

6. Воинов О. В., Воинов В. В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями. — Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 3.
7. Lenoir M. Numerical simulation of the collapse of a cavitation bubble. — In: Lecture Notes Physics, Vol. 59. 1976, p. 274—279.

УДК 533.6.011

К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ ЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

А. Л. Брежнев, И. А. Чернов

(Саратов)

Первое исследование задачи обтекания профиля потоком газа, скорость которого равна звуковой на бесконечности, проведено в работе [1, 2], где показано, в частности, что главный член соответствующего асимптотического разложения является автомодельным решением уравнения Трикоми, к которому сводится в первом приближении задача при годографическом изучении. Важным условием, определившим выбор показателя автомодельности $n(xy^{-n} - \text{инвариант автомодельного решения})$, явилось требование аналитичности функции тока в зависимости от годографических переменных на предельной характеристике. Из этого условия следует аналитичность поля скоростей всюду в течении выше ударных волн, которые с необходимостью возникают при обтекании профиля. Последнее найдено в [3], где использована в области позади ударных волн одна из ветвей решения, полученного в [1].

Главный и последующие члены асимптотического разложения, описывающего звуковой поток вдали от профиля, обсуждались в [4], где автор ограничился уравнением Трикоми.

Каждый член построенного в [4] ряда содержит произвольный коэффициент (назовем его формпараметром), который не определен в рамках локального изучения, и требуется рассмотрение задачи обтекания заданного профиля в целом, чтобы определить эти формпараметры. Из результатов [4] следует, что вопрос о высших приближениях к решению [1] совпадает с задачей построения течения в окрестности центра сопла Лавалья при аналитическом распределении скорости вдоль продольной оси (течение мейеровского типа).

Наряду с течением мейеровского типа в окрестности центра сопла, которое соответствует показателю автомодельности $n = 2$, асимптотически возможны два других типа течения с $n = 3$ и 11 , что дано в [5]. В [6] выписаны соответствующие решения в алгебраических функциях.

Результаты [5] показывают, что условие аналитичности вектора скорости на предельной характеристике в плоскости потока шире, чем условие аналитичности функции тока в зависимости от годографических переменных, использованное в [1, 2, 4]. Поэтому возникла необходимость пересмотра задачи о высших приближениях для профильного решения Ф. И. Франкля. Для области впереди ударных волн оказалось возможным использование ряда, более общего, чем в [4], что означает включение дополнительного множества формпараметров. Решение представлено на плоскости годографа в виде суммы двух слагаемых, первому соответствует ряд, рассмотренный в [4], второму — ряд, порождаемый автомодельным решением с $n = 3$ или с $n = 11$.

1. Плоские безвихревые течения идеального совершенного газа в околосзвуковом приближении описываются уравнениями [7]

$$(1.1) \quad -u u_x + v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0,$$

где x, y — приведенные декартовы координаты; u, v — безразмерные компоненты возмущений однородного звукового потока.

Система (1.1) на плоскости годографа приводится к уравнению Трикоми

$$(1.2) \quad -uy_{vv} + y_{uu} = 0.$$

Координата x находится из соотношения

$$(1.3) \quad dx = uy_v du + y_u dv.$$

Уравнение (1.2) обладает классом автомодельных решений

$$(1.4) \quad y = v^\lambda f_\lambda(t), \quad t = v/\sqrt{v^2 - (4/9)u^2},$$

где λ — параметр, однозначно связанный с показателем автомодельности $n = (\lambda + 1/3)/\lambda$; t — автомодельная переменная.

Функция $f_\lambda(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(1.5) \quad t^2(1-t^2)f_\lambda'' + t[2\lambda - (2\lambda + 4/3)t^2]f_\lambda' + \lambda(\lambda - 1)f_\lambda = 0,$$

общее решение которого выражается через гипергеометрические функции (A_λ, B_λ — произвольные постоянные)

$$(1.6) \quad f_\lambda = A_\lambda t^{-\lambda} F(-\lambda/2, \lambda/2 + 1/6, 1/2; t^2) + B_\lambda t^{1-\lambda} F(-\lambda/2 + 1/2, \lambda/2 + 2/3, 3/2; t^2).$$

Если $A_\lambda = 0$, то (1.4), (1.6) определяют течение, симметричное относительно оси x .

