна нулю (выполняется теорема Томсона):

$$\Gamma_0 = 0$$

(Γ_0 — циркуляция скорости вокруг контура $L = L_0 + L_1 + L_2$).

Задача 1–6 является задачей Римана — Гильберта и допускает единственное решение, если заданы контур $L = L_0 + L_1 + L_2$ и скачок скорости γ [7].

1.2. *Задача Коши для интегродифференциального уравнения движения точек вихревого следа.* С учетом решения $\bar v(t, z_1)$ задачи Римана — Гильберта 1–6 и первого интеграла системы уравнений исходной задачи (интеграла Коши — Лагранжа)

$$p = p_\infty - \rho\Big[\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Re}\Big(\int\limits_{z_0}^{z_1} \bar v(z)\,dz\Big) + \frac{1}{2}\,v\bar v\Big]$$

из условия отсутствия скачка давления на контурах следов следует, что циркуляция Γ в точке вихревого следа, отсчитываемая от его свободного конца, сохраняется в точках, движущихся со скоростью $\bar v^0 = (\bar v^+ + \bar v^-)/2$. Здесь p_∞ — давление в бесконечно удаленной точке.

Если контур вихревого следа (L_1 или L_2) задать в параметрическом виде $\zeta = \zeta(t, \Gamma)$, то для определения движения его точек получим следующую задачу Коши для интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial\bar\zeta}{\partial t}(t, \Gamma) = \bar v^0(t, \zeta(t, \Gamma)), \qquad \zeta(t, \Gamma)\big|_{t=0,\Gamma=0} = \zeta^*(t)\big|_{t=0}.$$

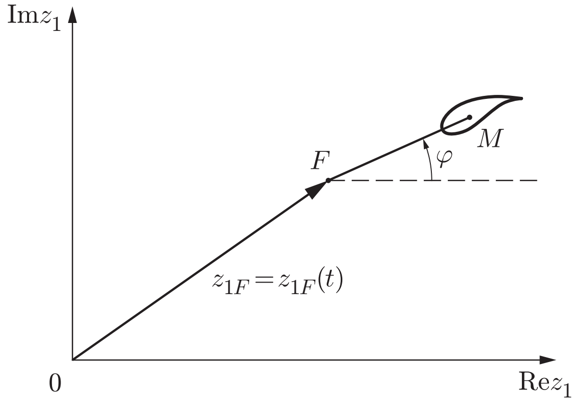


Рис. 2. Схема движения профиля

Здесь ζ^* — комплексная координата точки схода (L_1 или L_2). Решение сформулированной задачи Коши следует строить в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \Gamma \leqslant \Gamma^*(t)$, где $\Gamma^*(t)$ — значение циркуляции Γ в точке схода следа. Предполагается, что решение $\zeta(t, \Gamma)$ обеспечивает непрерывность $\bar{v}$ по z_1 во всей области течения вне L, непрерывность $\bar{v}$ по t вплоть до начального момента времени, а также конечность поля скоростей (в том числе выполнение условия Чаплыгина — Жуковского). Кроме того, потребуем, чтобы для каждого значения $t > 0$ вторая производная от функции $\Gamma(\zeta)$ принадлежала классу H^* в окрестности свободного конца следа и классу H на остальной его части [7].

2. Решение задачи. Пусть в комплексной плоскости $z_1 = x_1 + iy_1$, связанной с инерциальной декартовой системой координат $O_1x_1y_1$, в бесконечно удаленной точке которой жидкость покоится, в каждый момент времени задано движение некоторого центра F вращения профиля $z_{1F} = z_{1F}(t)$. Пусть также определен угол $\varphi(t)$ поворота профиля, отсчитываемый от действительной оси (рис. 2).

