

О ЗАПАСЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Л. Г. Бадратинова

(Новосибирск)

Определение запаса устойчивости состояния равновесия капиллярной жидкости дано в [1].

В данной работе находится оценка сверху для запаса устойчивости кругового цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости, заключенной между двумя параллельными пластинами. Вопрос об устойчивости этого состояния изучался в работе [2], а задача о ветвлении рассматривалась в работах [3—6]. С целью получения оценки для запаса устойчивости кругового столба ниже исследуются все осесимметричные и плоские формы равновесия жидкости, заключенной между параллельными пластинами и вращающейся вместе с ними как твердое тело вокруг оси, к ним нормальной. Открытым остается вопрос о границах существования пространственных (обнаруженных в [5]) форм и об их влиянии на запас устойчивости. Интересно было бы рассмотреть задачу и с учетом возможности отрыва масс жидкости от вращающегося столба.

1. Пусть между двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии L друг от друга, заключена невесомая вязкая жидкость с коэффициентом поверхностного натяжения σ , плотностью ρ и объемом $\pi r_0^2 L$. Жидкость вместе с пластинами вращается как одно твердое тело с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, нормальной к плоскости пластин. Центр масс жидкости находится на оси вращения. Угол смачивания равен $\pi/2$.

Введем безразмерные переменные, выбрав в качестве масштабов длины, скорости и давления величины r_0 , ωr_0 , $\rho \omega^2 r_0^2$. Пусть η , α , z — вращающаяся цилиндрическая система координат, жестко связанная с пластинами. Ось z направлена по оси вращения, $z = 0$ и $z = l = L/r_0$ — уравнения плоскостей пластин. О равновесии жидкости относительно этой системы координат будем говорить как о равновесии вращающейся жидкости.

При всех значениях безразмерного параметра $\beta = \rho \omega^2 r_0^3 / \sigma$ одной из возможных форм равновесия вращающейся жидкости является круговая цилиндрическая поверхность радиуса $\eta \equiv 1$ [2]:

Осесимметричная равновесная поверхность ω характеризуется линией Γ ее пересечения с полуплоскостью $\alpha = \text{const}$. Рассмотрим осесимметричные формы, для которых при движении ω вдоль Γ от пластины $z = 0$ к пластине $z = l$ расстояние от оси вращения изменяется монотонно. Такие формы будем называть простыми. В случае монотонного возрастания простые формы равновесия вида $z = Z(\eta)$ определяются из уравнения [2]

$$(1.1) \quad 2H = (\beta/2)\eta^2 + c,$$

где H — средняя кривизна поверхности

$$(1.2) \quad H = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\eta Z'}{(1 + Z'^2)^{1/2}} \right)'$$

Сюда добавляется условие (угол смачивания равен $\pi/2$)

$$(1.3) \quad Z'(\eta_0) = Z'(\eta_1) = \infty,$$

условие сохранения объема жидкости

$$(1.4) \quad \int_{\eta_0}^{\eta_1} \eta^2 Z' d\eta = l,$$

а также соотношение

$$(1.5) \quad \int_{\eta_0}^{\eta_1} Z' d\eta = l,$$

выражающее тот факт, что расстояние между пластинами равно l . Здесь и ниже штрих означает дифференцирование по η ; c — неизвестная постоянная; η_0 и η_1 — соответственно наименьшее и наибольшее удаления равновесной поверхности от оси вращения.

Подстановка (1.2) в (1.1) и интегрирование дают

$$(1.6) \quad \frac{\eta Z'}{(1+Z'^2)^{1/2}} = \frac{\beta}{8} \eta^4 + \frac{c}{2} \eta^2 + c_1$$

(c_1 — постоянная интегрирования).

Уравнения (1.3)—(1.6) определяют двухпараметрическое семейство простых осесимметричных форм с точностью до преобразования $z = l - z$.

2. Для изучения свойств осесимметричных форм выберем в качестве независимых параметров следующие:

$$(2.1) \quad \theta = \eta_0/\eta_1, \quad b = \beta(1+\theta)\eta_1^3/8.$$

Из предельных уравнений, получающихся из (1.6) с учетом условий (1.3), находятся выражения констант c и c_1 через параметры θ , b , η_1 :

$$(2.2) \quad c = 2[1 - b(1 + \theta^2)]/[\eta_1(1 + \theta)], \\ c_1 = \theta\eta_1(1 + b\theta^2)/(1 + \theta).$$

Подставим эти выражения в уравнение (1.6) и разрешим его относительно Z' . В полученном уравнении, а также в условиях (1.4), (1.5) перейдем к новым переменным $x = z/\eta_1$, $r = \eta/\eta_1$. В результате из уравнения (1.6), вводя обозначение

$$(2.3) \quad u(r, \theta, b) = \frac{r^2 + \theta - b(1-r^2)(r^2 - \theta^2)}{\sqrt{(1+r)(r+\theta)(1+2b(r^2+\theta) - b^2(1-r^2)(r^2 - \theta^2))}},$$

получим уравнение

$$(2.4) \quad \frac{dx}{dr} = \frac{u(r, \theta, b)}{\sqrt{(1-r)(r-\theta)}},$$

из которого

$$(2.5) \quad x = X(r, \theta, b) = \int_{\theta}^r \frac{u(\tau, \theta, b) d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}},$$

а из условий (1.4), (1.5) найдем зависимость η_1 и l от параметров θ , b

$$(2.6) \quad \eta_1 = \left[\int_{\theta}^1 \frac{u(\tau, \theta, b) d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}} \right]^{1/2} \left/ \left[\int_{\theta}^1 \frac{\tau^2 u(\tau, \theta, b) d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}} \right]^{1/2} \right.;$$

$$(2.7) \quad l = F(\theta, b) = \left[\int_{\theta}^1 \frac{u(\tau, \theta, b) d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}} \right]^{3/2} \left/ \left[\int_{\theta}^1 \frac{\tau^2 u(\tau, \theta, b) d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}} \right]^{1/2} \right.$$

По заданным значениям θ и b форма равновесия определяется параметрически с помощью уравнений (2.3), (2.5), (2.6) и формул

$$z = \eta_1 X(r, \theta, b), \quad \eta = \eta_1 r, \quad \theta \leq r \leq 1.$$

На фиг. 1 изображена зависимость $F(\theta, b)$, вычисленная по формуле

(2.7) с помощью ЭВМ. Простые осесимметричные формы равновесия существуют лишь при $l < \pi$.

