

КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РАЗРЕЖЕННОЙ ПОЛНОСТЬЮ
ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

А. Н. Дюкалов

(Москва)

Для описания разреженной плазмы обычно используется система уравнений Власова. В [1] на простых примерах показано, что эта система не может полностью описать процессы в плазме. Метод построения решения, развитый в работе [1] в применении к простейшему плоскому случаю, ниже обобщается на широкий класс задач, которые удобно охарактеризовать как задачи с эмитирующими поверхностями (см., например, [1-4]).

Система уравнений Власова, обычно применяемая для описания разреженной плазмы, состоит из кинетического уравнения и уравнений самосогласованного поля. Кинетическое уравнение в приближении Власова есть уравнение в частных производных первого порядка, причем характеристиками этого уравнения являются траектории частиц в фазовом пространстве. Поэтому, если функция распределения задана на поверхности эмитера, то она однозначно определяется во всем пространстве, заполненном траекториями, пересекающими эту поверхность. Известно, однако, что возможны траектории, которые не пересекают эмитирующие поверхности. Это — траектории частиц, совершающих финитные движения. Функция распределения частиц, совершающих финитные движения, является, в приближении Власова, произвольной функцией. Это приводит к тому, что можно построить в известном смысле произвольное распределение потенциала [5]. В работах Г. И. Будкера и Т. С. Беляева [6] указан метод описания частиц, совершающих финитные движения. В этих работах показано, что функция распределения финитных частиц устанавливается под влиянием столкновений, а соответствующее уравнение получается после усреднения по угловым переменным, причем в результате этого усреднения функция распределения зависит от меньшего числа переменных. Уравнение, полученное при помощи усреднения по угловым переменным, является дифференциальным уравнением второго порядка, поэтому для его решения следует задать граничные условия для функции распределения финитных частиц на границе финитных движений.

В работе [1] показано, что для получения искомых граничных условий следует рассмотреть кинетическое уравнение в узком «пограничном» слое около границы финитных движений.

Таким образом, в общем случае в фазовом пространстве существуют три области, в каждой из которых функция распределения устанавливается под влиянием различных физических механизмов. В первой области, где движение частиц имеет инфинитный характер, функция распределения должна удовлетворять уравнению Власова. В другой области движение частиц носит финитный характер, и уравнение для функции распределения в этой области получается после усреднения по угловым переменным. В третьей области вблизи границы финитных движений функция распределения удовлетворяет уравнению пограничного слоя. Физический механизм возникновения пограничного слоя заключается в следующем. Как известно, в случае кулоновского потенциала взаимодействия наибольший эффект оказывают далекие столкновения, при которых отклонение частицы от первоначальной траектории в результате одиночного столкновения очень мало. Отклонение частицы от первоначальной траектории после прохождения некоторого отрезка траектории является результатом многократного повторения одиночных столкновений и пропорционально отношению пути, пройденного частицей, к длине свободного пробега. Так как в работе изучается поведение частиц в области, размеры которой малы по сравнению с длиной свободного пробега, то отклонение частицы от первоначальной траектории также мало. Однако в окрестности границы финитных движений даже малые отклонения от первоначальной траектории могут приводить к переходу частицы из одной области в другую. «Опасными», в смысле перехода, являются частицы, траектории которых лежат в узкой области около границы финитных движений.

1. Исследуем поведение электронной составляющей плазмы, помещенной в скрещенные электрическое и магнитное поля. Рассмотрим следующую задачу. В плоскости $x = 0$ расположен катод, эмитирующий электроны, потенциал катода примем равным нулю. В сечении $x = L$ расположен анод под потенциалом U^0 . Пространство между плоскостями $x = 0$, $x = L$ заполнено плазмой. Вдоль оси z приложено внешнее однородное магнитное поле B^0 . Предполагая, что все величины зависят только от x , получим для компонент вектора \mathbf{A} — потенциала магнитного поля $A_x = A_y = 0$, $A_z = A$. Для A и U имеем систему уравнений

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = 4\pi e (n_e - n_i), \quad \frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{4\pi e}{c} j_e \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$A(0) = 0, \quad U(0) = 0, \quad U(L) = U^0, \quad \left. \frac{dA}{dx} \right|_{x=L} = B^0 \quad (1.2)$$

Здесь U — электрический потенциал; j_e — плотность тока электронов; n_e — плотность электронов; n_i — плотность ионов; e — заряд электрона; c — скорость света.

Исследуем траектории электронов. Функция Гамильтона для электронов в самосогласованных полях с потенциалами U и A есть

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_x^2 + \left(p_y + \frac{e}{c} A \right)^2 + p_z^2 \right] - eU \quad (1.3)$$

Здесь m — масса электрона p_x, p_y, p_z — компоненты импульса электрона по осям x, y, z .