Из (1.3) находим

$$(1.7) \quad x = v^{\lambda+1/3} g_\lambda(t), \quad g_\lambda = (3/2)^{1/3} (\lambda + 1/3)^{-1} (t^{-2} - 1)^{2/3} (\lambda f_\lambda + t f_\lambda').$$

2. Течения, описываемые решениями уравнения (1.2), в которых выполняется условие аналитичности поля скоростей на предельной характеристике, являющейся границей трансзвуковой зоны, назовем естественными или Е-течениями. Условие естественности определяет более широкий класс, чем условие регулярности y на линии $t = \infty$ в плоскости годографа. В классе автомодельных Е-течения изучались в [8].

Ограничимся вначале изучением Е-течений, симметричных относительно оси x (ЕС-течений). Ниже рассматриваются неавтомодельные решения уравнения Трикоми, которые представляют собой ряды по автомодельным составляющим с главным членом, описывающим ЕС-течение, без предельных линий в трансзвуковой зоне.

Обсудим вопрос о высших приближениях к решению [1]. Искомое решение уравнения (1.2) представим в виде

$$(2.1) \quad y = v^{-5/3} f_{-5/3} + v^\lambda f_\lambda.$$

Определим такие значения показателя λ , входящего во второе слагаемое, при которых (2.1) определяет ЕС-течение. Для определенности будем рассматривать область годографа, ограниченную отрицательной полуосью u и предельной характеристикой $v = 2/3u^{3/2}$, причем $v > 0$. Общий интеграл уравнения (1.5) запишем в форме

$$(2.2) \quad f_\lambda = C_\lambda F(-\lambda/2, -\lambda/2 + 1/2, -\lambda + 5/6; t^{-2}) + D_\lambda t^\nu F(\lambda/2 + 2/3, \lambda/2 + 1/6, \lambda + 7/6; t^{-2}), \quad \nu = -2\lambda - 1/3,$$

где C_λ, D_λ — постоянные, связанные с A_λ . B_λ невырожденным линейным преобразованием, причем

$$(2.3) \quad \nu \neq 0, \pm 2, \pm 4, \dots$$

Если ν — четное число, то (2.2) должно быть заменено выражением, содержащим логарифмические члены.

В [1, 4] показатели λ найдены из условия симметрии $A_\lambda = 0$ и условия регулярности решения (2.1) в плоскости годографа $\bar{D}_\lambda = 0$. Чтобы обнаружить показатели λ , отличные от указанных в [1, 4], рассмотрим случай $D_\lambda \neq 0$.

Используя (1.3), (2.1), найдем

$$(2.4) \quad x = \nu^{-4/3} g_{-5/3} + \nu^{\lambda+1/3} g_\lambda.$$

Из (2.1), (2.4) получим разложение $\zeta = xy^{-4/5}$ по степеням y с коэффициентами, зависящими от t

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \zeta &= \zeta_0(t) + y^h \zeta_1(t) + y^{2h} \zeta_2(t) + \dots, \quad h = -3\lambda/5 - 1, \\ \zeta_0 &= g_{-5/3} f_{-5/3}^{-4/5}, \quad \zeta_1 = -(4/5) f_\lambda f_{-5/3}^{-1-h} + g_\lambda f_{-5/3}^{-4/5-h}, \\ \zeta_2 &= (9/5 + 2h) (2/5) f_\lambda^2 f_{-5/3}^{-2-2h} - (4/5 + h) g_\lambda f_\lambda f_{-5/3}^{-9/5-2h}, \dots \end{aligned}$$

Функции ζ_i разложим в ряды при $t \rightarrow \infty$

$$(2.6) \quad \zeta_0 = \zeta_{00} + \zeta_{02} t^{-2} + \dots, \quad \zeta_i = \zeta_{i0} + \zeta_{i1} t^\nu + \zeta_{i2} t^{-2} + \dots,$$

где ζ_{ij} — константы, выражающиеся через $C_{-5/3}, \lambda, C_\lambda, D_\lambda$.