Кривая, отвечающая значению $b = 0$, соответствует формам равновесия покоящейся жидкости. Такие формы существуют, если $l \geq F(0, 0) = \sqrt{1,5}$. Если $\theta = 0$ ($0 < l < \sqrt{1,5}$), то $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dX}{dr} = 0$ и краевое условие на пластине $z = 0$ нарушается. В этом вырожденном случае получаем равновесные фигуры вращающейся жидкой капли, висящей на пластине $z = l$. При $b = 0$ капля покоится, а ее поверхность имеет форму полусферы радиуса $l = \sqrt{1,5}$. С учетом того, что задача о формах равновесия инвариантна относительно зеркального отражения в плоскости $z = l$, можно сказать, что при $\theta = 0$ получаются фигуры равновесия изолированной вращающейся капли. Такие фигуры изучались ранее многими авторами (см. библиографию к [1]), в частности, их устойчивость исследована в [7].

Штриховой линией изображена кривая $l = F(\theta, B)$, где $B = (1 + \theta)^{-1} \times (1 - \sqrt{\theta})^{-2}$. Формы, для которых точка $F(\theta, b)$ лежит выше этой кривой, однозначно проектируются на ось z , в противном случае они проектируются на ось вращения неоднозначно. Это следует из уравнения (2.4) и следующего свойства функции $u(r, \theta, b)$, справедливого для всех значений $\theta \in [0, 1)$: при $b < B$ для всех $r \in [\theta, 1]$ функция $u(r, \theta, b) > 0$ (за исключением случая $r = \theta = 0$, где $dX/dr = 0$), а при $b > B$ существует такой интервал $\Delta \in (0, 1)$, что для всех r из Δ функция $u(r, \theta, b) < 0$. Если $\theta = 0$, то $B = 1$, что согласуется с результатом работы [7].

При $\theta \rightarrow 1$ равновесные фигуры стремятся к круговой цилиндрической поверхности. Из формул (2.6), (2.7) после замены переменной интегрирования $\tau = (1 + \theta)/2 + (1 - \theta)t/2$ находим, что при $\theta = \theta^* = 1$ параметр $\eta_1 = 1$, а $l = \pi/\sqrt{1 + 4b}$; отсюда с учетом (2.1) получаем формулу

$$(2.8) \quad \beta^* = 4b^* = (\pi/l)^2 - 1,$$

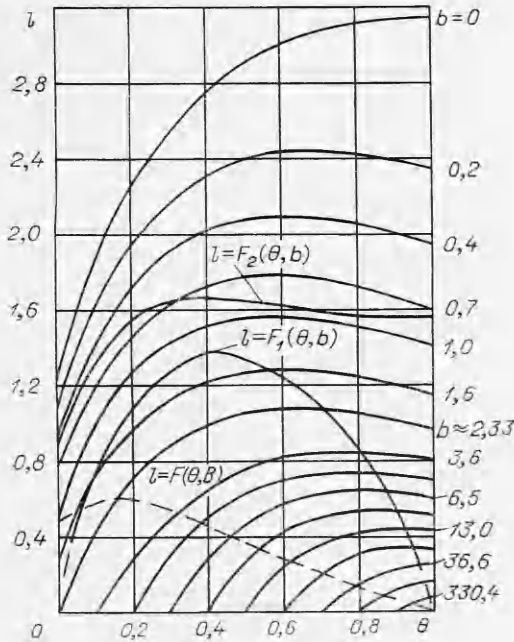
совпадающую с условием ветвления круговой цилиндрической поверхности, найденным в [4, 6].

При $l = 0$ задача о ветвлении кругового цилиндрического состояния равновесия не имеет смысла. Система условий (1.4), (1.5) в этом случае несовместна. Если, однако, изменить условие (1.4), например, приравнять

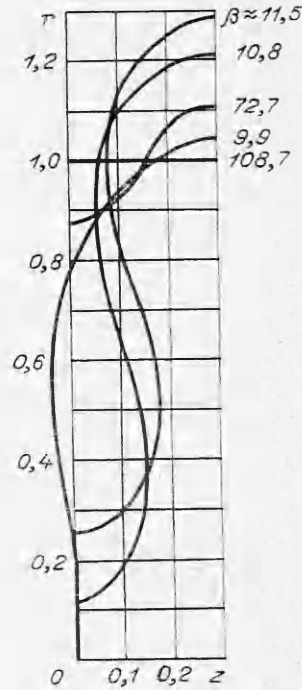
объем жидкости к объему шара единичного радиуса $\left(\int_{\eta_0}^{\eta_1} \eta^2 Z' d\eta = 4/3 \right)_z$

то при $l = 0$ уравнения (1.3)–(1.6) будут определять однопараметрическое семейство торообразных фигур равновесия. Известно [1], что все такие фигуры неустойчивы. Кривая $l = F(\theta, b_0)$, где $b_0 = 2,32912$, исходит из начала координат. Значение b_0 вычислено методом Ньютона из уравнения $\int_0^1 [u(\tau, 0, b)/\sqrt{\tau(1-\tau)}] d\tau = 0$. При $b = b_0$ перестают существовать фигуры равновесия вращающейся капли, пересекающие ось вращения, и, начиная с этого значения, существуют торообразные формы. По поводу определения критического значения b_0 существовала дискуссия (см. [1, 8]), которая была разрешена в [7]. Найденное в данной работе значение b_0 совпадает со значением, полученным в [7] и подтвержденным позднее в [8].

При $b > b_0$ зависимость $F(\theta, b)$ построена для значений b_i таких, что при $l = 0$ и $b = b_i$ параметр $\theta = \theta_i = 0,1i$ ($i = 1, 3, \dots, 9$). Числа b_i вычислялись методом Ньютона из уравнения $\int_{\theta_i}^1 [u(\tau, \theta_i, b)/\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta_i)}] d\tau = 0$.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

$\times d\tau = 0$ (для $\theta_i = 0,05i$, $i = 1, 2, \dots, 19$), причем за начальное приближение для b_i выбиралось значение b_{i-1} , полученное на предыдущем шаге.

Пусть $k \geq 2$ — целое число. Обозначим через Γ_i ($i = 0, 1, \dots, k-1$) участок дуги меридионального сечения Γ , заключенный между плоскостями $z = il/k$ и $z = (i+1)l/k$. Будем говорить, что форма равновесия Γ имеет кратность k , если Γ_0 — простая кривая, а для каждого $i \geq 1$ участок Γ_i получается из Γ_{i-1} зеркальным отражением в плоскости $z = il/k$.