Предполагается, что известно конформное отображение внешности обтекаемого контура на внешность круга, лежащего в другой комплексной плоскости. В [1] получена формула для потенциала нестационарного течения при движении профиля с вращением в предположении, что отображение является рациональной функцией. В настоящей работе будем считать, что контур является профилем Кармана — Треффтца с параметрами a, h, d, δ, определяющими его хорду, искривление, толщину и угол острой кромки соответственно. Это означает, что в момент времени t можно ввести комплексную плоскость $\tilde{z}_2$ (рис. 3), такую что отображение

$$\frac{\tilde{z}_2 - \delta_1 a}{\tilde{z}_2 + \delta_1 a} = \left(\frac{\tilde{w}_2 - a}{\tilde{w}_2 + a}\right)^{\delta_1}, \qquad \delta_1 = 2 - \delta \tag{1}$$

будет переводить внешнюю по отношению к профилю область в этой плоскости на внешность круга в плоскости $\tilde{w}_2$. Оси $\operatorname{Re}\tilde{z}_2$, $\operatorname{Im}\tilde{z}_2$ образуют с осями $\operatorname{Re}\tilde{z}_1$, $\operatorname{Im}\tilde{z}_1$ угол φ. Точка M на рис. 2 соответствует точке $\tilde{z}_2 = 0$. Положение этой точки относительно профиля для каждого контура Кармана — Треффтца определено однозначно. После замены $\tilde{z}_2 = z_2\,\mathrm{e}^{-i\varphi}$, $\tilde{w}_2 = w_2\,\mathrm{e}^{-i\varphi}$ преобразование (1) переходит в отображение

$$\frac{z_2 - \delta_1 a\,\mathrm{e}^{i\varphi}}{z_2 + \delta_1 a\,\mathrm{e}^{i\varphi}} = \left(\frac{w_2 - a\,\mathrm{e}^{i\varphi}}{w_2 + a\,\mathrm{e}^{i\varphi}}\right)^{\delta_1}, \qquad \delta_1 = 2 - \delta, \tag{2}$$

которое переводит поворачивающийся на угол φ профиль в окружность, вращающуюся синхронно с ним вокруг начала координат (см. рис. 3).

Решение краевой задачи Римана — Гильберта удобно строить в плоскости w, оси которой параллельны осям $\operatorname{Re}w_2$, $\operatorname{Im}w_2$, а начало координат находится в точке $w_{2C}(t)$ —

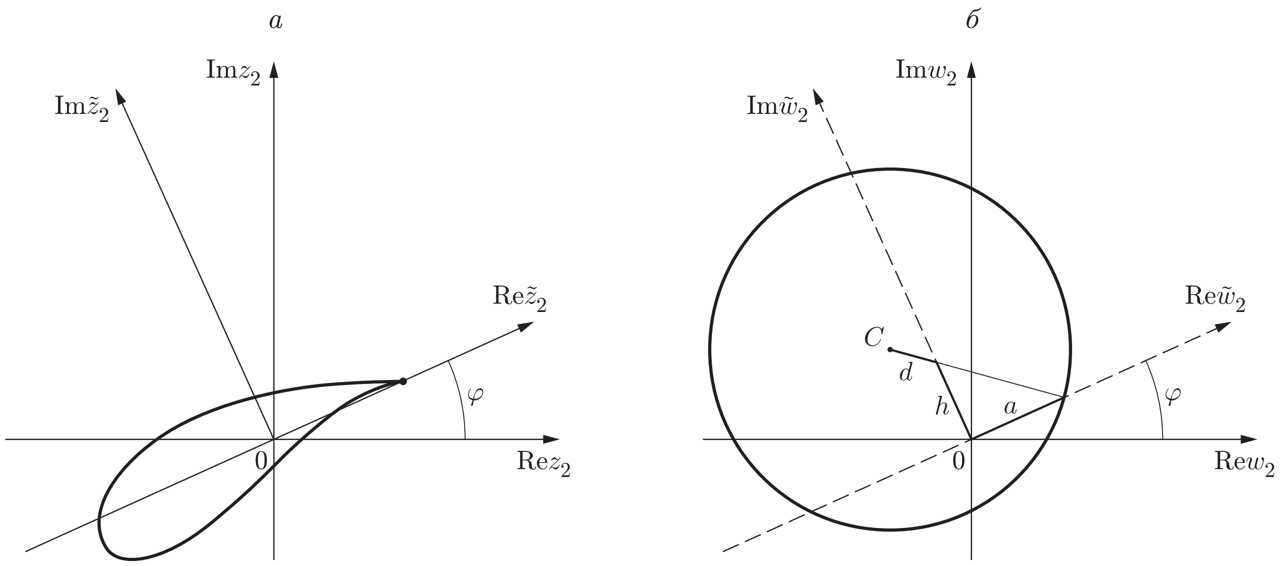


Рис. 3. Комплексные плоскости z_2 (*а*) и w_2 (*б*)

центре окружности C: $w = w_2 - w_{2C}(t)$. Область построения решения является канонической, что позволяет применить инверсию следов относительно окружности для получения функции в явном виде. Кроме того, решение остается потенциальным, поэтому потенциал как функция пространственной переменной w может быть найден в виде суммы потенциалов, один из которых индуцирован вихревыми следами.

