ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОГО ДВИЖЕНИЯ

А. Бегматов

(Ташкент)

Получено решение одной задачи напорно-безнапорного движения, предполагая, что просачивание с кровли пласта отсутствует. В случае учета просачивания применяется метод интегральных соотношений Г. И. Баренблатта. При этом результаты расчетов показывают, что достаточно ограничиться первым приближением.

В работе [1] рассматривается напорно-безнапорное движение жидкости в пласте с плохо проницаемой кровлей и непроницаемой подошвой. Эта задача в случае плоскопараллельного движения сводится к решению системы уравнений

$$\mu\frac{\partial h}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+q_0,\qquad q_0=\frac{k_0}{m_0}(H_0+h_V-m)\qquad (0\leqslant x\leqslant l(t))$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\omega^2(H-H_0)=0,\qquad \omega^2=\frac{k_0}{kmm_0}\qquad (l(t)\leqslant x<\infty) \tag{1}$$

Здесь h — ордината свободной поверхности; H — напор в пласте; H_0 — напор вне кровли пласта и при $x\to\infty$; h_V — высота столба жидкости, соответствующая давлению в зоне разрежения; μ — коэффициент водоотдачи, k и k_0 — коэффициенты фильтрации пласта и кровли; m и m_0 — мощности пласта и кровли; l (t) — подвижная граница раздела зоны напорного и безнапорного движений.

Автор работы [1] вводит новую переменную $y = x / l$, а затем, линеаризуя и пренебрегая некоторыми членами в первом уравнении системы (1), решает последнюю при следующих условиях:

$$h\,[l\,(t),t]=m,\qquad l\,(0)=0,\qquad q_0=0$$

$$\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x=l}=m\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{x=l},\qquad k\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x=0}=Q>Q_*=km\omega\,(H_0+h_V-m) \tag{2}$$

где Q_* — критическое значение дебита; при выполнении условия $Q>Q_*$ происходит напорно-безнапорное движение.

Ниже приводится точное ($q_0=0$) и приближенное решение линеаризованной системы (1), полученное по методу интегральных соотношений [2]. При этом можно ограничиться первым приближением, так как сравнение точного и приближенного решений при $q=0$ дают достаточно хорошие результаты.

Линеаризуя первое уравнение системы (1) по второму способу, полагая $u=h^2$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad a=\frac{k\sqrt{u}}{\mu}\approx\frac{km}{\mu}\qquad (q_0=0) \tag{3}$$

Замечая, что второе уравнение системы имеет решение

$$H=H_0-(H_0+h_V-m)\,e^{-\omega(x-l)}$$

условия (2) перепишем следующим образом:

$$u\,[l\,(t),\,t]=m^2,\qquad (\partial u/\partial x)_{x=0}=2Q/k=Q_0$$

$$(\partial u/\partial x)_{x=l}=2m\omega\,(H_0+h_V-m)=2Q_*/k=Q_1 \tag{4}$$

Если положить

$$q=\partial u/\partial x,\qquad \xi=x/2\alpha\sqrt{at},\qquad l\,(t)=2\alpha\sqrt{at}$$

то вместо (3) получим

$$\frac{d^2q}{d\xi^2}+2\alpha^2\xi\frac{dq}{d\xi}=0 \tag{5}$$

где α — неизвестная пока постоянная.

При этом к первоначальной функции u можно возвращаться по формуле

$$u(x, t) = \int_0^x qax + a \int_0^t \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x=0} dt + m^2 \tag{6}$$

Решение уравнения (5) при условиях (4) будет

$$q(\xi) = C \operatorname{erf}(\alpha\xi) + Q_0 \qquad C = \frac{Q_1 - Q_0}{\operatorname{erf}\alpha}, \qquad \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} \partial y \tag{7}$$

По формуле (6) находим искомую функцию

$$u(x, t) = m^2 + 2C\left(\frac{at}{\pi}\right)^{1/2} + C\left\{x \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + 2\left(\frac{at}{\pi}\right)^{1/2}\left[\exp\frac{-x^2}{4at} - 1\right] + Q_0 x\right\} \tag{8}$$

Отсюда по первому условию получим следующее трансцендентное уравнение для определения α

$$\sqrt{\pi}\,\alpha\delta\operatorname{erf}\alpha = (1 - \delta)\exp(-\alpha^2) \qquad (\delta = Q_* / Q) \tag{9}$$

Решение (8) уравнения (3) можно представить в следующем безразмерном виде:

$$P = \frac{k(m^2 - u)}{4Q\sqrt{at}} = \Delta i \operatorname{erf} c\lambda - \lambda(1 - \Delta) \tag{10}$$

где

$$i \operatorname{erf} c\lambda = \int_\lambda^\infty \operatorname{erf} c\, y dy, \quad \lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}}, \quad \Delta = \frac{1 - \delta}{\operatorname{erf}\alpha}$$

Отметим, что при $\delta \to 0$, $\alpha \to \infty$ и (10) будет решением известной задачи фильтрации.