Ветвь осесимметричных форм кратности k ответвляется от цилиндрического состояния при значениях $\beta_k = k^2(\pi/l)^2 - 1$.

Любая осесимметричная форма равновесия или простая, или кратная. Действительно, если две простые равновесные поверхности «продолжают» друг друга, образуя одну осесимметричную форму, то каждая из них однозначно определяется по трем параметрам: η_0 , η_1 и β (η_0 , η_1 , β), где η_0 — значение η в плоскости «контакта», а η_1 и η_1 — на твердых плоскостях. Но в силу непрерывности средней кривизны из формул (1.1), (2.1) и (2.2) следует равенство $2/(\eta_0 + \eta_1) - \beta(\eta_0^2 + \eta_1^2)/2 = 2/(\eta_0 + \eta_1) - \beta(\eta_0^2 + \eta_1^2)/2$, которое справедливо лишь при $\eta_1 = \eta_1$.

При $l > \pi$ существуют лишь кратные формы.

Зафиксируем l и найдем зависимость $b(\theta)$, для этого линеаризуем уравнение (2.7) в окрестности критических значений θ^* , b^* :

$$F(\theta^*, b^*) - l + \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta^*, b^*)(\theta - \theta^*) + \frac{\partial F}{\partial b}(\theta^*, b^*)(b - b^*) = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $F(\theta^*, b^*) = l$, находим

$$b = b^* + (\theta^* - \theta) \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta^*, b^*) / \frac{\partial F}{\partial b}(\theta^*, b^*).$$

Полагая в этой формуле $\theta = \theta_h = \theta^* - h$ (при численном счете значение

h выбиралось равным 10^{-2}), получаем приближенное решение b_h уравнения (2.7). Линеаризуя уравнение $F(\theta_h, b) - l = 0$ в окрестности $b = b_h$, находим формулу для уточнения корня b_h

$$b = b_h + (l - F(\theta_h, b_h)) \left/ \frac{\partial F}{\partial b}(\theta_h, b_h) \right.$$

По этой формуле значение b_h уточнялось до тех пор, пока разность $|b - b_h|$ не становилась меньше 10^{-6} . Для уточненного значения b_h и $\theta = \theta_h$ равенство (2.7) выполнялось с точностью до шести знаков после запятой. Передвигаясь таким образом с шагом h по θ в сторону уменьшения θ , находим зависимость $b(\theta)$. На каждом шаге вычислялись также значения $\eta_1(\theta)$ и $\beta(\theta)$ (формулы (2.6), (2.1)). Выражения для $\partial F / \partial \theta$, $\partial F / \partial b$ не приводятся ввиду их громоздкости.

На фиг. 2 приведены меридиональные сечения равновесных поверхностей для $l = 0,3$ и некоторых значений параметра θ (по которым однозначно определяются значения β). Интересно, что при малых β равновесные формы пересекают плоскость $z = 0$. Такие формы физически реализуемы, если размеры пластины $z = 0$ достаточно малы. При $\beta = 9,93$ ($\theta = 0$) форма равновесия вырождается во вращающуюся каплю, имеющую у своего полюса небольшое углубление.

3. Исследуем устойчивость в смысле Ляпунова—Румянцева [1] осесимметричных равновесных состояний жидкости. Пусть Γ — простая форма равновесия, s — отношение длины дуги Γ , отсчитываемой от пластины $z = 0$ к наибольшему удалению η_1 кривой Γ от оси вращения, а $N(s, \alpha)$ — отнесенная к η_1 нормальная составляющая возмущения свободной поверхности. Исходя из принципа минимума потенциальной энергии [1, 8], вопрос об устойчивости осесимметричной формы Γ можно свести к проблеме собственных значений следующей линейной краевой задачи относительно функции $N(s, \alpha)$:

$$(3.1) \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} \left(r \frac{\partial N}{\partial s} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha^2} + aN + \mu = \lambda N \quad \begin{cases} 0 \leq s \leq s_1, \\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi \end{cases};$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial N}{\partial s} = 0 \quad (s = 0), \quad \frac{\partial N}{\partial s} = 0 \quad (s = s_1);$$

$$(3.3) \quad \int_0^{s_1} \int_0^{2\pi} Nr ds d\alpha = 0, \quad \int_0^{s_1} \int_0^{2\pi} Nr \cos \alpha ds d\alpha = \int_0^{s_1} \int_0^{2\pi} Nr \sin \alpha ds d\alpha = 0.$$

Здесь s_1 — значение s в точке пересечения Γ с плоскостью $z = l$. По заданным значениям θ и b величина s_1 определяется формулой

$$(3.4) \quad s_1 = (1 + \theta) \int_0^1 \frac{rG(r, \theta, b) dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-\theta^2)}},$$

где

$$(3.5) \quad G(r, \theta, b) = 1/\sqrt{1 + 2b(r^2 + \theta) - b^2(1-r^2)(r^2-\theta^2)}.$$

Функция a выражается через среднюю кривизну H и гауссову кривизну $K = Z'Z'' / [(1 + Z'^2)^2]$ по формуле

$$(3.6) \quad \eta_1^2 a = -\frac{\partial H}{\partial n} - 4H^2 + 2K, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla,$$

\mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности, направленный внутрь области, занятой жидкостью; первое равенство (3.3) выражает условие сохранения объема жидкости, а второе означает допустимость лишь таких возмущений, которые оставляют центр масс жидкости на оси вращения;

зависимость r от s определяется уравнением

$$(3.7) \quad s = J(r) = (1 + \theta) \int_0^r \frac{\tau G(\tau, \theta, b) d\tau}{V(1 - \tau^2)(\tau^2 - \theta^2)}.$$

Собственные значения задачи (3.4)–(3.7) вещественны. Если наименьшее собственное значение λ_* положительно, то соответствующее равновесное состояние вязкой жидкости устойчиво, если λ_* отрицательно, то неустойчиво.