В рассматриваемом случае имеются три интеграла движения

$$u^2 + v^2 + w^2 - \frac{2e}{m} U = J_1, \quad v - \frac{e}{mc} A = J_2, \quad w = J_3 \quad (1.4)$$

Здесь u, v, w — проекции скорости электрона на оси x, y, z .

Движение электрона вдоль оси z происходит независимо от движения в плоскости xy . Рассмотрим проекцию траектории электрона на плоскость xy . Движение электрона в этой плоскости определяется уравнениями

$$u^2 + v^2 - 2eU/m = J_1, \quad v - eA/mc = J_2 \quad (J_1 = J_1^0 - J_3) \quad (1.5)$$

Из уравнений (1.5) видно, что если из них исключить v , то движение электрона можно рассматривать как квазиодномерное (см., например, [7]) с эффективной потенциальной энергией P

$$u^2 + P(x, J_2) = J_1, \quad P(x, J_2) = -\frac{2e}{m} U(x) + \left[J_2 + \frac{e}{mc} A(x) \right]^2 \quad (1.6)$$

Из уравнения (1.6) видно, что для того, чтобы u было действительно, должно выполняться неравенство

$$J_1 \geq P(x, J_2) \quad (1.7)$$

Таким образом, в каждой точке x область возможных значений J_1, J_2 , определяется условием (1.7). Если в пространстве x, J_1, J_2 построить поверхность

$$J_1 = P(x, J_2) \quad (1.8)$$

то область возможных значений J_1, J_2 в каждой точке x расположена выше этой поверхности. Назовем эту поверхность поверхностью эффективной

потенциальной энергии и обозначим буквой Π . Траектория электрона полностью определяется заданием J_1, J_2 . Следовательно, исследование поверхности Π доставляет все необходимые сведения о траекториях электронов, которые проходят через любую точку x .

Сечение поверхности Π плоскостью $x_1 = \text{const}$ есть парабола

$$J_1 = -\frac{2e}{m} U(x_1) + \left[J_2 + \frac{e}{mc} A(x_1) \right]^2 \quad (1.9)$$

с вершиной в точке $J_1 = -2eU/m, J_2 = -eA/mc$. Рассмотрим далее сечение поверхности Π плоскостью $J_2 = J_2^* = \text{const}$

$$J_1^* = -\frac{2e}{m} U(x) + \left[J_2^* + \frac{e}{mc} A(x) \right]^2 \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) представляет особый интерес: так оно определяет эффективную потенциальную энергию при фиксированном J_2 , а следовательно, позволяет исследовать квазиодномерное движение электрона, имеющего заданный обобщенный импульс. Исследуем плоскую кривую, определяемую уравнением (1.10), на наличие экстремумов. Точка экстремума x^* находится из условия

$$\frac{dJ_1^*}{dx} = \left[-\frac{2e}{m} \frac{dU}{dx} + \frac{2e}{mc} \left(J_2^* + \frac{e}{mc} A \right) \frac{dA}{dx} \right] = 0 \quad (1.11)$$

Характер экстремума зависит от знака выражения

$$\left. \frac{d^2 J_1^*}{dx^2} \right|_{x=x^*} = \left[-\frac{2e}{m} \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{2e}{mc} \left(J_2^* + \frac{e}{mc} A \right) \frac{d^2 A}{dx^2} + \frac{2e^2}{m^2 c^2} \left(\frac{dA}{dx} \right)^2 \right] \Big|_{x=x^*} \quad (1.12)$$

При $d^2 J_1^* / dx^2 > 0$ в точке x^* — минимум, при $d^2 J_1^* / dx^2 < 0$ — максимум. Если $d^2 J_1^* / dx^2 = 0$, то в точке x^* — точка перегиба.

При помощи указанной процедуры можно для каждого J_2 найти соответствующие J_1^* и x^* . Совокупность x^*, J_1^*, J_2^* образует пространственную кривую линию, принадлежащую поверхности Π . Назовем эту линию кривой экстремумов ее уравнения, согласно (1.10), (1.11) имеют вид

$$J_1 = -\frac{2e}{m} U(x) + \left[J_2 + \frac{e}{mc} A(x) \right]^2, \quad -\frac{dU}{dx} + \frac{1}{c} \left[J_2 + \frac{e}{mc} A(x) \right] \frac{dA}{dx} = 0 \quad (1.13)$$

