

8. Дворников Н. А., Терехов В. И. О переносе импульса и тепла в турбулентном пограничном слое на криволинейной поверхности. — ПМТФ, 1984, № 3.
9. Рейнольдс А. Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. — М.: Энергия, 1979.
10. Волчков Э. П. Пристенные газовые завесы. — Новосибирск: Наука, 1985.
11. Волчков Э. П., Лебедев В. П., Шишкин Н. Е. Экспериментальное исследование газовой завесы в трубе. — Изв. СО АН СССР, 1983, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
12. Волчков Э. П., Спотарь С. Ю., Терехов В. И. Турбулентный массообмен в начальном участке трубы при закрутке потока. — В кн.: 6-я Всесоюз. конф. по тепломассообмену. Минск, 1980, т. 1, ч. 3.

Поступила 3/VI 1985 г.

УДК 669.18 : 532.529

О ДИНАМИКЕ ПОВЕДЕНИЯ ЗАРОДЫША ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ГЕТЕРОФАЗНЫХ СРЕДАХ

В. Н. Попов, А. Н. Черепанов

(Новосибирск)

Задача о поведении зародыша газовой фазы в гетерофазной среде имеет важное значение при изучении процесса формирования газоусадочной пористости в сплавах, кристаллизующихся в интервале температур [1—4], а также при исследовании динамических и массообменных явлений в газожидкостных системах, движущихся через дисперсно-пористые среды [5—8]. Общее решение такой задачи в условиях неоднородности температурных и концентрационных полей и наличия конвективных движений жидкой фазы представляет собой сложную математическую проблему. Поэтому ниже ограничимся упрощенной математической моделью роста зародыша газового пузырька в однородной квазиравновесной гетерогенной зоне бинарного сплава [9], обобщая полученное решение на случай роста пузырька газа в изотермической дисперсно-пористой среде, насыщенной жидкостью.

Рассмотрим кристаллизацию бинарного сплава, содержащего растворенный газ. Объем, занимаемый сплавом, считаем достаточно малым, так что внутренним термическим сопротивлением вещества можно пренебречь по сравнению с внешним и рассматривать кристаллизацию сплава как объемную. Усадочными явлениями при кристаллизации будем пренебрегать, полагая, что возникновение пузырька связано с вытеснением растворенных газовых компонентов растущей твердой фазой, а движение расплава вызвано изменением радиуса газового пузырька за счет диффузии газа из межкристаллитной жидкости. Считаем также, что плотность пара внутри пузырька по сравнению с плотностью газа пренебрежимо мала; расстояние между центрами пузырьков много больше размера d_1 дендритной (структурной) ячейки, а размер $2r_p$ самого пузырька столь мал, что можно не учитывать конвективную диффузию газа к поверхности пузырька за счет его подъема. Уравнения неразрывности и переноса импульса в сферической системе координат, связанной с центром пузырька, имеют вид [9]

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_l u) = 0;$$

$$(2) \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\mu f_l \ddot{r}_p}{K_p(f_l)} + \frac{\mu}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - 2u \right],$$

где u — скорость движения жидкости; f_l — сечение жидкой фазы (пористость); p — давление в жидкости; $K_p(f_l)$ — проницаемость гетерогенной зоны; ρ — плотность жидкости; μ — динамическая вязкость жидкости; r — координата. Уравнения (1), (2) надлежит проинтегрировать при граничных условиях на поверхности пузырька ($r = r_p$):

$$(3) \quad u = \dot{r}_p;$$

$$(4) \quad p = p_g - 2\sigma/r_p - 4\mu\dot{r}_p/r_p.$$

Здесь \dot{r}_p — скорость изменения радиуса пузырька; p_g — газовое давление

внутри пузырька. Примем, что вдали от пузырька ($r \rightarrow \infty$) концентрация легирующего C_1 и газового C_2 компонентов связана с сечением жидкой фазы f_l правилом Шейля [1]

$$(5) \quad C_i = C_{i0}/f_l^{1-k_i},$$

где k_i — коэффициент распределения i -го компонента. Пренебрегая влиянием растворенного газа, зададим температуру ликвидуса в виде линейной функции от концентрации C_1 : $T_l = T_A - \beta_{10}C_1$. Из условия квазиравновесия [1, 2] следует

$$(6) \quad T = T_A - \beta_{10}C_1.$$

Из (5) при $i = 1$ и (6) найдем

$$(7) \quad f_l = \left(\frac{T_A - T_{l0}}{T_A - T} \right)^{1/(1-k_1)},$$

где $T_{l0} = T_A - \beta_{10}C_{10}$.