В случае учета просачивания сверху вместо первого уравнения системы (1), полагая $u = 1 - h^2 / m^2 + \varepsilon t / m^2$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \tau = \frac{k_0}{m_0\mu} t, \quad \xi = \omega x, \quad \varepsilon = 2\frac{mq_0}{\mu} \tag{11}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$u(\xi, \tau) = u_0(\tau) + u_1(\tau)(\xi / \xi_0) + u_2(\tau)(\xi / \xi_0)^2 \quad (\xi_0 = \omega l) \tag{12}$$

Из условия (2)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = -\frac{2Q}{k\omega m^2} = a_1, \qquad \left(\frac{\partial u}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0} = -\frac{2Q_*}{2\omega m^2} = a_2$$

$$u(\xi_0, \tau) = \varepsilon_0 \tau, \qquad \varepsilon_0 = \varepsilon m_0 \mu / k_0 m^2$$

находим

$$u_0 = \varepsilon_0 \tau - 1/2(a_1 + a_2)\xi_0, \quad u_1 = a_1\xi_0, \quad u_2 = 1/2(a_2 - a_1)\xi_0 \tag{13}$$

При этом для определения подвижной границы $\xi_0(\tau)$ имеем следующее уравнение [2]:

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^{\xi_0} u d\xi = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_0} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} + u(\xi_0, \tau)\frac{d\xi_0}{d\tau}, \qquad \xi_0(0) = 0$$

или, учитывая (13)

$$\frac{2\xi_0 d\xi_0}{\varepsilon_0 \xi_0 + a_1 - a_2} = \frac{3d\tau}{a_2 + {}^1/_2 a_1} \tag{14}$$

Проинтегрировав это уравнение, находим зависимость

$$\xi_0 - (a_1 - a_2)\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_0 \xi_0}{a_1 - a_2}\right) = \frac{3\varepsilon_0^2 \tau}{2a_2 + a_1} \tag{15}$$

Из (14) имеем $d\xi=0$ при $\xi_0=(a_2-a_1)/\varepsilon_0$. С другой стороны, по (15) имеем $\xi_0\to\to(a_2-a_1)/\varepsilon_0$ при $\tau\to\infty$ или в прежних обозначениях $l\to l(\infty)=(Q-Q_*)/q_0$, при $t\to\infty$.

Последнее показывает, что при $t\to\infty$ дебит галереи Q целиком достигается за счет бокового притока Q_* и притока сверху q_0. Следовательно, при наличии просачивания сверху, в отличие от предыдущего случая, где решение пригодно при $h\geqslant 0$, существует некоторое предельное положение, соответствующее стационарному движению.

Зависимость (15) можно представить в следующем удобном для расчетов виде:

$$\ln(1-l_0)+l_0=3\delta^2\tau[(\delta-1)(1+2\delta)]^{-1},\qquad l_0=l(t)/l(\infty)\tag{16}$$

В случае $q_0=0$ по формулам (12), (13) и уравнению (14) получим следующее решение:

$$u=-\frac{a_1+a_2}{2}\xi_0+a_1\xi_0\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)+\frac{a_2-a_1}{2}\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2,\qquad \xi_0^2=\frac{6(a_1-a_2)\tau}{2a_2+a_1}$$

или, подставляя значения a_1, a_2, производя некоторые преобразования и возвращаясь к прежним обозначениям

$$P=\frac{k(m^2-h^2)}{4Q\sqrt{at}}=\frac{\alpha}{2}\left[1+\delta-2\left(\frac{x}{l}\right)+(1-\delta)\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]\tag{17}$$

$$l(t)=2\alpha\sqrt{at},\qquad \alpha=\left(1.5\frac{1-\delta}{1+2\delta}\right)^{1/2}\tag{18}$$

Приводим значения $\alpha=\alpha'$, вычисленные по последней формуле, а также значения корней ($\alpha=\alpha''$) трансцендентного уравнения (9); из сравнения вытекает, что достаточно ограничиться первым приближением

$\delta=0.95$	0.90	0.85	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40
$\alpha''=0.1608$	0.2315	0.2889	0.3402	0.4344	0.5257	0.6201	0.7233
$\alpha'=0.1608$	0.2315	0.2887	0.3397	0.4332	0.5222	0.6125	0.7050

Аналогично нетрудно получить приближенное решение и для изолированного напорного пласта, рассмотренного в работе [3].

Поступила 20 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Пеньковский В. И. О напорно-безнапорном движении жидкости в слоистых грунтах. Тр. координационных совещаний по гидротехнике, 1967, вып. 35.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.
3. Пеньковский В. И., Саттаров М. А. Неустановившееся напорно-безнапорное движение подземных вод в пласте с непроницаемыми кровлей и подошвой. Докл. АН ТаджССР, 1967, т. 10, № 6.