Если точка схода следа является регулярной точкой отображения (в случае гладкой кромки), то условие 5 Чаплыгина — Жуковского (как и условия 1, 2), в плоскости w имеет тот же вид, что и в исходной плоскости z_1. В случае острой кромки конформность отображения нарушается, тип особенности зависит от типа кромки, и в плоскости w отображение должно иметь нуль соответствующего порядка в этой точке. Условие затухания на бесконечности (условие 4) преобразуется с учетом результатов анализа асимптотики производной отображения (2) на бесконечности. В силу того что при $z_2 \to \infty$ $\partial w_2/\partial z_2 = 1$, при переходе из плоскости z_2 в плоскость w_2 условие на бесконечности не изменяется:

$$-U_0 = -\frac{dz_{1F}(t)}{dt} + iz_* \,\mathrm{e}^{i\varphi}\,\varphi'.$$

Здесь z_* — комплексная координата z_2 центра вращения профиля в момент времени $t = 0$; штрих означает дифференцирование по времени. Так как центр C плоскости w вращается вокруг точки $w_2 = 0$ со скоростью $dw_{2C}(t)/dt = i\varphi' \,\mathrm{e}^{i\varphi}\, w_{2C}(0)$, условие на бесконечности в этой плоскости (условие 4) окончательно записывается в виде

$$-U_\infty = -\frac{dz_{1F}(t)}{dt} + i\varphi' \,\mathrm{e}^{i\varphi}(z_* - w_{2C}(0)).$$

Если в момент времени t заданы вихревые следы (их форма и интенсивность), то с учетом сказанного выше решение задачи Римана — Гильберта можно представить в виде [7]

$$\frac{\partial\hat\Phi}{\partial w} = (-\bar U_\infty) - \frac{R^2(-U_\infty)}{w^2} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1,2}\int\limits_0^{\Gamma_j^*}\Big(\frac{1}{\zeta_j - w} - \frac{1}{R^2/\zeta_j - w}\Big)\,d\Gamma_j. \qquad (3)$$

Здесь $\hat\Phi$ — потенциал в плоскости w; R — радиус окружности; ζ_j — текущая точка j-го следа; Γ_j, Γ_j^* — суммарные интенсивности j-го следа в точке ζ_j и во всем j-м следе соответственно.

Построенное для канонической области решение (3) позволяет получить решение исходной кинематической задачи. Для этого нужно учесть связь потенциала $\hat{\Phi}(w)$ плоскости w с потенциалом абсолютного движения $\Phi_1(z_1)$. Действительно, так как $\partial z_2/\partial t = \partial z_1/\partial t - U_0$ и $\partial\Phi_1/\partial z_2 = \partial\Phi/\partial z_2 + \bar{U}_0$, то уравнение для частиц жидкости

$$\frac{\partial \bar{z}_2}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} \tag{4}$$

можно записать в виде $\partial\bar{z}_2/\partial t = \partial\Phi/\partial z_2$. Потенциал Φ в плоскости z_2 можно выразить через потенциал в области w_2 с помощью производной отображения: $\partial\Phi/\partial z_2 = (\partial\Phi/\partial w_2)(\partial w_2/\partial z_2)$. В свою очередь решение в плоскости w_2 с потенциалом $\Phi(w_2)$ связано с потенциалом $\hat{\Phi}(w_2)$ формулой $\partial\Phi/\partial w_2 = \partial\hat{\Phi}/\partial w_2 + dw_{2C}/dt$. В последнем равенстве $\hat{\Phi}(w_2)$ совпадает с потенциалом $\hat{\Phi}(w)$ из (3), выраженным через переменную w_2. Таким образом, искомую связь потенциалов можно записать в виде равенства

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} = \bar{U}_0 + \frac{\partial w_2}{\partial z_2}\Big(\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial w} + \frac{dw_{2C}}{dt}\Big). \tag{5}$$

Соотношения (3), (5) определяют решение краевой задачи для функции комплексной скорости в исходных переменных. Решение (5) является достаточно простым и используется при численном решении задачи Коши для определения движения точек вихревого следа.