Для определенности положим, что скорость охлаждения расплава $v_T = \partial T/\partial t = \text{const}$, так что

$$(8) \quad T = T_{l0} - v_T t.$$

Тогда из (7) с учетом (8) будем иметь

$$(9) \quad f_l(t) = [1 + (v_T/\Delta T_0)t]^{-1/(1-k_1)}, \quad \Delta T_0 = T_A - T_{l0}.$$

Интегрируя уравнения (1), (2) при граничных условиях (3), (4), получим

$$(10) \quad u = r_p^2 \dot{r}_p / r^2;$$

$$(11) \quad r_p \ddot{r}_p + \frac{3}{2} \dot{r}_p^2 + v \left[\frac{f_l r_p}{K_p(f_l)} + \frac{4}{r_p} \right] \dot{r}_p + \frac{2\sigma}{\rho r_p} = \frac{p_g - p_{c0}}{\rho}.$$

Здесь p_{∞} — давление вдали от пузырька, равное сумме давления газов над поверхностью расплава и металлостатического давления на уровне пузырька; $v = \mu/\rho$.

Распределение концентрации газовых компонентов в жидкости, окружающей пузырек, определяется уравнением конвективной диффузии [9], которое с учетом (9) и (10) запишем в виде

$$(12) \quad \frac{\partial C_2}{\partial t} + \frac{r_p^2 \dot{r}_p}{r^2} \frac{\partial C_2}{\partial r} = \frac{D_2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C_2}{\partial r} \right) + \frac{k^* v_T / \Delta T_0}{1 + v_T t / \Delta T_0} C_2, \quad k^* = \frac{1 - k_2}{1 - k_1}.$$

Это уравнение дополним начальными и граничными условиями

$$(13) \quad C_2|_{t=t_p} = C_{20}/f_{lp}^{(1-k_2)};$$

$$(14) \quad C_2|_{r \rightarrow \infty} = C_{20} (1 + v_T t / \Delta T_0)^{k^*},$$

где f_{lp} — сечение жидкой фазы в момент возникновения пузырька t_p , определяемый из условия

$$(15) \quad p_{gp}(t_p) = p_{\infty} + 2\sigma/r_p^*$$

(r_p^* — критический радиус пузырька). Давление газа в пузырьке связано с концентрацией насыщающего газа на поверхности пузырька в соответствии с законом Генри ($j = 1$) или Сивертса ($j = 2$):

$$(16) \quad C(r_p, t) = K_j p_g^{1/j}, \quad t \geq t_p.$$

Из соотношений (5), (15), (16) найдем

$$f_{lp} = [C_{20}/K_j (p_{\infty} + 2\sigma/r_p^*)^{1/j}]^{1/(1-k_2)},$$

а из (9) с учетом последнего выражения

$$(17) \quad t_p = \frac{\Delta T_0}{v_T} \{ [C_{20}^{-1} K_j (p_\infty + 2\sigma/r_p^*)^{1/j}]^{k^*} - 1 \}.$$

При получении выражения для f_{lp} и t_p предполагалось, что если расплав в исходном состоянии — недонасыщенный раствор газа, то в процессе роста кристаллов газовые компоненты из-за их слабой растворимости в твердой фазе вытесняются в окружающую их жидкость. Концентрация C_2 при этом растет в соответствии с законом (5), достигая в момент времени t своего значения насыщения. В этом случае возможно зарождение газового пузырька, характеризующегося равновесным (критическим) значением радиуса r_p^* . Граничное условие на поверхности пузырька следует из уравнения сохранения массы M газа внутри пузырька

$$(18) \quad \frac{dM}{dt} = FD_2 \Omega \left. \frac{\partial C_2}{\partial r} \right|_{r=r_p}.$$

Так как $M = (4\pi/3)r_p^3 \rho_g$, $F = 4\pi r_p^2$, а плотность ρ_g газа в пузырьке связана с давлением p_g уравнением состояния идеального газа $\rho_g = p_g/R_g T(t)$, то после несложных преобразований из (18) имеем

$$(19) \quad \left. \frac{\partial C_2}{\partial r} \right|_{r=r_p} = \frac{r_p/3}{D_2 \rho R_g T(t)} \left[\dot{P}_g + P_g \left(\frac{3\dot{r}_p}{r_p} + \frac{v_T}{T(t)} \right) \right].$$

Таким образом, задача сводится к решению системы (11), (12) с условиями (13), (14), (16), (19).