Если в уравнениях (1.13) рассматривать x как параметр, то эти уравнения представляют собой заданную параметрически проекцию кривой экстремумов на плоскость интегралов движения $J_1 J_2$. Полезно отметить, что проекция кривой экстремумов на плоскость $J_1 J_2$ являетсягибающей семейства парабол на плоскости $J_1 J_2$, заданных уравнением (1.9), причем в этом уравнении x играет роль параметра. Приведем еще некоторые свойства проекции кривой экстремумов. Проекция параболы, образующейся от сечения поверхности Π плоскостью $x = \text{const}$, и проекция кривой экстремумов на плоскость $J_1 J_2$ имеют общую касательную в точке, общей обоим кривым. Так как кривая экстремумов состоит из двух ветвей: ветви, на которой выражение (1.10) принимает максимальные значения, и ветви, на которой выражение (1.10) минимально, то и проекция кривой экстремумов также состоит из двух ветвей, одну из которых назовем ветвью максимумов, другую (соответственно) — ветвью минимумов. Легко

показать, что точка сопряжения ветвей максимумов и минимумов является точкой возврата первого рода (см., например, [8]). Для дальнейшего исследования необходимо привлечение некоторых конкретных сведений о поведении электрического и магнитного потенциалов.

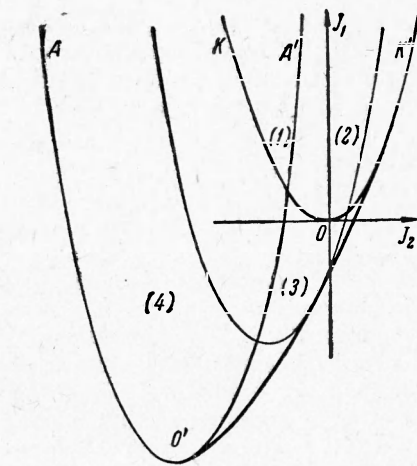
Так как $dA/dx = B$ (B — напряженность магнитного поля), то без ограничения общности можно считать, что $dA/dx > 0$, а из второго уравнения системы (1.1) следует, что $d^2A/dx^2 > 0$. Таким образом, всегда

$$\frac{dA}{dx} > 0, \quad \frac{d^2A}{dx^2} > 0 \quad (1.14)$$

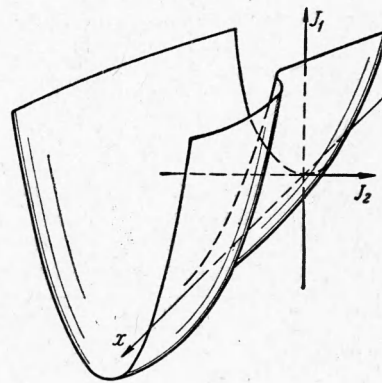
Относительно электрического потенциала нельзя сделать таких общих заключений. Функция $U(x)$ может быть немонотонной. Из теории вакуумного диода известно, что вблизи катода имеется минимум потенциала (см. [4]). Появление этого минимума связано с образованием около катода облака отрицательного пространственного заряда. При этом говорят, что катод работает в режиме, ограниченном пространственным зарядом. При наличии ионов облако пространственного заряда может быть нейтрализовано. Таким

образом, возможны два режима: режим с монотонным потенциалом и режим, ограниченный пространственным зарядом.

Рассмотрим сначала первый случай. Если электрический потенциал — монотонная функция x , то производная dU/dx знакопостоянна, причем, так как $U(0) = 0$, $U(L) > 0$, то $dU/dx > 0$. Здесь также могут представиться два случая в зависимости от знака выражения, определяемого формулой (1.12). Предположим сначала, что $d^2J_1^*/dx^2 > 0$, это означает, что проекция кривой экстремумов



Фиг. 2

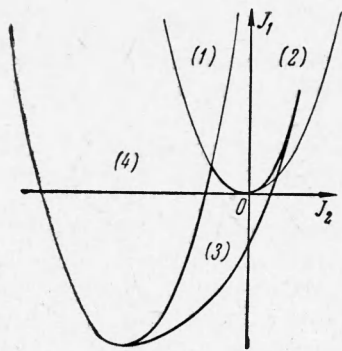


Фиг. 3

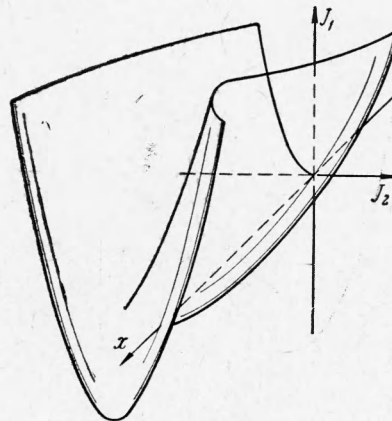
состоит только из ветви минимумов. Поверхность Π в этом случае получается особенно простой (фиг. 1).