Уравнение задачи, описывающей эволюцию вихревых следов, следует из (3)–(5) и динамического условия на пелене:

$$\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial t} = \bar{U}_0 + \frac{\partial w_2}{\partial z_2}\Big(\frac{\partial\hat{\Phi}_0}{\partial w} + \frac{dw_{2C}}{dt}\Big). \tag{6}$$

Здесь $\partial\hat{\Phi}_0/\partial w$ — интеграл в смысле главного значения. Задача Коши для функций $z_1(t,\Gamma_j)$, $j = 1,2$ получается путем присоединения к (6) начальных данных состояния покоя и данных, соответствующих отсутствию вихревых следов. При этом следует рассматривать только те решения, которые удовлетворяют условию Чаплыгина — Жуковского. Это означает, в частности, что след и профиль должны иметь общую касательную в точках схода.

Сформулированная задача является нелинейной, так как для каждого следа граница области построения решения $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \Gamma_j \leqslant \Gamma_j^*$, $j = 1,2$ заранее неизвестна и подлежит определению наряду с построением искомых функций. Другой особенностью задачи является неустойчивость решения в смысле Адамара, что требует особой тщательности при моделировании начальной стадии формирования вихревых следов. Не рассматривая этот вопрос подробно, отметим, что развитый в работах [8–10] подход для различных типов кромок профилей в случае поступательного движения может быть распространен на случай произвольного плоского перемещения профиля.

С теоретической и практической точек зрения большое значение имеет характер соотношений, описывающих сход завихренности. Как показывают численные исследования (см., например, [2]), вклад вихревых следов играет определяющую роль в формировании сил, действующих на профиль. В свою очередь влияние ближайшего к точке схода участка следа, в частности его формы и интенсивности, на параметры следующей сходящей завихренности также существенно [2]. Сходимость интегралов в правой части (6) в особых точках сопряжения следов с обтекаемым контуром следует из характера изменения интенсивности вихревого следа вблизи кромки [10] и равенства кривизны вихревого следа в точке схода кривизне линии профиля.

Для поступательного закона движения соотношения для схода завихренности приведены в [2]. В рассматриваемом случае соотношения аналогичны с тем лишь отличием, что в плоскости w точки схода следов совершают дополнительное перемещение по окружности, соответствующее заданному закону поворота $\varphi(t)$. Например, постулат Чаплыгина — Жуковского для угловой кромки принимает вид

$$-2U_\infty \sin(\theta + \theta_1 - \varphi) - \varphi' a \cos\theta_1 + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{K_1, K_2} \Big(\frac{2\sigma_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + R^{-1} \Big)\, d\Gamma = 0.$$

Здесь $\theta = \arg(-U_\infty)$; $\theta_1 = \operatorname{arctg}(h/a)$; K_1, K_2 — контуры следов в области конформного отображения; σ_1, σ_2 — абсцисса и ордината декартовой системы координат с центром в точке сопряжения окружности и образа следа, сходящего с угловой кромки.

С учетом приведенных выше замечаний задача Коши для эволюции вихревых следов может быть решена численно с использованием различных способов интерполяции линий разрыва поля скоростей, таких как кусочные функции, точечные вихри и т. д. При этом о целесообразности проведения дискретизации следа с постоянной во времени интенсивностью каждой части разбиения свидетельствует сохранение суммарной завихренности элемента следа в процессе движения.

Решив задачу для уравнения (6), действующие на профиль силы можно найти интегрированием по его контуру давления, определяемого интегралом Коши — Лагранжа

$$-\frac{p}{\rho} = \operatorname{Re}\Big(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\Big|_{z_1=\mathrm{const}} \Big) + \frac{1}{2} \Big| \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} \Big|^2 + F(t).$$