Наличие подвижной неизвестной границы $r_p(t)$ существенно усложняет задачу интегрирования уравнения конвективной диффузии. Поэтому перейдем к новой пространственной переменной

$$\xi = (r^3 - r_p^3)/3r_{p0}^3, \quad \xi \in [0, \infty),$$

где r_{p0} — начальный радиус пузырька, значение которого в общем случае может быть отличным от r_p^* . Выбрав в качестве масштабов для соответствующих физических величин r_{p0} , $t_0 = r_{p0}^2/D_2$, C_{20} , ΔT_0 , запишем (12) с условиями (13), (14), (16), (19) в безразмерном виде

$$(20) \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(R^3 + 3\xi)^{4/3} \frac{\partial C}{\partial \xi} \right] + \frac{k^* w}{1 + w\tau} C;$$

$$(21) \quad C(\xi, \tau_p) = (1 + w\tau_p)^{k^*};$$

$$(22) \quad C(\infty, \tau) = (1 + w\tau)^{k^*}, \quad \tau > \tau_p;$$

$$(23) \quad \left. \frac{\partial C}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{R\Theta(\tau)} \left\{ \frac{\dot{P}_g}{3} + \left[\frac{\dot{R}}{R} + \frac{w}{3\Theta(\tau)} \right] P_g \right\};$$

$$(24) \quad C(0, \tau) = \bar{K}_j P_g^{1/j}, \quad \Theta(\tau) = \Theta_A - 1 - w\tau, \quad \Theta_A = T_A/\Delta T_0,$$

где $C = C_2/C_{20}$; $R = r_p/r_{p0}$; $\tau = t/t_0$; $\bar{K}_j = K_j p_0^{1/j}/C_{20}$; $w = v_T t_0/\Delta T_0$; $P_g = p_g/p_0$; $p_0 = R_g \rho C_{20} \Delta T_0$. Выражение для P_g вытекает из (11):

$$(25) \quad P_g = P_\infty + K_\mu \left[\frac{f_j R}{K_{p1}(f_l)} + \frac{4}{R} \right] \dot{R} + \frac{K_\sigma}{R} + K_D (R\ddot{R} + 3\dot{R}^2/2).$$

Здесь $P_\infty = p_\infty/p_0$; $K_\mu = \mu/p_0 t_0$; $K_D = \rho(D/r_{p0})^2/p_0$; $K_\sigma = 2\sigma/r_{p0} p_0$; $K_{p1} = K_p/r_{p0}^2$.

Влияние переменного внешнего давления на эволюцию пузырька. Рассмотрим динамику поведения газового пузырька в гетерогенной области, когда диффузионными явлениями можно пренебречь, а давление p_∞ в жидкости меняется со временем как

$$(26) \quad p_\infty = p_\infty^0 - p_b \sin \omega(t - t_p).$$

Кроме того, положим, что газ внутри пузырька подчиняется адиабатическому закону

$$p_g = p_{g0} (r_{p0}/r_p)^{3\gamma}, \quad p_{g0} = p_\infty^0 + 2\sigma/r_{p0}$$

(γ — показатель адиабаты). В этом случае задача сводится к решению уравнения (11) с учетом (26) при начальных условиях $\dot{r}_p = 0$

$$(27) \quad r_p(0) = r_{p0}, \quad \dot{r}_p(0) = 0.$$

Здесь и далее отсчет времени будем вести от момента t_p ($t_1 = t - t_p$). Заметим, что (11) в отличие от известного уравнения Рэлея, кроме стокового сопротивления ($4\nu\dot{r}_p/r_p$), содержит дополнительное к нему слагаемое $\nu f_l r_p \dot{r}_p / K_p(f_l)$, характеризующее собой фильтрационное сопротивление и зависящее от K_p и f_l .

Считая далее форму кристаллов сферически-симметричной, определим проницаемость гетерогенной области согласно [10]

$$(28) \quad K_p = \xi_0 f_l^3 / (1 - f_l)^{4/3}, \quad \xi_0 = d_1^2 / 64.$$

Иследуем случай малых отклонений радиуса пузырька от его начального положения, полагая $p_v/p_\infty^0 \ll 1$. Пусть

$$r_p = r_{p0}(1 + \varphi), \quad |\varphi| \ll 1.$$

С точностью до членов первого порядка малости выражения (11), (27) с учетом (26) и последних соотношений примут вид

$$(29) \quad \ddot{\varphi} + \nu \left[\frac{f_l}{K_p(f_l)} + \frac{4}{r_{p0}^2} \right] \dot{\varphi} + \frac{3\gamma}{\rho r_{p0}^2} \left[p_\infty^0 + \frac{2\sigma(3\gamma - 1)}{3\gamma r_{p0}} \right] \varphi = \frac{p_v}{\rho r_{p0}^2} \sin \omega t_1,$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Уравнение (29) описывает вынужденные колебания системы с переменной диссипативной силой $\sim 2\delta = \nu [f_l(t)/K_p(f_l) + 4/r_{p0}^2]$. Поскольку $\delta > 0$, то колебания пузырька ограничены при $t_1 \rightarrow \infty$ [11]. При достаточно малых скоростях охлаждения ($v_T \ll \Delta T_0 \omega / 2\pi$) изменением величин f_l , $K_p(f_l)$ за время $t \leq 2\pi\omega^{-1}$ можно пренебречь, положив $f_l = f_{lp} = (1 + w\tau_p)^{-1/(1-k_1)}$, $K_p(f_{lp}) = K_{p0} = \text{const}$. В этом случае нетрудно получить оценку величины декремента затухания