Перейдем к анализу траекторий электронов, параллельно проводя разбиение плоскости интегралов движения на области, соответствующие

щие траекториям различных типов (фиг. 2). Плоскость $x = 0$ соответствует катоду. Следовательно, область возможных значений J_1, J_2 для электронов, стартовавших с катода, расположена выше параболы KOK' (фиг. 2), представляющей собой сечение поверхности Π плоскостью $x = 0$. Из фиг. 1 видно, что часть электронов, стартовавших с катода, при своем движении в положительном направлении оси x наталкивается на потенциальную стенку. В момент достижения стенки имеем $u = 0$. Затем электрон разворачивается и возвращается назад на катод. Из фиг. 1 видно



Фиг. 4



Фиг. 5

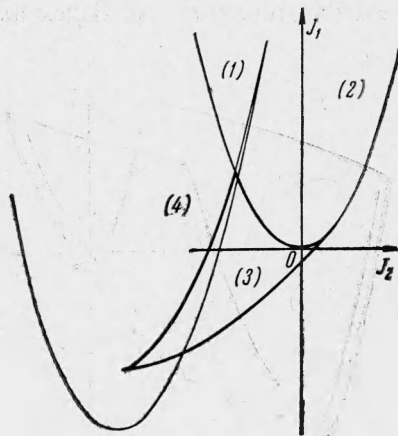
также, что часть электронов на своем пути к аноду не встречает препятствий в виде потенциальной стенки. Эти электроны достигают анода. Легко видеть, что это возможно лишь для тех электронов, у которых значения J_1, J_2 расположены выше параболы $AO'A'$ (фиг. 2), представляющей собой сечение поверхности Π плоскостью $x = L$ (плоскость $x = L$ соответствует аноду).

Далее, из фиг. 1 видно, что возможны траектории, не пересекающие плоскостей $x = 0$ и $x = L$. Это траектории электронов, которые при своем движении в положительном направлении вдоль оси x наталкиваются на потенциальную стенку, разворачиваются, движутся в отрицательном направлении вдоль оси, снова наталкиваются на потенциальную стенку и т. д. Движение этих электронов носит периодический характер. В соответствии с принятой терминологией, назовем эти электроны финитными. Таким образом, в плоскости интегралов движения имеются четыре характерные области (фиг. 2). Область 1 соответствует электронам, стартовавшим с катода и попадающим на анод; 2 — электронам, стартовавшим с катода и возвращающимся на катод; 3 — финитным электронам; в области 4 электроны отсутствуют, так как предполагается, что анод не эмитирует электроны.

Если $d^2J_1^* / dx^2$ меняет знак, то проекция кривой экстремумов имеет обе ветви. Пусть при $x = 0$ проекция кривой экстремумов начинается с ветви минимумов. При помощи рассуждений, аналогичных проведенным при анализе предыдущего случая, легко установить вид поверхности Π и разбиение плоскости интегралов движения (см. соответственно фиг. 3, 4). Поверхность Π и разбиение плоскости J_1J_2 в том случае, когда проекция кривой экстремумов начинается при $x = 0$ с ветви максимумов, приведены на фиг. 5, 6.

Рассмотрим теперь случай немонотонного потенциала. В этом случае $dU / dx < 0$ при $x = 0$, следовательно, согласно уравнениям (1.12),

(1.13), проекция кривой экстремумов начинается с ветви максимумов при $J_2 < 0$ и имеет отрицательную производную. При возрастании x значение dU/dx падает. В точке x , в которой $dU/dx = 0$, имеем $J_1 = eA/mc$. Это означает, что проекция кривой экстремумов проходит через вершину параболы, следовательно, проекция кривой экстремумов имеет горизонтальную касательную, так как в точке, общей параболе из семейства (1.9) и проекции кривой экстремумов, эти кривые имеют одинаковую касательную. Далее, проекция кривой экстремумов идет с положительным наклоном вплоть до сопряжения с ветвью минимумов. Дальнейшее построение проекции кривой экстремумов производится аналогично тому, как это сделано для случая монотонного потенциала. Поверхность Π и разбиение плоскости интегралов движения приведено на фиг. 7, 8.

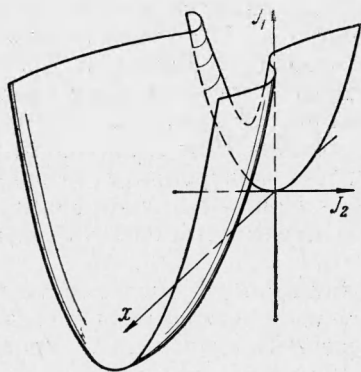


Фиг. 6

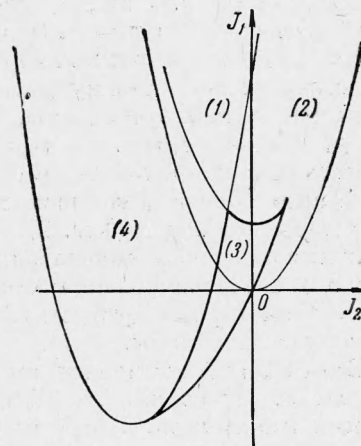
В заключение отметим, что в каждом из четырех разобранных случаев на плоскости интегралов движения имеются области, соответствующие финитным электронам. Эти области отмечены на фиг. 2, 4, 6 и 8 цифрой 3.