Заметим, что ζ_0 — аналитическая функция переменной t^{-2} , поскольку $D_{-5/3} = 0$.

Исследуем случай $-2 < \nu < 0$ ($-1/6 < \lambda < 5/6$). Используя (2.6), перепишем (2.5) в виде

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \zeta &= Z_0(y) + Z_1(y)t^\nu + Z_2(y)t^{-2} + \dots, \\ Z_0 &= \zeta_{00} + \zeta_{10}y^h + \zeta_{20}y^{2h} + \dots, \\ Z_1 &= \zeta_{11}y^h + \zeta_{21}y^{2h} + \dots, \\ Z_2 &= \zeta_{02} + \zeta_{12}y^h + \zeta_{22}y^{2h} + \dots \end{aligned}$$

На предельной характеристике $t = \infty$, поэтому $\zeta = Z_0$ — уравнение предельной характеристики в плоскости x, y . Обращая (2.7), найдем разложение величины t^{-2} в окрестности $\zeta = Z_0$

$$(2.8) \quad t^{-2} = Z_1^{2/\nu} (\zeta - Z_0)^{-2/\nu} + \dots$$

С другой стороны,

$$(2.9) \quad t^{-2} = 1 - 4u^3/(9v^2).$$

Пусть u, v — аналитические функции x, y на предельной характеристике. Тогда из (2.8), (2.9) следует, что показатель $-2/\nu$ должен быть натуральным числом

$$-2/\nu = i, \quad \lambda = 1/i - 1/6, \quad i = 1, 2, \dots$$

Четные значения i соответствуют течениям, для которых предельная характеристика является линией ветвления в плоскости годографа.

Поскольку основное решение с $\lambda = -5/3$ не обладает таким свойством, для соответствующей суммы продолжение за предельную характеристику не определено. Значение $i = 1$ непригодно, поскольку нарушается условие (2.3). При $i = 3$ получаем $\lambda = 1/6$, т. е. поправка в (2.1) соответствует второму асимптотическому типу течения в плоском сопле [5]. Пусть $i = 5$, тогда $\lambda = 1/30$, и поправка соответствует третьему асимптотическому типу течения в сопле Лавалья [5].

Если $i = 7, 9, 11, \dots$, то $\lambda = -1/42, -1/18, -5/66, \dots$. Этим значениям соответствуют сопловые течения с прямой звуковой линией, изученные в [9]. Отсутствие области годографа между звуковой линией и предельной характеристикой в таких течениях не позволяет использовать их в качестве слагаемого в (2.1).

Пусть теперь $-\infty < \nu < -2(5/6 < \lambda < \infty)$. Обращая (2.7), получим

$$t^{-2} = Z_2^{-1}(\zeta - Z_0) - Z_1 Z_2^{\nu/2-1}(\zeta - Z_0)^{-\nu/2} + \dots$$

Если поле скоростей аналитично на предельной характеристике, то показатель $-\nu/2$ должен быть натуральным числом, однако в этом случае нарушается условие (2.3).

Поэтому получаем, что (2.1) определяет Е-течение, если $\lambda = -1/6, 1/30$.

3. Для автомодельных решений (1.4) с показателями $\lambda = -5/3, 1/6, 1/30$ построены высшие приближения, каждое из которых содержит формпараметр. Так, в [4] изучалось ЕС-течение, описываемое рядом

$$(3.1) \quad y_1 = v^{\lambda_{i1}} f_{\lambda_{i1}}, \lambda_{i1} = -5/3 + 2i/3.$$

Здесь производится суммирование по повторяющемуся индексу i , который принимает целые неотрицательные значения, не равные 1, 2. Поскольку $D_{\lambda_{i1}} = 0$ в (2.2), соответствующем (3.1), то коэффициенты $f_{\lambda_{i1}}$ (а также $g_{\lambda_{i1}}$) являются аналитическими функциями переменной $t^{-2}(t \rightarrow \infty)$.