$$(30) \quad \delta_0 = 2^{-1}\nu [f_{lp}/K_{p0} + 4/r_{p0}^2]$$

и собственной частоты пузырька

$$(31) \quad \omega_0 = \left\{ \frac{3\gamma}{\rho r_{p0}^2} \left[p_\infty^0 + \frac{2\sigma(3\gamma - 1)}{3\gamma r_{p0}} \right] - \delta_0^2 \right\}^{1/2}.$$

Эффективность внешнего воздействия на газовый пузырек зависит от близости частоты колебаний поля давления к собственной частоте пузырька. Используя соотношения (30), (31), приведем численные оценки величин δ_0 и ω_0 для сплава Fe + C, задавая $r_{p0} = 10^{-5}$ м, $f_{lp} = 0,5$, $K_{p0} = 10^{-11}$ м², $\gamma = 1,4$, $p_\infty^0 = 1,1 \cdot 10^5$ Н/м². Физические параметры сплава примем равными: $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\rho = 7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\sigma = 1,8$ Н/м. Выполнив соответствующие вычисления, найдем $\delta_0 \simeq 4,5 \cdot 10^4$ с⁻¹, $\omega_0 = 1,4 \cdot 10^6$ с⁻¹. Отсюда видно, что собственные колебания быстро ($t_1 \simeq 10^{-5}$ с) затухают и пузырек далее колеблется с частотой внешнего поля и безразмерной амплитудой колебаний

$$A_\varphi = (p_v/\rho r_{p0}^2) [(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta_0^2]^{-1/2},$$

где $\omega_1^2 = 3\gamma [p_\infty^0 + 2\sigma(3\gamma - 1)/3\gamma r_{p0}] / \rho r_{p0}^2$. С увеличением фильтрационного сопротивления (уменьшением $K_p(f_l)$) декремент затухания увеличивается, а частота собственных колебаний уменьшается, стремясь к нулю

при $\delta_0 \rightarrow \omega_1$. С ростом амплитуды внешнего давления p_b увеличивается амплитуда пульсаций. Ее максимальное значение соответствует $\omega = \omega_0$. В случае достаточно высоких значений p_b возможно схлопывание пузырька. Известно [12], что при кавитации газового пузырька в жидкости возникают высокие напряжения, значения которых могут превзойти предел прочности дендритных ветвей и вызвать их разрушение. Подобное явление может быть использовано для повышения дисперсности первичной дендритной структуры, положительно влияющей на физические и механические свойства затвердевшего металла. Однако если проницаемость зоны в данном сечении мала и не обеспечивает подпитку вещества за счет фильтрации расплава, то возникающие напряжения, нарушив сплошность затвердевшего расплава, могут вызвать образование горячих трещин.

Начальная стадия роста пузырька с учетом диффузии газа. Рассмотрим вначале поведение газового включения в поле постоянного давления ($\omega = 0$) при малых временах ($t \ll r_p^2/D$), когда возмущение концентрации C_2 ограничено тонким приграничным слоем, удовлетворяющим условию $r^3 - r_p^3 \ll r_p^3$. Как видно из предыдущего анализа, в случае медленных процессов (малых ω) и достаточно большой диссипации в системе инерционные силы слабо влияют на поведение пузырька в зоне, поэтому (11) запишем в приближенном виде без учета первых двух членов $\sim \ddot{r}_p$ и \dot{r}_p^2 :

$$(32) \quad v(f_{lp}/K_p + 4/r_p) \dot{r}_p + 2\sigma/\rho r_p = (p_g - p_\infty)/\rho \quad (p_\infty = p_\infty^0),$$

что эквивалентно пренебрежению инерционными членами, стоящими в левой части уравнения (2). Положим

$$(33) \quad R = r_p/r_{p0} = 1 + \varphi, \quad |\varphi| \ll 1.$$

Подставляя последнее в (32) и ограничиваясь членами первого порядка малости, найдем после обезразмеривания

$$(34) \quad P_g = K_\mu [4 + f_{lp}/K_p(f_{lp})] \dot{\varphi} - K_\sigma \varphi + P_\infty + K_\sigma.$$

Примем $\tau_p = t_p/t_0$ за начало отсчета безразмерного времени τ , а в качестве нового масштаба для концентрации C_2 выберем значение насыщающей концентрации газа C_{2s} в момент времени τ_p :

$$C_{2s} = \bar{K}_j P_{g0}^{1/j} = (1 + w\tau_p)^{k*}.$$

Здесь τ_p определяется формулой (17).