Разобранный выше пример является типичным для большинства задач, в которых изучается поведение плазмы на расстояниях малых, по сравнению с длиной свободного пробега. Как отмечалось выше, в общем случае в фазовом пространстве имеются три различные области, в каждой из которых функция распределения устанавливается под влиянием различных физических механизмов.

Для получения уравнений, которым должна удовлетворять функция распределения в каждой из трех областей фазового пространства, следует построить три асимптотических разложения кинетического уравнения, каждое из которых равномерно в своей области. (В работе [1] показано, что не существует одного асимптотического разложе-



Фиг. 7



Фиг. 8

ния, которое было бы равномерно во всей области определения независимых переменных.) При построении таких разложений в качестве исходных выбраны уравнения Н. Н. Боголюбова [9]. В случае слабонеоднородной плазмы можно было бы воспользоваться известными решениями для корреляционной функции и исследовать сразу уравнение типа Фоккера — Планка, при этом, как показано в работе [10], учет влияния

внешнего поля на столкновения частиц приводит к перенормировке кулоновского логарифма. Однако при получении соответствующих выражений для корреляционных функций существенно используется предположение о малости изменения одночастичной функции распределения на расстояниях порядка дебаевского радиуса. В случае сильно неоднородных состояний одночастичная функция распределения может сильно меняться на расстояниях порядка дебаевского радиуса (примером может служить задача о зонде Ленгмюра [2]). Как показано в работе [1], в этом случае выражение для корреляционной функции получается отличным от того, которое было бы в случае однородной плазмы.

2. Рассмотрим для простоты систему одноименно заряженных частиц, находящихся в поле равномерно размазанного заряда противоположного знака. Учет дискретного характера экранирующих зарядов и их движения проводится элементарно. Запишем цепочку самозацепляющихся уравнений Н. Н. Боголюбова в стационарном случае [9]

$$\sum_{1 \leq i \leq s} [H_i; F^s] + \sum_{1 \leq i < j \leq s} [\Phi_{ij}; F^s] + n \int \sum_{1 \leq i \leq s} [\Phi_{is+1}; F^{s+1} - F^s F(X_{s+1})] dX_{s+1} = 0$$

$$(s = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

Здесь F — одночастичная функция распределения; F^s — s — частичная функция распределения, $X = \{r, v\}$ — совокупность координат фазового пространства; r — радиус вектор частицы; v — скорость частицы; dX — элемент объема фазового пространства; H — гамильтониан частицы в самосогласованных полях; Φ_{ij} — потенциал взаимодействия между i -й и k -й частицами; n — плотность частиц; $[\dots, \dots]$ — скобки Пуассона

В гамильтониан H_i может входить член с магнитным полем, вызываемым токами в плазме, влиянием же релятивистских эффектов на парное взаимодействие между частицами можно пренебречь ($v/c \ll 1$), поэтому

$$\Phi_{ij} = \frac{e}{|r_i - r_j|} \quad (2.2)$$

В работе [1] показано, что отношение второго члена к первому мало и равно по порядку величины μ

$$\mu = \frac{1}{Ln^{1/3}}$$

Здесь L — характерный размер изучаемого явления.

Принимая, что перед вторым членом стоит малый параметр μ , построим разложение уравнений (2.1) по μ . В первом приближении по μ , полагая в уравнении (2.1) величину $\mu = 0$, получим

$$F^s = \prod_{1 \leq i \leq s} F_i, \quad [H_i; F_i] = 0 \quad (2.3)$$

Во втором приближении примем

$$F_{ik}^2(X_i, X_k) = F_i F_k + a_{ik}(\mu) g_{ik}$$

$$F^s = \prod_{1 \leq i \leq s} F_i + \sum_{1 \leq i, k \leq s} a_{ik} g_{ik} \prod_{(r \neq i, k)} F_r, \quad a_{ik}(\mu) \rightarrow 0 \quad \text{при } \mu \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.1), получим

$$[H_i; F_i] + \frac{e^2 n}{m} a_{ik} \int [\Phi_{ik}; g_{ik}] dX_k = 0$$

$$a_{ik} [H_i + H_k; g_{ik}] + \mu \frac{e^2}{m} [\Phi_{ik}; F_i F_k] + \mu \frac{e^2}{m} a_{ik} [\Phi_{ik}; g_{ik}] +$$

$$+ \frac{e^2 n}{m} a_{kj} \int [\Phi_{ij}; F_i g_{kj}] dX_j + \frac{e^2 n}{m} a_{ij} \int [\Phi_{kj}; F_k g_{ij}] dX_j = 0 \quad (2.5)$$

Прежде чем приступать к построению разложений, проведем некоторые вспомогательные преобразования. Введем вместо переменных X новые переменные $Y = \{t, J_1, \dots, J_5\}$, где J_α — интегралы движения частицы с гамильтонианом H ; t — время, отсчитываемое вдоль траектории частицы.