Здесь $F(t)$ — произвольная функция времени; ρ — плотность. Комплексный потенциал абсолютного движения $\Phi_1(z_1)$ дифференцируется в абсолютной системе координат, связанной с плоскостью z_1. Однако для численной реализации целесообразно в формуле для давления перейти к пространственным переменным области конформного отображения и дифференцированию в невращающейся системе координат, связанной с центром окружности. В силу инвариантности производной в частице относительно преобразования системы координат при переходе от переменных z_1, t к переменным w, t выражение для давления преобразуется к виду

$$-\frac{P}{\rho} = \operatorname{Re}\Big(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\Big|_{w=\mathrm{const}} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} \Big) - \frac{1}{2} \Big| \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} \Big|^2 \Big| \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \Big|^2. \qquad (7)$$

В такой форме интеграл Коши — Лагранжа может быть использован при вычислении гидродинамических нагрузок. Входящие в правую часть (7) выражения для $\partial\Phi_1/\partial w$ и $\partial\Phi_1/\partial t$ получаются непосредственным дифференцированием потенциала Φ_1, который находится интегрированием уравнения (5) по переменной z_1. Для величины $\partial w/\partial t$ справедливо представление

$$\frac{\partial w}{\partial t} = wi\varphi' + \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \Big(\Big(\overline{\frac{\partial \Phi}{\partial w}} \Big) \Big(\overline{\frac{\partial w_2}{\partial z_2}} \Big) - z_2 i\varphi' \Big), \qquad (8)$$

которое следует из связи решения в физической плоскости и области конформного отображения

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - w_2 i\varphi' = \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \Big(\frac{\partial z_2}{\partial t} - z_2 i\varphi' \Big),$$

а также из уравнения движения следа $\partial z_2/\partial t = (\overline{\partial\Phi/\partial w})(\overline{\partial w_2/\partial z_2})$ и равенств $w_2 = w + \mathrm{e}^{i\varphi} w_{2C}(0)$, $\partial w_2/\partial t = \partial w/\partial t + i\varphi' \mathrm{e}^{i\varphi} w_{2C}(0)$. Если в (8) взять точку w на следе: $w = \zeta$ (что приведет к появлению интегралов в смысле главного значения), то по этой формуле можно будет найти скорости вихревых точек $\partial\zeta/\partial t$, которые появятся в выражении для $\partial\Phi_1/\partial t$. Следует отметить, что производная $\partial\Phi/\partial w$ в правой части (8) совпадает с производной $\partial\hat{\Phi}/\partial w$ в (3) с точностью до слагаемого dw_{2C}/dt.

Таким образом, интеграл Коши — Лагранжа (7) в совокупности с соответствующими представлениями входящих в него величин дает решение задачи об определении гидродинамических реакций на профиле. Получаемое в результате выражение для давления хотя и громоздко, но с точки зрения численного расчета просто и удобно. В заключение следует отметить, что разработанный способ применения метода конформных отображений к задаче обтекания произвольно движущегося профиля является эффективной основой для разработки алгоритмов расчета и проведения численных исследований. В настоящей работе расчеты для гидродинамических нагрузок не проводились.

3. Численное решение задачи. Численно решалась кинематическая задача обтекания профиля идеальной несжимаемой жидкостью с образованием одного и двух вихревых следов. Схема расчета в целом аналогична приведенной в работе [2]. Изменения обусловлены отмеченными в пп. **1, 2** обобщениями решения на случай произвольного закона движения профиля. Результаты расчетов с одним вихревым следом сравнивались с данными эксперимента по визуализации [11, 12].

На рис. 4 представлен профиль, совершающий чисто крутильные колебания вокруг точки $z_1 = 0$ с амплитудой $\varphi_0 = \pi/4$ в отсутствие набегающего потока.

Образование вихревых следов на гладкой и угловой кромках происходит аналогично, однако, как и в случае чисто поступательных колебаний, имеются некоторые отли-

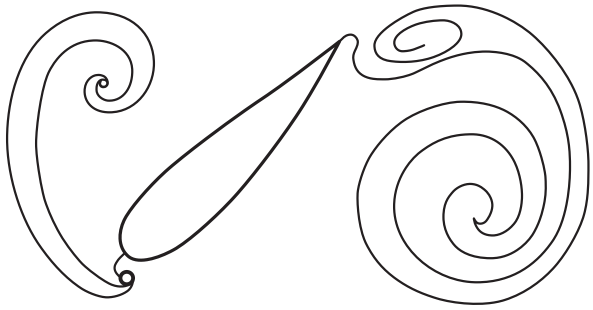
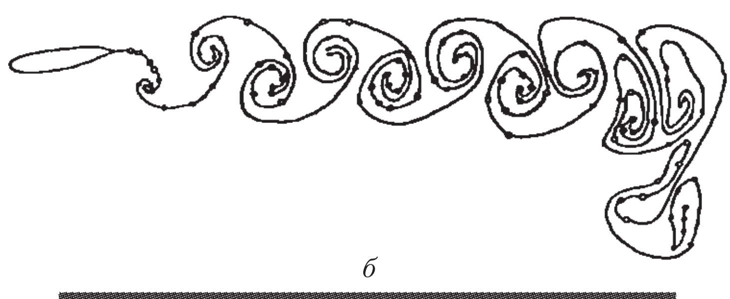