Линеаризуя (20)–(24) при $\tau \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$ и учитывая (33), (34), получим

$$(35) \quad \frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} + w_1 \bar{C};$$

$$(36) \quad \bar{C}|_{\tau=0} = 1, \quad \bar{C}|_{\xi=0} = P_{g0}^{*1/j} (1 + P_{g1}/jP_{g0});$$

$$(37) \quad \bar{C}|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1 + w_1 \tau, \quad [\partial \bar{C}/\partial \xi]_{\xi=0} = \Theta_p^{-1} d\chi(\tau)/d\tau,$$

где

$$(38) \quad \chi = P_{g0} (1 + w_2 \tau) + (3P_{g0} - K_\sigma) \varphi + K_\mu^* \dot{\varphi};$$

$$(39) \quad P_{g1} = K_\mu^* \dot{\varphi} - K_\sigma \varphi, \quad K_\mu^* = K_\mu [4 + f_{lp}/K_p(f_{lp})],$$

$$P_{g0}^* = (P_\infty + K_\sigma)/(P_\infty + K_\sigma/R^*), \quad R^* = r_p^*/r_{p0},$$

$$\bar{C} = C_2/C_{2s}, \quad w_1 = k^* w/(1 + w\tau_p), \quad w_2 = w/\Theta_p, \quad \Theta_p = \Theta_A - 1 - w\tau_p.$$

Для решения уравнения (35) с условиями (36), (37) воспользуемся односторонним преобразованием Лапласа, в результате

$$(40) \quad \bar{C}(\xi, \tau) = (1 + w_1 \tau) \left[1 - \frac{e_p}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{(d\chi/d\tau') (1 - w_1 \tau') e^{-\xi^2/4\sqrt{\tau-\tau'}}}{\sqrt{\tau-\tau'}} d\tau' \right].$$

Решение (40) записано с учетом допущения $w_1\tau \ll 1$, в соответствии с чем $\exp(\pm w_1\tau)$ аппроксимирована линейной функцией: $\exp(\pm w_1\tau) \approx 1 \pm w_1\tau$. Полагая в (40) $\xi = 0$, запишем полученное соотношение в форме интегрального уравнения Абеля

$$(41) \quad F(\tau) = \int_0^\tau \frac{\Phi(\zeta)}{\sqrt{\tau-\zeta}} d\zeta,$$

где $\Phi(\zeta) = (d\chi/d\zeta)(1 - w_1\zeta)$; $F(\tau) = \sqrt{\pi}[1 - \bar{C}(0, \tau)/(1 + w_1\tau)]/\Theta_p$. Решением уравнения (41), если считать $F(\tau)$ известной функцией, будет

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{F(0)}{\sqrt{\tau}} + \int_0^\tau \frac{F'(\zeta)}{\sqrt{\tau-\zeta}} d\zeta \right],$$

где штрих означает производную по ζ . Последнее с учетом выражения для $\Phi(\tau)$ и допущения $w_1\tau \ll 1$ запишем в виде

$$(42) \quad \frac{d\chi}{d\tau} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 + w_1\tau}{\sqrt{\tau}} F(0) + \int_0^\tau \frac{F'(\zeta)(1 + w_1\tau)}{\sqrt{\tau-\zeta}} d\zeta \right].$$

Интегрируя (42) по τ при $\chi(0) = P_{g0}$, $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ и учитывая (38), (39), найдем

$$(43) \quad K_\mu^* \dot{\varphi} + (3P_{g0} - K_\sigma) \varphi = -w_2 P_{g0} \tau - \frac{1}{\pi} \left[(1 + w_1\tau) \int_0^\tau \frac{F(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\tau-\zeta}} - 2w_1 \int_0^\tau F(\zeta) \sqrt{\tau-\zeta} d\zeta \right].$$

Здесь $F(\tau) \simeq (\sqrt{\pi}/\Theta_p) [\Delta C_0^* - P_{g0}^{*1/j} w_1\tau - (P_{g0}^{*1/j}/j P_{g0}) (K_\mu^* \varphi - K_\sigma \varphi)]$; $\Delta C_0^* = 1 - P_{g0}^{*1/j}$; $F(0) = \sqrt{\pi} \Delta C_0^*/\Theta_p$.