Для дальнейшего необходимо записать скобки Пуассона в виде, справедливом для любого набора координат (не обязательно канонически сопряженных). Пусть X — набор канонических координат, а Y — произвольный набор. Прямым вычислением можно убедиться, что

$$[F; G] = \frac{\partial F}{\partial Y^\alpha} \frac{\partial G}{\partial Y^\beta} [Y^\alpha; Y^\beta] \quad (2.6)$$

Здесь и далее по греческим индексам, встречающимся дважды, проводится суммирование.

Введем дифференциальный оператор, определяемый равенством

$$l_{ik}F = [\Phi_{ik}; F] = \left\{ \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial Y_i^\alpha} [Y_i^\alpha; Y_i^\beta] \frac{\partial F}{\partial Y_i^\beta} \right\} + \{ \dots \}_{i \rightarrow k} \quad (2.7)$$

Учитывая определение (2.7) и принимая во внимание, что в новых переменных $[H_i; F_i] = \partial F_i / \partial t_i$, запишем (2.5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial t_i} + \frac{e^2 n}{m} a_{ik} \int l_{ik} g_{ik} I dY_k = 0 \quad (2.8) \\ a_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial t_k} \right) g_{ik} + \mu \frac{e^2}{m} l_{ik} F_i F_k + \mu a_{ik} l_{ik} g_{ik} + \\ + \frac{e^2 n}{m} a_{kj} \int l_{ik} F_i g_{kj} I dY_j + \frac{e^2 n}{m} a_{ij} \int l_{kj} F_k g_{ij} I dY_j = 0 \end{aligned}$$

Здесь I — якобиан перехода от переменных X к переменным Y .

Пусть $\psi(X) = 0$ — уравнение поверхности, разделяющей траектории финитных и инфинитных частиц. Следуя терминологии, принятой в работе [1], будем называть пробными частицы, траектории которых лежат в узком слое около поверхности $\psi(X) = 0$. В качестве одной из переменных Y_i^α для пробных частиц выберем η — нормаль к поверхности $\psi(X) = 0$. Как показано в работе [1], вблизи поверхности $\psi(X) = 0$ следует ожидать больших значений производной функции распределения пробных частиц по нормали к этой поверхности¹

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} \gg \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta_i} \gg \frac{\partial}{\partial Y_k^\alpha} \quad (2.9)$$

Для того чтобы учесть это, положим

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{b(\mu)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \quad b(\mu) \rightarrow 0 \quad \text{при } \mu \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

Учитывая (2.9), (2.10) и отбрасывая малые члены в (2.7), получим для

$$l_{ik} = \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial Y_i^\alpha} [Y_i^\alpha; \eta] \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{b(\mu)} = \frac{1}{b(\mu)} l_{ik}^* \quad (2.11)$$

¹ При $\mu \rightarrow 0$ функция распределения, вообще говоря, терпит разрыв по нормали к поверхности $\psi(X) = 0$ ($\partial F / \partial \eta \rightarrow \infty$).

Таким образом, с учетом (2.11) система (2.8) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial t_i} + \frac{e^2 n}{m} \frac{a_{ik}(\mu)}{b(\mu)} \int l_{ik}^* g_{ik} IdY_k = 0 \quad (2.12) \\ a_{ik} = \left(\frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial t_k} \right) g_{ik} + \frac{e^2}{m} \frac{\mu}{b(\mu)} l_{ik}^* F_i F_k + \frac{e^2}{m} \mu \frac{a_{ik}(\mu)}{b(\mu)} l_{ik}^* g_{ik} + \\ + \frac{e^2 n}{m} \frac{a_{kj}(\mu)}{b(\mu)} \int l_{ij}^* F_i g_{kj} IdY_j + \frac{e^2 n}{m} a_{ij}(\mu) \int l_{kj} F_k g_{ij} IdY_j = 0 \end{aligned}$$