В [10] изучалось течение в двоякосимметричном сопле Лавалья, описываемое решением

$$(3.2) \quad y_2 = v^{\lambda_{j2}} f_{\lambda_{j2}}, \lambda_{j2} = 1/6 + j/3,$$

где j — целый неотрицательный индекс суммирования, не равный 2, 5, 8, 11, ..., что соответствует условию (2.3). Заметим, что $\nu(\lambda_{j2}) = -2(j + 1)/3$, поэтому $f_{\lambda_{j2}}$, а также $g_{\lambda_{j2}}$ являются аналитическими функциями переменной $\tau = t^{-2/3} (\tau \rightarrow 0)$.

Рассмотрим решение уравнения (1.2)

$$(3.3) \quad y_3 = v^{\lambda_{k3}} f_{\lambda_{k3}}, \lambda_{k3} = 1/30 + k/5,$$

где k — целый неотрицательный индекс суммирования, не равный 4, 9, 14, ... Так как $\nu(\lambda_{k3}) = -2(k + 1)/5$, то $f_{\lambda_{k3}}, g_{\lambda_{k3}}$ — аналитические функции переменной $\tau_1 = t^{-2/5}$. В [10] показано, что (3.2), (3.3) в частном случае определяют ЕС-течения.

4. Пользуясь линейностью уравнения Трикоми, просуммируем решения y_1 и y_2 , получим

$$(4.1) \quad y = v^{-5/3} f_{-5/3} + v^{1/6} f_{1/6} + v^{1/3} f_{1/3} + v^{1/2} f_{1/2} + \dots$$

Коэффициенты $f_{1/6}, f_{1/2}, \dots$ параметрически зависят от t [6, 10]

$$t = 2 \cdot 3^{-3/4} (s^5 + s) (-s^4 + 2\sqrt{3}s^2 + 1)^{-3/2},$$

$$f_{1/6} = H_0 (s + E_0) (s^5 + s)^{-1/6},$$

$$f_{1/2} = H_1 (s^3 - \sqrt{3}E_1 s^2 + \sqrt{3}s + E_1) (s^5 + s)^{-1/2}, \dots$$

Здесь s — действительный параметр, меняющийся в пределах $0 < s < \infty$; H_i, E_i — произвольные постоянные, причем для симметричных течений $E_0 = E_1 = \dots = 0$.

Функции $f_{-5/3}, f_{1/3}, \dots$ имеют вид

$$f_{-5/3} = (9/16) B_{-5/3} t^{5/3} [(1 - t)^{1/3} (1/3 + t) - (1 + t)^{1/3} (1/3 - t)],$$

$$f_{1/3} = (3/2) B_{1/3} t^{-1/3} [(1 + t)^{1/3} - (1 - t)^{1/3}].$$

Покажем, что (4.1) определяет ЕС-течение. Используя (1.3), (1.7), найдем

$$(4.2) \quad x = v^{-4/3} g_{-5/3} + v^{1/2} g_{1/6} + v^{2/3} g_{1/3} + v^{5/6} g_{1/2} + \dots$$