Представляя функцию $N(s, \alpha)$ в виде ряда $N = \varphi_0(s) + \sum_{m=1}^{\infty} [\varphi_m(s) \cos m\alpha + \psi_m(s) \sin m\alpha]$, можно показать, что $\lambda_* = \min(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, где λ_0 — наименьшее из собственных значений задачи

$$(3.8) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\varphi_0}{ds} \right) - a\varphi_0 - \mu + \lambda\varphi_0 = 0 \quad (0 \leq s \leq s_1);$$

$$(3.9) \quad \frac{d\varphi_0}{ds} = 0 \quad (s = 0, s = s_1), \quad \int_0^{s_1} \varphi_0 r ds = 0,$$

а числа λ_m ($m = 1, 2$) определяются аналогично для задач

$$(3.10) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left(r \frac{d\varphi_m}{ds} \right) - \left(a + \frac{m}{r^2} \right) \varphi_m + \lambda\varphi_m = 0 \quad (0 \leq s \leq s_1),$$

$$\frac{d\varphi_m}{ds} = 0 \quad (s = 0, s = s_1), \quad \int_0^{s_1} \varphi_m r^2 ds = 0 \quad (m = 1, 2).$$

Из формулы (3.6) после небольших преобразований получаем

$$(3.11) \quad a = - \frac{2}{(1 + \theta)^2} \left[4bP + \left(\frac{P}{r^2} - Q \right)^2 - Q^2 \right],$$

где

$$(3.12) \quad P = r^2 + \theta - b(1 - r^2)(r^2 - \theta^2); \\ Q = 2br^2 + 1 - b(1 + \theta^2).$$

Собственные значения задач (3.8)–(3.10) вычислялись методом Галеркина—Рунца [9].

Пусть $\{y_k(s)\}_{k=1,2,\dots}$ — полная система функций, удовлетворяющих условиям (3.9):

$$y_1 = 2s^3 - 3s^2s_1 - \frac{J_1}{J_0}, \quad y_k = s^2(s - s_1)^k - \frac{J_k}{J_0} \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$J_0 = \int_0^{s_1} r ds = (1 + \theta) \int_0^1 \frac{r^2 G(r, \theta, b) dr}{V(1 - r^2)(r^2 - \theta^2)},$$

$$(3.13) \quad J_1 = \int_0^{s_1} (2s^3 - 3s^2s_1) r ds = (1 + \theta) \int_0^1 \frac{r^2 [2J^3(r) - 3J(1)J^2(r)] G(r, \theta, b) dr}{V(1 - r^2)(r^2 - \theta^2)},$$

$$J_k = \int_0^{s_1} s^2(s - s_1)^2 r ds = (1 + \theta) \int_0^1 \frac{r^2 J^2(r) [J(r) - J(1)]^2 G(r, \theta, b) dr}{V(1 - r^2)(r^2 - \theta^2)}.$$

Разыскивая $\varphi_0(s)$ в виде ряда $\varphi_0 = \sum_{k=1}^n d_k y_k(s)$ и добиваясь ортогональности левой части уравнения (3.8) функциям y_1, \dots, y_n , приходим к системе уравнений

$$(3.14) \quad \sum_{p=1}^n (\alpha_{p,q} + \lambda \gamma_{p,q}) d_p = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$(3.15) \quad \alpha_{p,q} = -(1 + \theta) \int_0^1 \left(\frac{dy_p}{ds} \frac{dy_q}{ds} + a y_p y_q \right) \frac{r^2 G(r, \theta, b) dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-\theta^2)}};$$

$$\gamma_{p,q} = (1 + \theta) \int_0^1 y_p y_q r^2 \frac{G(r, \theta, b) dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-\theta^2)}}.$$

Функции y_k и их производные, стоящие в (3.15) под знаком интеграла, предполагаются выраженными через r посредством формул (3.7), (3.13). Приравнявая к нулю определитель системы (3.14), получаем уравнение

$$(3.16) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} + \lambda \gamma_{1,1} & \dots & \alpha_{n,1} + \lambda \gamma_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,1} + \lambda \gamma_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} + \lambda \gamma_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

наименьший из корней которого дает приближенное значение λ_0 (приближение с избытком). Аналогично получают уравнения для нахождения λ_1 и λ_2 .

При численном счете набор параметров θ, b выбирался следующим образом. Вначале для каждого фиксированного значения $b_i = 0,04i$ ($i=0,1, \dots, 58$) параметр θ изменялся с шагом 0,05 от нуля до 0,95. Затем фиксировались такие значения b_i ($i=1, 2, \dots, 18$), для которых кривая $l = F(\theta, b_i)$ пересекает ось $l=0$ при значении $\theta_i = 0,05i$; при каждом значении b_i в этом случае параметр θ изменялся с прежним шагом на отрезке $[\theta_i, 0,95]$. Для каждой пары (θ, b) коэффициенты α_{pq} и γ_{pq} вычислялись по формулам (3.15), после чего из уравнения (3.16) при числе координатных функций $1, 2, \dots, n$ находились приближения $\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}, \dots, \lambda_0^{(m)}$ (соответственно $\lambda_m^{(1)}, \lambda_m^{(2)}, \dots, \lambda_m^{(m)}$, $m=1, 2$). Для доказательства неустойчивости всех простых форм (следовательно, и кратных) оказалось достаточным вычислить всего лишь значения $\lambda_0^{(1)}$ при $\theta < 0,95$ и числа $\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}, \lambda_0^{(3)}$ при $\theta = 0,95$; если $\theta < 0,95$, то для всех наборов параметров (θ, b) значения $\lambda_0^{(1)}$ отрицательны, а при $\theta = 0,95$ отрицательны числа $\lambda_0^{(3)}$ (и близки к нулю).

При $\theta = 1, r \equiv 1$ уравнения (3.8)–(3.12) составляют задачу об устойчивости цилиндрического равновесного состояния [2]. Критическим значениям параметра b , определяемым формулой (2.8), соответствуют собственные числа $\lambda_n = 0$.

Численные расчеты показали, что для нахождения значений λ_1 и λ_2 с точностью до двух знаков после запятой, достаточно ограничиться числом координатных функций $n=4$. Для $n=3,4$ уравнение (3.16) решалось методом Ньютона, в качестве начального приближения для $\lambda_m^{(n)}$ принимался корень $\lambda_m^{(n-1)} > \lambda_m^{(n)}$. При $b=0$ значения $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. При фиксированном θ с ростом b числа λ_1 и λ_2 монотонно убывают. Кривая $l = -F_1(\theta, b)$ (см. фиг. 1) построена по тем значениям θ и b , для которых $\lambda_1=0$, на кривой $l = F_2(\theta, b)$ обращается в нуль число λ_2 . В частности, при $l = F_2(1, 3/4) = \pi/2$ значение $\lambda_2 = 0$ [2], и, согласно результатам [5], при этих значениях параметров, помимо осесимметричной и плоской рав-

новесных форм, от кругового цилиндрического состояния равновесия ответвляется также и пространственная. Вполне вероятно, что ветвление осесимметричных состояний происходит при $l = F_2(\theta, b)$ (возможно также и при $l = F_1(\theta, b)$).