Рассматривая правую часть уравнения (43) как известную функцию переменной τ , проинтегрируем его по τ при $\varphi(0) = 0$, пренебрегая малыми членами $\lesssim \tau^3$ и полагая $(a_0\tau)^2 \ll 1$:

$$(44) \quad \varphi = (1 - a_0\tau) \left[\frac{2a_1}{3} \tau^{3/2} - \frac{a_2}{2} \tau^2 - a_3 \int_0^\tau \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\tau-\zeta}} + O(\tau^3) \right],$$

где $a_0 = (3P_{g0} - K_\sigma)/K_\mu^*$; $a_1 = 2\Delta C_0^*/(\sqrt{\pi}\Theta_p K_\mu^*)$; $a_2 = w_1 P_{g0}/K_\mu^*$; $a_3 = P_{g0}^{*1/j}/(j\sqrt{\pi}\Theta_p P_{g0})$.

Решение уравнения (44) будем искать методом последовательных приближений, приняв в качестве нулевого приближения $\varphi = 0$. Ограничиваясь вторым приближением, получим

$$\Phi(\tau) = (1 - a_0\tau) \left[\frac{2a_1}{3} \tau^{3/2} - \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{\pi a_1 a_2}{2} \right) \tau^2 + O(\tau^3) \right].$$

Отсюда видно, что в изотермическом случае ($w = a_2 = 0$), когда $\Delta C_0^* = a_1 = 0$ (начальный радиус r_{p0} равен критическому r_p^*), пузырек находится в состоянии неустойчивого равновесия. При этом он растет, если $r_{p0} > r_p^*$, и растворяется, когда $r_{p0} < r_p^*$, что согласуется с [13]. В неизо-термических условиях ($w \neq 0$, $a_2 \neq 0$) при $\Delta C_0^* = 0$ ($r_{p0} = r_p^*$) пузырек растворяется, т. е. состояния равновесия нет. Рост пузырька возможен при $r_{p0} > r_p^*$.

Численное решение. Для решения задачи о росте пузырька с учетом диффузионного переноса растворенного газа воспользуемся численным методом. Пренебрегая, как и выше, инерционными членами в (25), запишем

исходную систему (20)–(25) в безразмерном виде

$$(45) \quad \frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(3\xi + R^3)^{4/3} \frac{\partial C}{\partial \xi} \right] + \frac{k^*w}{1+w(\tau_p + \tau)} C, \quad \tau \rightarrow \tau - \tau_p;$$

$$(46) \quad \dot{R} = (P_g - P_\infty - K_\sigma/R) / [K_\mu(f_l R/K_{p1} + 4/R)];$$

$$(47) \quad \dot{P}_g = P_g \left[\frac{3(\Theta_A - \Theta)}{P_g} R \frac{\partial C}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \frac{w}{\Theta_A - \Theta} - \frac{3\dot{R}}{R} \right];$$

$$(48) \quad R|_{\tau=0} = 1, \quad P_g|_{\tau=0} = P_\infty + K_\sigma, \quad C|_{\tau=0} = 1;$$

$$(49) \quad C|_{\xi=0} = \bar{K}_j P_g^{1/j}, \quad C|_{\xi \rightarrow \infty} = [1 + w\tau/(1 + w\tau_p)]^{k^*}.$$

Дополнительное соотношение, определяющее значение $(\partial C/\partial \xi)|_{\xi=0}$, найдем из (45). Принимая во внимание, что C ограничена и имеет непрерывные первую и вторую производные по ξ в области $\xi \in [0, \infty)$, умножим на $e^{-\lambda \xi}$ левую и правую части равенства (45) и проинтегрируем полученное соотношение по ξ от 0 до ∞ :

$$(50) \quad \frac{\partial C}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \lambda C|_{\xi=0} - \frac{1}{R^4} \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(3\xi + R^3)^{4/3} \frac{\partial C}{\partial \xi} \right] + \lambda C (R^3 + 3\xi)^{1/3} [4 - \lambda (R^3 + 3\xi)] \right\} d\xi$$

(λ — некоторая положительная константа). В соотношении (50) полубесконечный интервал интегрирования заменим на конечный ($0 \leq \xi \leq \xi^*$), а подынтегральную функцию представим как

$$(51) \quad f_0 = \frac{1}{h} \left[(R^3 + 3h)^{4/3} \frac{C_2 - C_1}{h} - R^4 \frac{\partial C}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right] + \lambda C|_{\xi=0} R (4 - \lambda R^3) \quad (\xi=0),$$

$$f_k = e^{-\lambda \xi_k} \left\{ \frac{1}{h^2} \left[(R^3 + 3\xi_{k+1})^{4/3} (C_{k+2} - C_{k+1}) - (R^3 + 3\xi_k)^{4/3} (C_{k+1} - C_k) \right] + \lambda C_k (3\xi_k + R^3)^{1/3} [4 - \lambda (3\xi_k + R^3)] \right\} \quad (0 < \xi \leq \xi^*),$$