Коэффициенты $f_{-5/3}, g_{-5/3}, f_{1/6}, g_{1/6}, \dots$ являются аналитическими функциями переменной τ , введенной в п. 3. Тогда (4.1), (4.2) определяют $x(v, \tau), y(v, \tau)$ как аналитические функции в окрестности предельной характеристики $\tau = 0$ ($v > 0$). Если якобиан преобразования $J = \partial(x, y) / \partial(v, \tau)$ отличен от нуля в окрестности $\tau = 0$, то (4.1), (4.2) можно обратить. При этом обратные функции $v(x, y), \tau(x, y)$ будут аналитическими на предельной характеристике. Функция $u(x, y)$ будет обладать тем же свойством, поскольку

$$(4.3) \quad u = (3/2)^{2/3} v^{2/3} (1 - \tau^3)^{1/3}.$$

Определим достаточные условия, при которых $J \neq 0$ в окрестности $\tau = 0$ при малых значениях v . Представим J в виде

$$J = -(3/2)^{2/3} v^{2/3} (\tau - \tau^4)^{-1} (x_v - \sqrt{u} y_v)(x_v + \sqrt{u} y_v).$$

Разлагая x_v, y_v по степеням τ при фиксированном v , получим

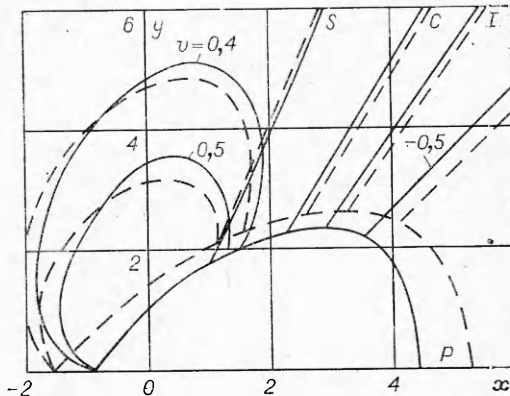
$$J = v^{-1/2} 2(3/2)^{1/3} D_{1/6} [- (5/3) \times \\ \times C_{-5/3} v^{-5/3} + (1/6) C_{1/6} v^{1/6} + \\ + \dots] + O(\tau).$$

Если $D_{1/6} \neq 0$ и, кроме того,

$$(4.4) \quad \text{sgn}(C_{-5/3} C_{1/6}) = -1,$$

то $J \neq 0$ в окрестности предельной характеристики при достаточно малых фиксированных положительных значениях v .

На фиг. 1 приведены результаты расчета характерных линий при обтекании профиля. Сплошными (штриховыми) ли-



Ф и г. 1

ниями показано течение (4.1), в котором оставлены первые два (три) слагаемых, S обозначает звуковую линию, C — предельную характеристику, I — линию нулевого наклона вектора скорости, P — нулевую линию тока, подсчитанную интегрированием уравнения $dy/dx = v$. Показаны также несколько линий $v = \text{const}$. В расчетах полагалось

$$(4.5) \quad \begin{aligned} B_{-5/3} &= 16/9, B_{1/3} = -4^{-1}(2/3)^{2/3}, \\ H_0 &= -2^{1/6}3^{-1/12}(2 + \sqrt{3})^{-1/4}, E_0 = 0. \end{aligned}$$

5. Построим решение системы (1.1), соответствующее (4.1), с помощью разложения искомых функций в ряд по автомодельным составляющим на плоскости x, y . Используем вначале координатные разложения по степеням y при фиксированном ζ

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u &= y^{-2/5+k_i} U_i(\zeta), v = y^{-3/5+k_i} V_i(\zeta), \zeta = xy^{-4/5}, \\ k_0 &= 0, k_1 = -11/10, k_2 = -6/5, k_3 = -13/10, k_4 = -8/5, \\ k_5 &= -17/10, k_6 = -19/10, k_7 = -2, k_8 = -11/5, \dots \end{aligned}$$

Значения k_i определяются соответствующими показателями степеней в (4.1). Функции U_i, V_i удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система обладает особой точкой ζ_c , определяемой из условия $4U_0'(\zeta_c) = 9V_0'(\zeta_c)$. Обобщенная парабола $\zeta = \zeta_c$ является предельной характеристикой системы (1.1) для автомодельного решения

$$(5.2) \quad u = y^{-2/5} U_0(\zeta), v = y^{-3/5} V_0(\zeta).$$

Если все функции U_i, V_i аналитичны в точке ζ_c , то (5.1) определяет решение системы (1.1), аналитическое на предельной характеристике.