Результаты исследования устойчивости вращающейся вязкой капли изложены в [1]. Изолированная вязкая капля устойчива для $0 \leq b \leq b_{10} \approx 0,4587$. При переходе через значение b_{10} теряется устойчивость относительно возмущений по второй гармонике. Согласно результатам данной работы, капля, заключенная между параллельными пластинами ($\theta = 0$), неустойчива (относительно осесимметричных возмущений) при всех значениях параметра b . Различие результатов объясняется тем, что при сколь угодно малых возмущениях, удовлетворяющих условиям смачивания на принудительно вращающихся с постоянной угловой скоростью пластинах, через их участки, соприкасающиеся с жидкостью, происходит подкачка энергии в систему, которая приводит к росту возмущений. Любопытно, что и покоящаяся капля, соприкасающаяся с параллельными пластинами, неустойчива.

4. Цилиндрическая равновесная поверхность характеризуется линией пересечения с плоскостью $z = \text{const}$. Рассмотрим неосесимметричные цилиндрические фигуры, нормальное сечение которых обладает симметрией n -го порядка относительно оси z ($n = 2, 3, \dots$). О таких фигурах будем говорить как о плоских формах равновесия кратности $2n$. Плоская форма кратности $2n$ определена (с точностью до поворотов вокруг оси z), если известна зависимость $\alpha = A_1(\eta)$, задающая простой участок ее нормального сечения.

Функция $A_1(\eta)$ удовлетворяет уравнению (1.1), в котором теперь

$$(4.1) \quad H = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{A_1' \eta^2}{(\eta^2 A_1'^2 + 1)^{1/2}} \right)',$$

а также условиям сохранения объема

$$(4.2) \quad \int_{\eta_0}^{\eta_1} \eta^2 A_1' d\eta = \frac{\pi}{n},$$

симметрии

$$(4.3) \quad A_1'(\eta_0) = A_1'(\eta_1) = \infty$$

и периодичности

$$(4.4) \quad \int_{\eta_0}^{\eta_1} A_1' d\eta = \frac{\pi}{n}.$$

Для прямых цилиндрических форм краевое условие на пластинах выполняется автоматически. Из (1.1) с учетом (4.1) после интегрирования получаем

$$(4.5) \quad \frac{A_1' \eta^2}{(\eta^2 A_1'^2 + 1)^{1/2}} = \frac{\beta}{8} \eta^4 + \frac{c}{2} \eta^2 + c_1.$$

Для определенности добавим к системе (4.2)–(4.5) условие $A_1(\eta_0) = 0$. Перейдем к переменной $r = \eta/\eta_1$ и введем параметры (2.1). Тогда для нахождения нормальных сечений получим параметрические уравнения

$$\alpha = A(r, \theta, b), \quad \eta = R(\theta, b)r, \quad b = b(\theta), \\ 0 < \theta < 1, \quad \theta \leq r \leq 1,$$

где

$$(4.6) \quad A(r, \theta, b) = \int_{\theta}^r \frac{u(\tau, \theta, b) d\tau}{\tau \sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}}; \quad R(\theta, b) = \left[\frac{\pi}{n \int_{\theta}^1 \frac{\tau u(\tau, \theta, b) d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}}} \right]^{1/2},$$

а зависимость $b(\theta)$ определяется численно (как в п. 2 для случая осесимметричных форм) из уравнения

$$(4.7) \quad \int_{\theta}^1 \frac{u(\tau, \theta, b) d\tau}{\tau \sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}} = \frac{\pi}{n},$$

к которому следует добавить условие бифуркации

$$(4.8) \quad 4\theta_{(n)}^* = \beta_{(n)}^* = n^2 - 1 \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Это условие получается из формулы (4.7), если перейти в ней к пределу при $\theta \rightarrow 1$.

Семейство цилиндрических равновесных поверхностей характеризуется двумя независимыми параметрами. За такие параметры примем расстояние между пластинами l и параметр θ , по которому с помощью формул (2.1), (4.6)—(4.8) будем определять значение безразмерной угловой скорости β .

В окрестности критических значений $\beta_{(n)}^*$ плоские фигуры исследовались в работе [3]. Разыскивая решения общей задачи о цилиндрических формах в виде непрерывно отклоняющихся от кругового цилиндра и применяя обычную методику разложения решения по степеням малой амплитуды отклонения, авторы работы [3] нашли точки бифуркации (4.8), построили равновесные фигуры в окрестности этих точек, а также получили зависимость между амплитудой отклонения нормального сечения этих фигур и угловой скоростью вращения. Найденная ими зависимость представлена на фиг. 3 кривыми γ_2 и γ_3 . Ветви γ_2' и γ_2'' построены по точным формулам (2.1), (4.6)—(4.8) с помощью численных расчетов. В окрестности точек бифуркации кривые γ_n и γ_n' совпадают. Различие в их дальнейшем поведении объясняется тем, что полученное в [3] приближенное решение теряет свою силу.

На фиг. 4 изображен полный ход бифуркационных кривых для $n = 2, 3, \dots, 6$.

Цилиндрические фигуры, нормальные сечения которых имеют симметрию второго порядка относительно оси z , существуют вплоть до значения $\theta = 0$ ($\beta \approx 0,79$). При $\theta = 0$ цилиндрическая поверхность пересекает ось вращения, такая поверхность лишена физического смысла.

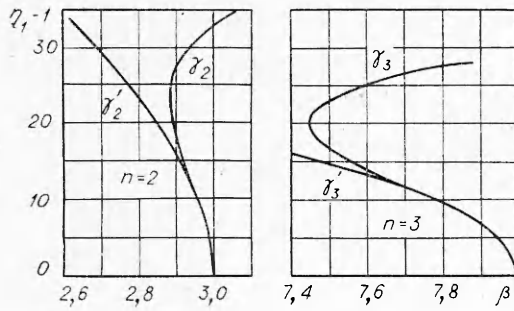
Для порядка симметрии $n > 2$ цилиндрические формы перестают существовать уже при некотором $\theta(n) > 0$. Соответствующие этим значениям $\theta(n)$ числа $\beta_{(n)}$ приведены на фиг. 4. При достижении значения $\beta_{(n)}$ на цилиндрической поверхности образуются самопересечения.

На фиг. 5 изображен вид нормальных сечений цилиндрических фигур для $n = 3$ и некоторых значений параметра β .

