

УДК 533

О «ПРОСТЫХ» РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА

Л. В. Овсянников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Обсуждается понятие «простого» решения системы дифференциальных уравнений, допускающих локальную группу Ли G преобразований базового пространства, как инвариантного H -решения типа $(0,0)$ относительно подгруппы $H \subset G$. Привлекательность таких решений состоит в том, что они описываются явными формулами, позволяющими дать им наглядную физическую интерпретацию. Для уравнений газовой динамики с политропным уравнением состояния газа перечислены все простые решения, не относящиеся к специальным формам движения газа. Приведены примеры простых решений и описано явление коллапса, ранее изучавшееся для барохронных движений.

Введение. Уравнения газовой динамики (УГД) *политропного газа* для вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$, плотности ρ , давления p и энтропии S как функций от времени t и координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$ имеют вид

$$\rho D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad Dp + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad p = S\rho^\gamma \quad (D = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \quad (1)$$

с показателем адиабаты $\gamma = \operatorname{const} > 0$. Известно [1], что система (1) обладает достаточно широкой симметрией, а именно *допускает* (в смысле С. Ли) 13-мерную группу G_{13} преобразований пространства $R^9(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \rho, p)$.

Соответствующая группе G_{13} алгебра Ли операторов L_{13} , действующих на R^9 , имеет вид

$$X_i = \partial_{x^i}, \quad X_{i+3} = t\partial_{x^i} + \partial_{u^i}, \quad X_{i+6} = \varepsilon_{ik}^l (x^k \partial_{x^l} + u^k \partial_{u^l}) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x^i \partial_{x^i}, \quad X_{13} = t\partial_t - u^i \partial_{u^i} + 2\rho \partial_\rho, \quad X_{14} = \rho \partial_\rho + p \partial_p$$

в обозначениях $(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$, $(u, v, w) = (u^1, u^2, u^3)$, $\partial_{x^i} = \partial/\partial x^i$, $\partial_t = \partial/\partial t$ и т. д., ε_{ik}^l есть стандартный кососимметричный тензор, $\varepsilon_{12}^3 = 1$. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. (Номер 12 резервирован для оператора X_{12} , расширяющего L_{13} до L_{14} в случае $\gamma = 5/3$.)

Целью программы ПОДМОДЕЛИ является исчерпание всех возможностей, индуцируемых указанным свойством симметрии, для построения классов *точных решений* УГД [2]. Такие возможности предоставляются *подгруппами* $H \subset G_{13}$ (подалгебрами $L \subset L_{13}$), каждая из которых может производить класс решений, описываемых в терминах *инвариантов* группы H . Инварианты связаны вытекающими из (1) дифференциальными уравнениями, вообще говоря, пониженной размерности, что и служит основанием для их построения и анализа. Эти уравнения образуют *факторсистему*, описывающую H -*подмодель* для УГД.

H -подмодели классифицируются по их *типам* (σ, δ) , где σ есть *ранг* подмодели (число инвариантных независимых переменных), а δ — ее *дефект* (число неинвариантных искоемых функций). *Инвариантные* подмодели выделяются условием $\delta = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01780).

Среди всех H -подмоделей особое место занимают подмодели типа $(0,0)$. Для них искомые инварианты суть константы, а факторсистема сводится к системе конечных соотношений, связывающих эти константы.

Решения УГД, получаемые из подмоделей типа $(0,0)$, называются *простыми решениями*.

Простейшим элементом множества простых решений является *постоянное* решение (покоящийся газ с постоянными плотностью и давлением). В целом это множество (бесконечное) достаточно богато неэквивалентными классами разнообразных простых решений.

Настоящая работа посвящена предварительной классификации простых решений для УГД (1). Выполнен отбор классов простых решений, обладающих определенной общностью, указаны их особенности и приведены конкретные примеры.

Выбор подалгебр. Подмодели типа $(0,0)$ порождаются четырехмерными подалгебрами $\bar{L}_4 \subset L_{13}$. Все такие подалгебры с точностью до подобия перечислены в оптимальной системе подалгебр ΘL_{13} [3], где содержится всего 290 представителей $L_{4,i}$ (с порядковыми номерами $i = 1, 2, \dots, 290$). Однако не все они пригодны для построения подмоделей типа $(0,0)$. Прежде всего подалгебра $L_{4,i}$ должна удовлетворять следующим двум необходимым условиям.