Исследование высших приближений (5.1) показывает, что функции U_i, V_i, \dots неаналитичны в точке ζ_c . Однако не следует истолковывать этот факт как доказательство неаналитичности поля скоростей, определяемого географическим решением (4.1). Причина кажущегося противоречия объясняется фактом неравномерной пригодности асимптотического разложения (5.1), которое несправедливо вблизи предельной характеристики, в то время как (4.1) равномерно пригодно всюду. Вне окрестности предельной характеристики разложения (4.1), (5.1) эквивалентны. Сингулярность разложения (5.1) вблизи $\zeta = \zeta_c$ возникает из-за того, что система (1.1) нелинейна и при возмущении автомодельного решения (5.2) предельная характеристика отклоняется от обобщенной параболы $\zeta = \zeta_c$, что не учитывается в данном разложении.

Чтобы построить равномерно пригодное разложение, воспользуемся методом деформированных координат, разлагая наряду с u, v также переменную ζ в ряд по степеням y . Коэффициенты разложений удобно считать зависящими от t

$$(5.3) \quad u = y^{-2/5+k_i} u_i(t), v = y^{-3/5+k_i} v_i(t);$$

$$(5.4) \quad \zeta = y^{k_i} \zeta_i(t), \quad i = 0, 1, \dots$$

Из (4.1), (4.3), (5.3) получим

$$(5.5) \quad \begin{aligned} u_0 &= (3/2)^{2/3} (1 - \tau^3)^{1/3} f_{-5/3}^{2/5}, u_i = (2/5) u_0 Y_i, \quad i = 1, \dots, 7, \\ u_8 &= (7/25) u_0 Y_1^2 + (3/2) u_1 Y_1, \dots, Y_1 = f_{1/6} f_{-5/3}^{1/10}, Y_2 = f_{1/3} f_{-5/3}^{1/5}, \dots \end{aligned}$$

Аналогичные формулы справедливы для v_i .
 Воспользовавшись (4.1), (4.2), (5.4), найдем

$$\zeta_0 = g_{-5/3} f_{-5/3}^{-4/5}, \zeta_i = -(4/5) \zeta_0 Y_i + X_i, \quad i = 1, \dots, 7,$$

$$\zeta_8 = -(4/25) \zeta_0 Y_1^2 + (3/10) X_1 Y_1, \dots, X_1 = g_{1/6} f_{-5/3}^{3/10}, X_2 = g_{1/3} f_{-5/3}^{2/5}, \dots$$

Убедимся в том, что (5.3), (5.4) определяют поле скоростей, аналитическое на предельной характеристике. В самом деле, ζ_i — аналитические функции τ

$$\zeta_i = \zeta_{ij} \tau^j, \quad i, j = 0, 1, \dots$$

Тогда (5.4) можно переписать в виде степенного ряда по τ

$$(5.6) \quad \zeta = Z_j(y) \tau^j, \quad j = 0, 1, \dots, Z_j(y) = \zeta_{ij} y^{ki}, \quad i = 0, 1, \dots,$$

причем $\zeta = Z_0(y)$ — уравнение предельной характеристики. Обращая ряд (5.6), получим τ как аналитическую функцию переменных ζ, y (или x, y) на предельной характеристике. По построению (5.5) u_i, v_i — аналитические функции τ , поэтому поле скоростей (5.3), (5.4) удовлетворяет условию аналитичности.

Условие симметрии также выполняется, если на плоскости годографа взяты соответствующие частные интегралы ($A_{\lambda, i1} = A_{\lambda, j2} = 0$).

Поскольку в (5.3), (5.4) используется система координат t, y , необходимо, чтобы якобиан преобразования $I = \partial(\zeta, y) / \partial(t, y)$ был отличен от нуля. Можно показать, что всюду в трансзвуковой зоне $I \neq 0$ при достаточно больших y , если выполняется условие (4.4).