При $n = 1$ центры масс плоских фигур не лежат на оси вращения. Задача (4.2)—(4.5) для таких фигур здесь не рассматривается.

Так же как в случае осесимметричных форм, можно показать, что не обладающие симметрией относительно оси вращения цилиндрические формы равновесия не существуют.

5. Исследуем устойчивость цилиндрических фигур. Для равновесной



Ф и г. 3

фигуры с четным порядком симметрии рассмотрим плоские возмущения (5.1) $\varphi(s) = c_n(\cos(2\pi ns/s_1) + \sin(2\pi ns/s_1))$,

где s — отнесенная к η_1 длина дуги нормального сечения равновесной поверхности. Величина s изменяется в пределах $0 \leq s \leq s_1$, точкам $s = 0$ и $s = s_1$ соответствуют значения $\alpha = 0$ и $\alpha = 2\pi$. Произвольная константа c_n характеризует близость возмущенной поверхности к рассматриваемой равновесной. Функция φ удовлетворяет условиям однозначности

$$(5.2) \quad \varphi(0) = \varphi(s_1), \quad d\varphi/ds(0) = d\varphi/ds(s_1).$$

Возмущения (5.1) сохраняют объем жидкости

$$(5.3) \quad \int_0^{s_1} \varphi ds = 0$$

и не смещают ее центр масс с оси вращения

$$(5.4) \quad \int_0^{s_1} \varphi r \cos \frac{2\pi s}{s_1} ds = \int_0^{s_1} \varphi r \sin \frac{2\pi s}{s_1} ds = 0.$$

Знак второй вариации потенциальной энергии на возмущениях φ определяется (см. [1]) знаком интеграла

$$(5.5) \quad I_0 = \int_0^{s_1} \left[\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + a\varphi^2 \right] ds.$$

Функция a вычисляется по формуле (3.6) и для цилиндрических форм имеет вид

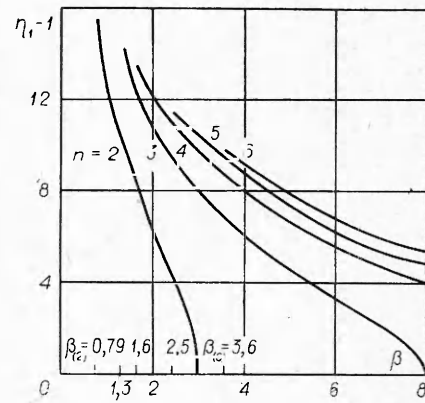
$$a = -4(2bP + Q^2)/(1 + \theta)^2.$$

Подставляя функции a , φ , $d\varphi/ds$ в формулу (5.5), получаем

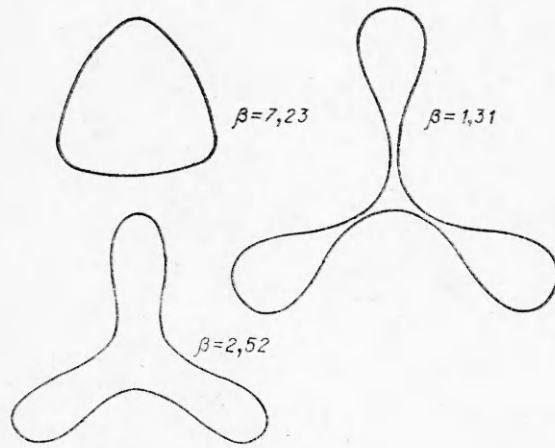
$$I_0 = c_n^2 \left[\frac{4\pi^2 n^2}{s_1} + 2n \int_0^{s_1/2n} a ds \right] = \frac{4c_n^2 n}{(1 + \theta) I_1} [\pi^2 - I_1 I_2],$$

где

$$(5.6) \quad I_1 = \int_{\theta^2}^1 \frac{G(\tau, \theta, b) d\tau}{V(1-\tau)(\tau-\theta^2)}; \quad I_2 = \int_{\theta^2}^1 \frac{(2bP + Q^2) G(\tau, \theta, b) d\tau}{V(1-\tau)(\tau-\theta^2)},$$



Ф и г. 4



Ф и г. 5

произведение не зависит от b , в точке бифуркации производная «вдоль ветви» $d(I_1 I_2)/d\theta|_{\theta=1}$ совпадает с частной производной $\partial(I_1 I_2)/\partial\theta|_{\theta=1}$. С помощью формул (5.6) находим, что при $\theta = 1$ производная $\partial(I_1 I_2)/\partial\theta = 0$, а $d^2(I_1 I_2)/d\theta^2 = \partial^2(I_1 I_2)/\partial\theta^2 = 12\pi b^3/(1+4b)^4 > 0$. Отсюда следует, что для каждой ветви неравенство (5.7) выполняется в окрестности точки бифуркации. Иными словами, все плоские фигуры с четным порядком симметрии, ответвляющиеся от кругового цилиндрического состояния равновесия при значениях $\beta_{(n)}^* = n^2 - 1$, в окрестности этих значений неустойчивы.

Вдоль ветвей с $n = 2, 4$ произведение $I_1 I_2$ вычислялось с помощью ЭВМ. Показано, что с уменьшением параметра θ (или β) это произведение монотонно возрастает.

Заметим еще, что для кругового вращающегося столба $a = -\beta - 1$, $s_1 = 2\pi$, $I_0 = 2\pi c_n^2 (n^2 - 1 - \beta)$. Так что с ростом β вторая вариация потенциальной энергии на возмущениях (5.1) уменьшается и при переходе через бифуркационное значение $\beta_{(n)}^*$ меняет знак на отрицательный.