где $h = \xi^*/N$; $k = 1, 2, \dots, N$; $\xi_k = hk$; C_k — значение величины C в точке ξ_k ; C_{N+1}, C_{N+2} находятся с помощью линейной интерполяции. Заменяя в (50) операцию интегрирования суммированием по правилу Уэддла и выполнив преобразования с учетом выражения для подынтегральной функции из (51) и значения $C|_{\xi=0}$ из (49), найдем

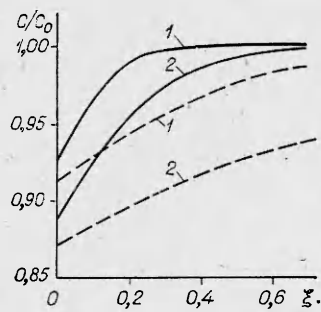
$$(52) \quad \frac{\partial C}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} - \frac{10}{7} \lambda C|_{\xi=0} - \frac{3h}{7R^4} \left[(R^3 + 3h)^{4/3} \frac{C_2 - C_1}{h^2} + \lambda C_0|_{\xi=0} (4 - \lambda R^3) + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6 + \sum_{k=1}^{N/6-1} (f_{6k} + 5f_{6k+1} + f_{6k+2} + 6f_{6k+3} + f_{6k+4} + 5f_{6k+5} + f_{6k+6}) \right].$$

Систему (45)–(47) с условиями (48), (49), (52) будем решать методом прямых [14]. Для этого производные в (45) аппроксимируем соответствующими конечными разностями:

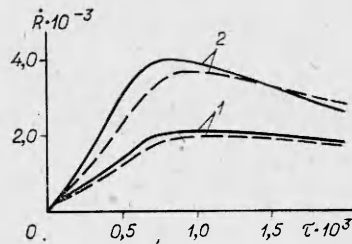
$$\dot{C}_1 = \frac{1}{h} \left[(R^3 + 3h)^{4/3} \frac{C_2 - C_1}{h} - R^4 \frac{\partial C}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \right] + \frac{k^*w}{1+w(\tau_p + \tau)} C_k,$$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{h^2} \left[(R^3 + 3\xi_k)^{4/3} (C_{k+1} - C_k) - (R^3 + 3\xi_{k+1})^{4/3} (C_k - C_{k-1}) \right] + \frac{k^*w}{1+w(\tau_p + \tau)} C_k, \quad k = 2, 3, \dots, N.$$

Эти уравнения совместно с (46), (47), (52) представляют собой систему



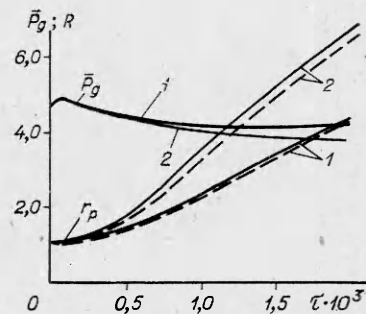
Р и с. 1



Р и с. 2

обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решалась численно методом Рунге — Кутты на БЭСМ-6.

В качестве примера рассмотрено поведение газового пузырька в гетерогенной зоне сплава Fe + 0,5%С + 2·10⁻³%Н₂. Исходные данные: $k^* = 1,276$, $p_\infty = 1,1 \cdot 10^5$ Н/м², $\sigma = 1,85$ Н/м, $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $D_2 = 1,2 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $r_{p0} = 10^{-5}$ м, $v_T = 10^3$ °С/с. Некоторые результаты расчета представлены на рис. 1—3. На рис. 1 показано распределение относительной величины концентрации вдоль координаты ξ для $\tau = 10^{-3}$ и $2 \cdot 10^{-3}$ (сплошные и штриховые линии) при $f_{lp} = 0,2$ и $0,3$ — кривые 1 и 2, на рис. 2 — изменение безразмерной величины скорости роста пузырька \dot{R} , на рис. 3 — изменение безразмерных величин радиуса пузырька R и газового давления $\bar{p}_g = p_g/p_a$ в его полости со временем при $r_{p0}/r_p^* = 1,025$, $f_{lp} = 0,2$ и $0,3$ — кривые 1 и 2 (сплошные линии — без учета инерционных членов, штриховые — с учетом инерционных членов в уравнении (11)). Из рис. 2 видно, что на начальном этапе скорость R растет по закону, близкому к $\sqrt{\tau}$, а по достижении некоторого максимального значения довольно быстро убывает, стремясь к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Характерный период развития этого процесса $\sim 3 \cdot 10^{-6}$ с. За это время радиус пузырька увеличивается в ~ 6 раз. Влияние скорости охлаждения при значениях $v_T \leq 10^3$ °С/с слабо сказывается на поведении пузырька, поскольку f_l и $K_p(f_l)$ за время $\sim 10^{-6}$ с изменяются незначительно. Учет инерционных членов в обобщенном уравнении Рэлея (11) заметно сказывается на динамике роста пузырька при $f_{lp} \geq 0,2$, когда фильтрационное сопротивление становится достаточно малым (см. рис. 2, 3).