Исследуем систему (2.12) для пробных частиц. Пусть индекс i относится к пробной частице. Первый член во втором из уравнений (2.12) дает изменение во времени функции коррекции между i -й и k -й частицами вдоль траекторий частиц. Второй член описывает причину этого изменения — парное взаимодействие. Вблизи поверхности $\psi(X) = 0$ эти члены должны быть одинаковы по порядку величины, так как именно вследствие столкновений происходит переход частиц из одной области в другую. Приравнявая зависящие от μ коэффициенты у этих членов, получим

$$a_{ik}(\mu) = \frac{\mu}{b(\mu)} \quad (2.13)$$

Аналогично, рассматривая первое из уравнений (2.12), имеем

$$\frac{a_{ik}(\mu)}{b(\mu)} = 1 \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.14) следует, что

$$a_{ik}(\mu) = \sqrt{\mu}, \quad b(\mu) = \sqrt{\mu} \quad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.12) и устремляя μ к нулю, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial t_i} + \frac{e^2 n}{m} \int l_{ik}^{\circ} g_{ik} IdY_k = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial t_k} \right) g_{ik}^{\circ} + \frac{e^2}{m} l_{ik}^{\circ} F_i F_k + \\ + \frac{e^2 n}{m} \int l_{ij}^{\circ} F_i g_{kj} IdY_j + \frac{e^2 n}{m} \int l_{kj} g_{ij}^{\circ} F_k IdY_j = 0 \quad (2.16) \end{aligned}$$

Здесь $g_{i,k}^{\circ}$ — функция корреляции между двумя частицами, одна из которых (i -я) — пробная, а

$$l_{ik}^{\circ} = \lim l_{ik}^* \quad \text{при } \mu \rightarrow 0 \quad (2.17)$$

При вычислении функции корреляции для двух частиц, из которых ни одна не является пробной, положим, как и в работе [1], $a_{ik} = \mu$ и, оставая во втором из уравнений (2.5) члены низшего порядка по μ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial t_i} + \mu \frac{e^2 n}{m} \int l_{ik} g_{ik} IdY_k = 0 \quad (2.18) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial t_k} \right) g_{ik} + \frac{e^2}{m} l_{ik} F_i F_k + \frac{e^2 n}{m} \int l_{ik} F_i g_{kj} IdY_j + \frac{e^2 n}{m} \int l_{ik} F_k g_{ij} IdY_j = 0 \end{aligned}$$

В области фазового пространства, соответствующей инфинитным частицам, можно пренебречь правой частью в первом уравнении из (2.18), тогда получим для инфинитных частиц

$$\partial F / \partial t = 0, \quad F = F(J_1, \dots, J_5) \quad (2.19)$$

что соответствует уравнению Власова. Зависимость F от J_1, \dots, J_5 в (2.19) определяется из граничных условий на поверхности эмитеров.

Перейдем к получению уравнения, которому должна удовлетворять функция распределения финитных частиц. Для этого воспользуемся в видоизмененной форме методом, предложенным Г. И. Будкером и С. Т. Беляевым. Будем искать решение в виде асимптотического разложения

$$F = F_{(1)}(t, J_1, \dots, J_5) + \mu F_{(2)}(t, J_1, \dots, J_5) + \dots \quad (2.20)$$

Далее заметим, что функция распределения финитных частиц при фиксированных J_1, \dots, J_5 является периодической функцией t . Используя это, получим

$$\int_0^T dt \int l_{ik} g_{ik} IdY_k = 0, \quad T = T(J_1, \dots, J_5) \quad (2.21)$$

Воспользовавшись первым уравнением из системы (2.18) и разложением (2.20), получим, что в первом приближении $F_{(1)}$ не зависит от времени. Подставляя $F_{(1)}$ во второе уравнение системы (2.18) и комбинируя полученное уравнение с уравнением (1.21), получим искомую систему уравнений для функций распределения финитных частиц

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int l_{ik} g_{ik} IdY_k = 0, \quad & \left(\frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial t_k} \right) g_{ik} + \frac{e^2}{m} l_{ik} F_i F_k + \\ & + \frac{e^2 n}{m} \int l_{ij} F_i g_{kj} IdY_j + \frac{e^2 n}{m} \int l_{ik} F_k g_{ij} IdY_j = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

В выражении (2.22) второй нижний индекс у F , указывающий номер выбранного приближения в разложении (2.20), опущен. Следует, однако, помнить, что F_i и F_k в выражении (2.22) не зависят от t , так как здесь и далее мы ограничимся лишь первым приближением.

Для решения системы (2.22) следует задать граничные условия для функции распределения финитных частиц на границе финитных движений (поверхность $\psi(X) = 0$). Искомые граничные условия могут быть получены из уравнений (2.16).

В работе [11] показано, что граничные условия для уравнений (2.16) получаются из условия сопряжения решения уравнений пограничного слоя и «внешнего» решения. Эти условия таковы:

$$F \rightarrow \Phi_{1,\psi} = \Phi_1^\circ \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow \underline{\infty}, \quad F \rightarrow \Phi_{2,\psi} = \Phi_2^\circ \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow -\underline{\infty} \quad (2.23)$$

Здесь и далее индекс ψ означает значение функции на поверхности $\psi(X) = 0$, а Φ_1 — функцию распределения инфинитных частиц, Φ_2 — функцию распределения финитных частиц.