Заметим, что в данном построении годографическая переменная t играет роль оптимальной координаты, определенной в [11], поскольку ее использование сразу приводит к равномерно пригодному разложению.

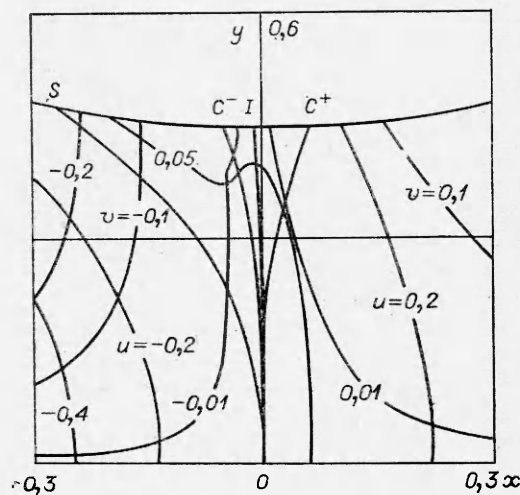
6. Рассмотрим теперь разложение (4.1), в котором положим $f \equiv 0$. Тогда главным членом разложения будет сопловое решение с $\lambda = 1/6$

$$(6.1) \quad y = v^{1/6} f_{1/6} + v^{1/3} f_{1/3} + v^{1/2} f_{1/2} + \dots$$

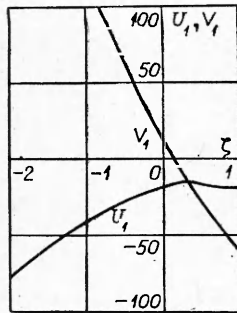
Повторяя рассуждения предыдущих пунктов, можно доказать, что (6.1) определяет Е-течение. На фиг. 2 приведены результаты расчета сопла по решению (6.1), в котором оставлены первые два слагаемых. На приходящей предельной характеристике S -течение аналитическое, а за исходящую из центра сопла характеристику C^+ оно продолжено со слабым разрывом, чтобы избежать появления предельной линии между характеристикой C^+ и полуосью $x > 0$. При этом второе слагаемое аналитично всюду, а для первого использовалось продолжение со слабым разрывом, построенное в [5].

Значения произвольных постоянных даются равенствами (4.5).

Соответствующее решение системы (1.1) в плоскости x, y



Фиг. 2



Ф и г. 3

можно записать, используя метод разложения в ряд по автомодельным составляющим с фиксированной ζ

$$(6.2) \quad u = y^{2+i} U_i(\zeta), \quad v = y^{6+i} V_i(\zeta), \quad \zeta = xy^{-3}.$$

Представители U_i, V_i определяются формулами, приведенными в [6, 10], и являются аналитическими функциями в точке ζ_c . Деформирование переменной ζ в данном случае не требуется.

Графики функций $U_1(\zeta), V_1(\zeta)$ представлены на фиг. 3.

Если положить

$$U_1 = V_1 = U_3 = V_3 = \dots = 0,$$

то ряд (6.2) будет содержать как частный случай течение в двоякосимметричном сопле, построенное в [10].

7. Рассмотрим решение уравнения Трикоми

$$(7.1) \quad y = y_1 + y_3, \quad A_{\lambda_{i1}} = A_{\lambda_{k3}} = 0, \quad B_{1/30} \neq 0.$$

Повторяя рассуждения пп. 2—4, можно показать, что (7.1) определяет ЕС-течение.