Для состояний равновесия с нечетным порядком симметрии n ($n \geq 3$) возмущения вида

$$(5.8) \quad \varphi = c_n \left(I_{(n-1)} \cos \frac{2\pi n s}{s_1} - I_{(n)} \cos \frac{2\pi (n-1) s}{s_1} \right),$$

где $I_{(\cdot)} = \int_0^{s_1} r \cos \frac{2\pi(\cdot)s}{s_1} \cos \frac{2\pi s}{s_1} ds$, удовлетворяют необходимым условиям

(5.2)–(5.4). При $\theta = 1$ интегралы $I_{(n)}$ и $I_{(n-1)}$ равны нулю, и, следовательно, $I_0 = 0$. Покажем, что нетривиальные равновесные фигуры с параметрами θ и b , близкими к бифуркационным, в окрестности точек бифуркации (4.8) неустойчивы. Для возмущений (5.8) интеграл I_0 представим в виде

$$I_0 = \frac{2\pi c_n^2}{(1+\theta)I_1} \left[I_{(n-1)}^2 (\pi^2 - I_1 I_2) + I_{(n)}^2 \left(\frac{\pi^2 (n-1)^2}{n^2} - I_1 I_2 \right) \right] - \\ - \frac{2c_n^2}{(1+\epsilon)^2} \left\{ I_{(n-1)}^2 \int_0^{s_1} (2bP + Q^2) \cos \frac{4\pi n s}{s_1} ds + I_{(n)}^2 \int_0^{s_1} (2bP + Q^2) \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{4\pi (n-1) s}{s_1} ds - I_{(n-1)} I_{(n)} \int_0^{s_1} (2bP + Q^2) \cos \frac{2\pi n s}{s_1} \cos \frac{2\pi (n-1) s}{s_1} ds \right\}.$$

функции $P(\tau)$, $Q(\tau)$, $G(\tau, \theta, b)$ определяются формулами (3.12), (3.5), если положить в них $r^2 = \tau$.

Плоская фигура с четным порядком симметрии неустойчива (в смысле Ляпунова — Румянцева), если для характеризующих ее параметров θ , $b(\theta)$ выполняется неравенство (5.7) $I_1 I_2 > \pi^2$.

При $\theta = 1$ интеграл $I_1 = \pi/\sqrt{1+4b} = \pi/n$, а $I_2 = \pi\sqrt{1+4b} = \pi n$, так что для любого n произведение $I_1 I_2 = \pi^2$. Поскольку это про-

Можно показать, что при $\theta = 1$ вместе с выражениями, стоящими в квадратных и фигурных скобках, обращаются в нуль и их первые производные по θ , а для выражения в фигурных скобках равна нулю также вторая производная по θ . С учетом этих обстоятельств находим, что при $\theta = 1$ производная $dI_0/d\theta = \partial I_0/\partial\theta = 0$, а $d^2I_0/d\theta^2 = \partial^2 I_0/\partial\theta^2 = 2\pi^2 n I_1^{-1} [n^{-2}(n-1)^2 - 1] (\partial I_{(n)}/\partial\theta)^2 = -2\pi^3 (2n-1)n^{-2} < 0$.

Отсюда и следует справедливость в окрестностях точек бифуркаций неравенства $I_0 < 0$, доказывающего неустойчивость ответвляющихся равновесных фигур с нечетным порядком симметрии.

6. Потенциальная энергия вращающейся жидкости определяется формулой [1]

$$(6.1) \quad U = \sigma \Sigma - \frac{1}{2} \omega^2 I,$$

где I — момент инерции; Σ — площадь свободной поверхности жидкости. Для простых осесимметричных равновесных состояний

$$\Sigma = 2\pi r_0^2 \eta_1^2 (1 + \theta) \int_{\theta}^1 \frac{r^2 G(r, \theta, b) dr}{V(1-r^2)(r^2-\theta^2)}, \quad I = 2\pi r_0^5 \eta_1^5 \int_{\theta}^1 \frac{r^4 u(r, \theta, b) dr}{V(1-r)(r-\theta)}.$$

Подставляя эти выражения в (6.1), получаем

$$(6.2) \quad E_1 = \frac{U}{2\pi r_0^2 \sigma} = \eta_1^2 \left[(1 + \theta) \int_{\theta}^1 \frac{r^2 G(r, \theta, b) dr}{V(1-r^2)(r^2-\theta^2)} - \frac{b}{(1+\theta)} \int_{\theta}^1 \frac{r^4 u(r, \theta, b) dr}{V(1-r)(r-\theta)} \right].$$

При фиксированном значении l зависимость $b(\theta)$ определяется численно методом, описанным в п. 2. Для осесимметричной формы кратности k , характеризующейся параметрами θ , $b(\theta)$, энергия $E_k = kE_1$.

Для плоских равновесных фигур с симметрией n -го порядка относительно оси вращения

$$\Sigma = 2nl\eta_1 r_0^2 (1 + \theta) \int_{\theta}^1 \frac{rG(r, \theta, b) dr}{V(1-r^2)(r^2-\theta^2)}, \quad I = 2\rho nl\eta_1 r_0^5 \int_{\theta}^1 \frac{r^3 u(r, \theta, b) dr}{V(1-r)(r-\theta)}.$$

Отсюда с помощью (6.1) находим

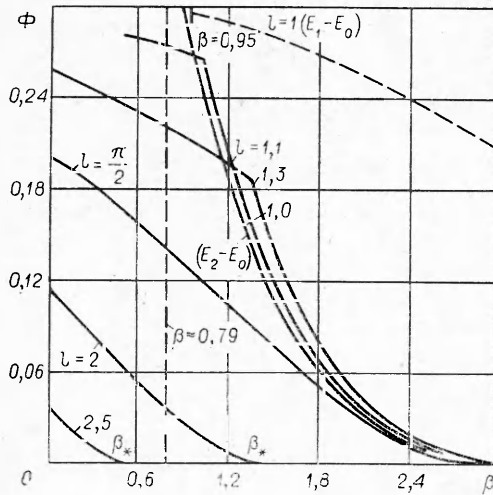
$$(6.3) \quad E_2 = \frac{U}{2\pi r_0^2 \sigma} = \frac{\eta_1 n l}{\pi} \left[(1 + \theta) \int_{\theta}^1 \frac{rG(r, \theta, b) dr}{V(1-r^2)(r^2-\theta^2)} - \frac{b}{1+\theta} \int_{\theta}^1 \frac{r^3 u(r, \theta, b) dr}{V(1-r)(r-\theta)} \right].$$

При заданном n зависимость $b(\theta)$ определяется численно по формулам (4.7), (4.8).

Для кругового цилиндрического состояния равновесия

$$E_0 = \frac{U}{2\pi r_0^2 \sigma} = l \left(1 - \frac{\beta}{8} \right).$$

По формулам (6.2), (6.3) энергия осесимметричных и цилиндрических форм вычислялась численно для ряда значений параметров l и n (шаг



Ф и г. 6

по θ всегда равнялся 0,01), а затем при заданном l (или n) по найденному числу $b(\theta)$ параметр β определялся с помощью формул (2.4), (2.6) (соответственно (2.1), (4.6)). Для каждого β наряду со значением E_1 (или E_2) вычислялась также энергия E_0 кругового цилиндрического состояния.