При помощи преобразования

$$\bar{F} = \frac{\Phi_1^\circ + \Phi_2^\circ}{2} + \frac{\Phi_1^\circ - \Phi_2^\circ}{2} \chi, \quad g_{ik}^\circ = \frac{\Phi_1^\circ - \Phi_2^\circ}{2} G_{ik} \quad (2.24)$$

граничные условия (2.23) заменяются на

$$\chi \rightarrow 1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow \infty, \quad \chi \rightarrow -1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow -\infty \quad (2.25)$$

Подставляя (2.24) в (2.16), получим для χ систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_i}{\partial t} + \frac{e^2 n}{m} \int l_{ik}^\circ G_{ik} IdY_k = 0, \quad & \left(\frac{\partial}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial t_k} \right) G_{ik} + \frac{e^2}{m} l_{ik} \chi_i F_k + \\ & + \frac{e^2 n}{m} \int l_{ij}^\circ \chi_i g_{kj} IdY_j + \frac{e^2 n}{m} \int l_{kj} F_k G_{ij} IdY_j = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

с граничными условиями (2.25). Далее заметим, что поток частиц вдоль траекторий в пограничном слое около границы финитных движений в фазовом пространстве дает следующее выражение:

$$q = \int_0^{\infty} F(t, J_1, \dots, J_5) d\varepsilon$$

Используя уравнение (2.16), получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{e^2 n}{m} \int \left[\int_0^{\infty} l_{12}^{\circ} g_{12}^{\circ} d\varepsilon \right] IdY_2$$

или, подставляя l_{ik}° в явном виде,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{e^2 n}{m} \int \left\{ l_{12}^{\circ} \left[Y_1^{\alpha}; \eta \right] \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial Y_1^{\alpha}} \right\}_{\downarrow} g_{12} \Big|_{\varepsilon=0} IdY_2$$

Разность $Q = q(t_2) - q(t_1)$, где t_1, t_2 соответствуют началу и концу области финитных движений вдоль траектории (см. [1,11]), дает поток через границу финитных движений

$$Q = \frac{e^2 n}{m} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int \left\{ \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial Y_1^{\alpha}} [Y_1^{\alpha}; \eta] \right\}_{\downarrow} g_{12} \Big|_{\varepsilon=0} IdY_2 \right] dt$$

Заменяя g на G , получим

$$Q = (\Phi_1^{\circ} - \Phi_2^{\circ}) \left[\frac{e^2 n}{2m} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int \left\{ \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial Y_1^{\alpha}} [Y_1^{\alpha}; \eta] \right\}_{\downarrow} G_{12} \Big|_{\varepsilon=0} IdY_2 \right] dt \right] \quad (2.27)$$

Уравнение (2.27), связывающее функции распределения по обе стороны границы финитных движений и поток частиц в фазовом пространстве через границу финитных движений, является искомым граничным условием для функции распределения финитных частиц. Это граничное условие замыкает задачу отыскания функции распределения во всем фазовом пространстве.

Поступила 7 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюкалов А. Н. Исследование кинетического уравнения системы заряженных частиц в случае редких столкновений. ПМТФ, 1963, № 2.
2. I r a V. B e r n s t e i n and I r v i n g N. R a b i n o v i t z. Theory of Electrostatic Probes in Low Density Plasma. Phys. Fluids, 1959 vol. 2, No. 2.
3. H a r o l d G r a d. Boundary Layer between a Plasma and a Magnetic Field. Phys. Fluids, 1961, vol. 4, No. 1.
4. В а й н ш т е й н Л. А. Теория дробового эффекта при наличии пространственного заряда. Советское радио, М., 1948.
5. Б е р н ш т е й н, Г р и н, К р а с к а л. Строгая теория нелинейных колебаний плазмы. Сб. «Колебания сверхвысоких частот в плазме». Изд. иностр. лит., М., 1961.
6. Б у д к е р Г. И., Б е л я е в С. Т. Кинетическое уравнение для электронного газа при редких столкновениях. Сб. «Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций». Изд-во АН СССР, М., 1958, т. 2, стр. 33.
7. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика. Физматгиз, 1958.
8. Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. ОГИЗ — Гостехиздат, М.—Л., 1948.
9. Б о г о л ю б о в Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, М., 1946.
10. Б е л я е в С. Т. Кинетическое уравнение для разряженных газов в сильных полях. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», Изд-во АН СССР, М., 1958, т. 3, стр. 50.
11. Д ю к а л о в А. Н. Граничные условия для функции распределения заряженных частиц, совершающих финитные движения. ПМТФ, 1963, № 4.