Р и с. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Флемингс М. С. Процессы затвердевания. — М.: Мир, 1977.
2. Журавлев В. А. О макроскопической теории кристаллизации сплавов. — Изв. АН СССР. Металлы, 1975, № 5.
3. Соболев В. В. Анализ поведения газовых включений в жидких металлах. — Изв. АН СССР. Металлы, 1982, № 2.
4. Черепанов А. Н., Попов В. Н. К теории образования газоусадочной пористости при неравновесной кристаллизации сплавов. — В кн.: Теплофизические явления при кристаллизации металлов. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1982.
5. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. — J. Acoust. Soc. Amer., 1956, v. 28, N 2.
6. Протодяконов И. О., Марцулевич Н. А., Марков А. В. Явления переноса в процессах химической технологии. — Л.: Химия, 1981.
7. Накоряков В. Е., Кузнецов В. В., Донцов В. Е. Динамика возмущений давления в насыщенной жидкостью пористой среде. — В кн.: Гидродинамические течения и волновые процессы. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983.

8. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983.
9. Черепанов А. Н. Макроскопическое описание явлений переноса в гетерогенной зоне многокомпонентных сплавов.— В кн.: Теплофизические процессы при кристаллизации и затвердевании. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1984.
10. Черепанов А. Н., Полякова В. И. Неравновесная кристаллизация и динамические явления в двухфазной зоне при естественной конвекции расплава.— В кн.: Фазовые переходы в чистых металлах и бинарных сплавах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.
11. Монсеев Н. П. Асимптотические методы нелинейной механики.— М.: Наука, 1981.
12. Абрамов О. В. Кристаллизация металлов в ультразвуковом поле.— М.: Металлургия, 1972.
13. Кунин Л. Л., Головин А. М., Суевой Ю. Н. и др. Проблемы дегазации металлов.— М.: Наука, 1972.
14. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы.— М.: Наука, 1976, т. 2.

Поступила 17/VI 1985 г.

УДК 532.526

ПОТОК ВЕЩЕСТВА НА ПОВЕРХНОСТЬ КРИСТАЛЛА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

С. И. Аладьев

(Москва)

В работе определяется скорость роста кристаллов из газовой фазы при турбулентной естественной конвекции.

Поток вещества на поверхность растущего кристалла обусловлен наличием в газовой фазе градиента концентрации активного компонента, создаваемого за счет поддержания в среде соответствующего градиента температуры. Следствием этого может быть естественная конвекция, влияние которой на скорость роста кристалла зависит также от ориентации системы. Ниже рассматривается процесс роста кристаллов, протекающий в вертикальных цилиндрических ампулах. В этом случае для возникновения естественной конвекции необходимо существование в газовой фазе неустойчивой стратификации, что имеет место, например, тогда, когда источник («горячая» поверхность) располагается ниже подложки («холодная» поверхность). Далее предполагается, что естественная конвекция турбулентная. Отметим, что условия, необходимые для этого, часто реализуются на практике. Как и в [1], считается, что газовая фаза представляет собой бинарную смесь активного и инертного компонентов.

При наличии турбулентных пульсаций осредненная по времени скорость роста кристаллов, т. е. скорость перемещения поверхности разрыва газ — твердое тело, дается выражением

$$(1) \quad \zeta = -\frac{\rho}{\rho^*} \left(v_n + \frac{1}{\rho} \langle \rho' v_n' \rangle \right), \quad \rho^* \gg \rho.$$

Здесь ρ , v_n — осредненные плотность и нормальная к фронту составляющая скорости газовой фазы; ρ^* — плотность кристалла ($\rho^* = \text{const}$); штрих — пульсация. Таким образом, для нахождения ζ необходимо знать распределение скоростей в газовой фазе и корреляцию $\langle \rho' v_n' \rangle$. Ограничимся случаем, когда плотность газа — линейная функция температуры T , $\rho'/\rho = -\beta T'$ (β — коэффициент объемного расширения).

При росте кристаллов изменение осредненной температуры T в радиальном направлении пренебрежимо мало по сравнению с ее изменением вдоль оси. Кроме того, числа Рейнольдса, построенные по осредненной скорости направленного течения, малы ($Re \sim 1$). Таким образом, в рассматриваемом случае турбулентность обусловлена лишь действием термогравитационных сил. В этих условиях балансы вторых моментов пульсаций скорости и температуры [2, 3], записанные в приближении Буссинеска, имеют вид