Согласно результатам работы [2], круговой цилиндрический столб вращающейся вязкой жидкости устойчив, если

$$\beta < \beta_* = \min \{ \beta^*, \beta_{(2)}^* \} = \min \{ (\pi/l)^2 - 1, 3 \}.$$

Для $\beta < \beta_*$ введем функцию

$$(6.4) \quad \Phi(l, \beta) = \min_{i=1,2} \{ E_i(l, \beta) - E_0(l, \beta) \},$$

где минимум вычисляется по всем осесимметричным (простым и кратным) и всем плоским формам равновесия, существующим при значениях l и β .

Функция (6.4) дает оценку сверху для запаса устойчивости состояния равновесия вязкой жидкости, характеризующегося параметрами l и β . Для некоторых значений l функция Φ приведена на фиг. 6.

При $l \geq \pi/2$ цилиндрическое состояние устойчиво, если $\beta < \beta_* \leq 3$. При таких значениях β наименьшей потенциальной энергией обладают простые осесимметричные формы, существующие при $0 \leq \beta \leq \beta_*$. Зависимость $\Phi(\beta)$ приведена в этом случае для значений $l = 2,5; 2; \pi/2$. При фиксированном l функция $\Phi(\beta)$ достигает максимального значения Φ_{\max} при $\beta = 0$. Если $l = \pi/2$, то $\Phi_{\max} \approx 0,204$. С ростом l значение Φ_{\max} убывает. При $l = 2,5$ это значение равно 0,04.

При $l < \pi/2$ критическое значение $\beta_* = 3$. Если $\sqrt{1,5} \leq l < \pi/2$, то $\Phi(\beta)$ определена при всех $0 \leq \beta \leq 3$. Начиная со значения $\beta = 0$ вплоть до некоторого значения $\beta_l \in (0,79; 3)$ наименьшей потенциальной энергией обладают простые осесимметричные формы, а при $\beta > \beta_l$ — плоские фигуры кратности 4. При $l < \sqrt{1,5}$ функция $\Phi(\beta)$ определена лишь начиная с некоторого значения $\beta = \beta_l^0 > 0$, соответствующего вырожденной осесимметричной форме ($\theta = 0$). Для $l = 1,1$ число $\beta_l^0 = 0,51$, а $\beta_l = 0,104$. При $l = 1$ функция $E_1(\beta)$ определена лишь при $\beta > 0,95 > 0,79$. Кривые $\Phi = E_1(1, \beta) - E_0(1, \beta)$ и $\Phi = E_2(1, \beta) - E_0(1, \beta)$ не пересекаются. При $l \leq 1$ функция $\Phi(l, \beta) = E_2(l, \beta) - E_0(l, \beta)$, где $E_2(l, \beta)$ — значение потенциальной энергии плоской фигуры, порядок симметрии которой $n = 2$. При каждом $l \leq 1$ максимальное значение Φ_{\max} достигается при $\beta = 0,79$. Для $l = 1$ оно равно 0,34. Сама функция $\Phi(\beta)$ определена при $l \leq 1$ в интервале $(0,79; 3)$.

Автор пользуется случаем выразить признательность и благодарность Л. В. Овсянникову за научное руководство. Глубокую благодарность автор выражает также В. В. Пухначеву за неоднократные полезные обсуждения данной работы.

Поступила 26 V 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д. и др. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.

2. Слобожанин Л. А. Об устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости.— В сб.: Математическая физика и функциональный анализ. Вып. 2. Харьков: изд. ФТИНТ АН УССР, 1971.
3. Братухин Ю. К., Маурин Л. Н. Равновесные фигуры вращающегося жидкого цилиндра.— ПММ, 1968, т. 32, № 4.
4. Слобожанин Л. А. Об одной задаче ветвления цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости.— В сб.: Математическая физика и функциональный анализ. Вып. 2. Харьков: изд. ФТИНТ АН УССР, 1971.
5. Логинов Б. В. Дополнение к статье Л. А. Слобожанина «Об одной задаче ветвления цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости.— В сб.: Математическая физика и функциональный анализ. Вып. 3. Харьков: изд. ФТИНТ АН УССР, 1972.
6. Пухначев В. В. Ветвление вращательно-симметричных решений, описывающих течения вязкой жидкости со свободной поверхностью.— ПМТФ, 1973, № 2.
7. Chandrasekhar S. The stability of a rotation liquid drop.— Proc. Roy. Soc. London, ser. A, 1965, vol. 286, N 1404. Рус. пер. Чандрасекхар С. Сб. пер. Механика, 1966, № 5.
8. Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях.— В сб.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: изд. ВЦ АН СССР, 1968.
9. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962.

УДК. 533

О ВЛИЯНИИ МЕЖФАЗНЫХ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

А. И. Жакин
(Харьков)

Кулоновские силы приводят в движение слабопроводящую поляризующуюся жидкость посредством объемных сил [1—5] и тангенциальных поверхностных напряжений [2, 6]. Если первый тип течений имеет пороговый характер [1—5], то второй тип может развиваться в полях любой, сколь угодно малой напряженности электрического поля при наличии движения вдоль свободной поверхности жидкости поверхностного заряда [6]. Время накопления поверхностного заряда на свободной поверхности имеет порядок времени релаксации свободного заряда $t_e = \epsilon/\sigma$ [7]. Если характерные времена задачи t_0 удовлетворяют условию $t_0 \ll t_e$, то поверхностным зарядом можно пренебречь, в этом случае основную роль будут играть поляризационные силы (например, в задачах стабилизации свободной поверхности жидкого диэлектрика электрическим полем [2, 8, 9]). При $t_0 \geq t_e$ кулоновскими поверхностными силами пренебречь нельзя, и их учет приводит к выводу о возможности электроконвективных течений.

В данной работе рассматриваются основные закономерности беспороговой электроконвекции на примере течения слабопроводящей поляризующейся жидкости под действием поверхностных сил, вызываемых специальной геометрией электродов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим две несжимаемые вязкие слабопроводящие поляризующиеся несмешивающиеся жидкости, расположенные между двумя горизонтальными бесконечными электродами и разделенные свободной поверхностью S . Введем декартову систему координат так, как указано на фиг. 1, 2, и обозначим Ω_i области, занимаемые жидкостями, $S_1 = (-\infty < x < \infty, z = h_1 + a \cos \omega x)$ — верхний изогнутый электрод, $S_2 = (-\infty < x < \infty, z = -h_2)$ — нижний плоский