Пусть $B_{-5/3} \neq 0$, тогда (7.1) описывает течение вдали от профиля. На физической плоскости эквивалентное равномерно пригодное разложение представляется в деформированном виде

$$u = y^{-2/5+k_i} u_i(t), \quad v = y^{-3/5+k_i} v_i(t), \quad \zeta = y^{k_i} \zeta_i(t),$$

$$\zeta = xy^{-4/5}, \quad k_0 = 0, \quad k_1 = -51/50, \quad k_2 = -57/50, \dots$$

Если $B_{-5/3} = 0$, то (7.1) определяет Е-течения газа в плоских соплах третьего по [5] асимптотического типа, которые характерны зарождением ударной волны в центре. Здесь рассматривается только подводящая часть течения в таком сопле. В плоскости x, y соответствующее разложение при фиксированной ζ оказывается равномерно пригодным и имеет вид

$$u = y^{20+k_i} U_i(\zeta), \quad v = y^{39+k_i} V_i(\zeta), \quad \zeta = xy^{-11},$$

$$k_0 = 0, \quad k_1 = 6, \quad k_2 = 9, \quad k_3 = 12, \dots,$$

где U_i, V_i даются формулами, приведенными в [6, 10].

8. Заметим, что решения

$$y = y_2 + y_3, \quad u = y_1 + y_2 + y_3$$

не определяют Е-течений. В этом можно убедиться, рассматривая частный пример. Изучим течение, для которого

$$(8.1) \quad y = v^{1/30} f_{1/30} + v^{1/6} f_{1/6}, \quad x = v^{11/30} g_{1/30} + v^{1/2} g_{1/6}.$$

Если зафиксировать v ($v = v_0$), то (8.1) можно рассматривать как уравнение линии равного наклона в плоскости потока, записанное через

параметр t . Можно показать, что кривая $v = v_0$ в точке пересечения с предельной характеристикой неаналитична, т. е. в течении (8.1) существует слабый разрыв.

Исследование, проведенное выше, показывает, что ряд (3.1), используемый для описания течения вдали от профиля, можно дополнить новыми членами, несущими формпараметры. Это члены, порождаемые либо автомодельным решением с $\lambda = 1/6$ (ряд (3.2)), либо решением с $\lambda = 1/30$ (ряд (3.3)). При этом решение на физической плоскости следует представлять в деформированном виде. Поскольку в [12] использовался обычный метод разложения по автомодельным составляющим, дополнительные члены не обнаружены.

В [10, 13] замечено, что условие симметрии для решений u_2, u_3 не является существенным, поэтому (4.1), (7.1) позволяют строить несимметричные относительно оси x течения вдали от профиля, а также в соплах Лаваля.

Авторы выражают благодарность С. В. Фальковичу за полезное обсуждение.

Поступила 17 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Исследование по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. — «Докл. АН СССР», 1947, т. 57, № 7.
2. Франкль Ф. И. Об одном классе газодинамических уравнений С. А. Чаплыгина. — «Учен. зап. Моск. ун-та», 1951, вып. 154.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954.
4. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М., ИЛ, 1960.
5. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Об асимптотическом типе плоскопараллельного течения в окрестности центра сопла Лаваля. — «Докл. АН СССР», 1964, т. 154, № 2.
6. Фалькович С. В., Чернов И. А. Алгебраические автомодельные решения уравнений околосвукового плоского течения газа. — ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
7. Karman Th. The similarity law of transonic flow. — «J. Math. and Phys.», 1947, vol. 26, N 3.
8. Цветков А. П., Чернов И. А. Автомодельные околосвуковые течения, аналитические на предельной характеристике. — В кн.: Аэродинамика. Вып. 1(4). Саратов, изд. Сарат. ун-та, 1972.
9. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. — «Труды ВЦ АН СССР», 1965.
10. Брежнев А. Л., Чернов И. А. Построение высших приближений в задаче о специальных течениях в плоских соплах Лаваля. — ПММ, 1978, т. 42, вып. 2.
11. Karlin S. The role of coordinate systems in boundary layer theory. — «Z. Angew. Math. Phys.», 1967, Bd 5, S. 111—135.
12. Euvrard D. Étude asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son. I. — «J. Mécanique», 1967, vol. 6, N 4.
13. Цветков А. П., Чернов И. А. О некоторых течениях в окрестности центра сопла Лаваля. — «Учен. зап. ЦАГИ», 1978, т. 4, № 5.