Рис. 4. Вихревые следы в случае чисто крутильных колебаний профиля

а



б

Рис. 5. Вихревые дорожки в случае крутильных колебаний профиля:
а — результаты расчетов; *б* — результаты визуализации

чия [2]. На рис. 5 приведены результаты расчетов и фотография вихревой дорожки в случае крутильных колебаний вокруг точки, отстоящей от передней кромки на расстояние, равное 1/4 хорды профиля b (амплитуда колебаний $\varphi_0 = 10^\circ$, скорость набегающего потока V_∞ составляет 0,86 хорды за период T, угол установки (среднее положение профиля) $\varphi_{00} = 0$, начальная фаза колебаний $\mu = 0$). В расчете $t = 6T$. Видно, что в течение первых двух периодов регулярная вихревая дорожка не формируется, это происходит по истечении трех и более периодов колебаний. Участок дорожки, соответствующий значению $t < 2T$, имеет выраженные следы, обусловленные выбором начальной фазы μ в виде бокового к направлению дорожки импульса, которые затем быстро исчезают.

Результаты проведенного сравнения свидетельствуют о достоверности расчета. В частности, в расчете с использованием заданных в эксперименте значений параметров дорожка действительно формируется, а не смешивается и не разрушается, как, например, при $t < 2T$. Кроме того, расчетная картина вихревых сгустков соответствует наблюдаемой в эксперименте.

Результаты проведенных численных исследований и сопоставлений с данными по визуализации позволяют сделать вывод, что разработанный способ решения кинематической задачи обтекания и созданный на его основе алгоритм расчета пригодны при различных формах и законах движения профилей для больших амплитуд, углов атаки и чисел Струхаля.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. **Зобнин А. И.** Расчет гидродинамических реакций на телесном профиле, колеблющемся в неподвижной жидкости // ПМТФ. 1989. № 5. С. 71–77.
3. **Graham J. M. R.** The lift and drag on an aerofoil in starting flow // J. Fluid Mech. 1983. V. 133. P. 413–425.
4. **Russel J. H., Chow C. Y.** Unsteady forces acting on a deforming Joukowski airfoil. S. l., 1986. (Paper / AIAA; N 0121).
5. **Graham J. M. R.** The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan — Carpenter numbers // J. Fluid Mech. 1980. V. 97. P. 331–346.
6. **Oshima Y., Oshima K.** Vortical flow behind an oscillating airfoil // Theor. and appl. mech.: Proc. of the 15th Intern. congr., Toronto, 1980. Amsterdam etc.: North-Holland Publ. Co, 1980. P. 357–368.
7. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
8. **Зобнин А. И.** Исследование начальной стадии отрывного обтекания кругового цилиндра // ПМТФ. 1983. № 5. С. 42–46.
9. **Зобнин А. И.** Моделирование начальной стадии развития вихревого следа за телесным профилем // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 60. С. 51–59.
10. **Зобнин А. И.** Исследование структуры вихревого следа за профилем с угловой кромкой в начальной стадии отрывного обтекания // Гидродинамика подводного крыла / Сиб. отд-ние АН СССР. Вычисл. центр. Препр. Новосибирск, 1986. С. 71–84.
11. **Freymuth P.** Propulsive vortical signature of plunging and pitching airfoils // AIAA J. 1988. V. 26, N 7. P. 881–883.
12. **Freymuth P., Jackson S., Bank W.** Toward dynamic separation without dynamic stall // Exp. Fluids. 1989. N 7. P. 187–196.

Поступила в редакцию 29/X 2007 г.,
в окончательном варианте — 20/II 2008 г.