I. $L_{4,i}$ не имеет инвариантов вида $j = j(t, \mathbf{x})$.

II. Получаемая факторсистема не противоречива.

Итак, только 124 представителя удовлетворяют условию I, причем 39 из них приводят к противоречивым факторсистемам, поэтому обоим условиям I и II удовлетворяют 85 представителей. Порожденные ими подмодели типа $(0,0)$ построены, вместе с тем многие из них дают описание частных случаев специальных движений газа. На данном этапе исследования мы сочли целесообразным не рассматривать простые решения для указанных ниже форм движения газа III–V и соответствующих систем уравнений.

III. *Барохронные*, определяемые зависимостью $p = p(t)$:

$$D\mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = -p'/\gamma p.$$

К ним относятся также изобарические движения с $p = \text{const}$.

IV. *Тепловые*, определяемые постоянством плотности $\rho = \text{const} \neq 0$:

$$D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad Dp = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

V. *Изотермические*, определяемые постоянством скорости звука $c = \text{const}$; при $\gamma = 1$

$$D\mathbf{u} + \nabla e = 0, \quad De + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (e = \ln \rho),$$

а при $\gamma \neq 1$ имеет место система IV.

Данные модели необходимо подвергнуть независимому групповому анализу, который пока не завершен. Уместно отметить, что система уравнений IV до сих пор даже не приведена в инволюцию. Барохронная модель III изучалась в [4].

Результаты. За вычетом подалгебр, порожденных подмоделями для движений газа III–V, остаются 34 представителя $L_{4,i}$, указанные в табл. 1, 2. Здесь составлена их дополнительная классификация по размерностям получаемых решений.

Размерностью простого решения называется число N независимых переменных вида $\lambda_i = \lambda_i(t, \mathbf{x})$ ($i = 1, \dots, N$), от которых зависит получаемое решение. Число N определяется по формуле

$$N = \text{o.p.} \frac{\partial(u, v, w, \rho, p)}{\partial(t, x, y, z)},$$

где о.р. означает «общий ранг» указанной матрицы Якоби. Решение размерности N обозначается символом DN . Всего имеется 2 решения $D1$, 14 решений $D2$, 10 решений $D3$ и 8 решений $D4$.

Таблица 1

Подалгебры $L_{4,i}$, производящие простые решения классов DN ($N = 1, 2, 3$)

N	i	Базис $L_{4,i}$	Ограничения	Характерные переменные	
1	73	2, 3, 11, $7 + a_{13} + b_{14}$	$a \neq 0$	x/t	
	75	2, 3, 11, $13 + a_{14}$		x/t	
2	62	1, $a_4 + 6$, 11, $13 + b_{14}$	$b \neq 0$	$y/t, z/t$	
	87	2, 3, $4 + a_6 + 10$, $(2)_{11} - 13 + b_{14}$		$t, x - t^2/2$	
	91	2, 3, $4 + 10$, $(2)_{11} - 13 + a_{14}$		$t, x - t^2/2$	
	93	2, 3, $4 + 10$, $7 - 2a_{11} + a_{13} + b_{14}$		$t, x - t^2/2$	
	231	1, 11, $7 + a_{13}, b_{13} + 14$		$r/t, \theta$	
	232	1, 11, $13, 7 + a_{14}$		$r/t, \theta$	
	234	1, 10, $7 + a_{11} + b_{13}, c_{11} + d_{13} + 14$		$c \neq 0$	r, θ
	235	1, 10, $a_{11} + 13, 7 + b_{11} + c_{14}$		$a \neq 0$	r, θ
	239	1, 10, $2 + 13, a_2 + b_3 + 14$		$b \neq 0$	t, x
	276	2, 3, $7 + a_{10} - b_{11} + b_{13},$ $c_{10} - d_{11} + d_{13} + 14$		$bc - ad \neq 0$	t, x
	277	2, 3, $7 + a_{11} + b_{13}, c_{11} + d_{13} + 14$		$bc - ad \neq 0$	$x/t, x$
	283	2, 3, $a_{10} - 11 + 13, 7 + b_{10} + 14$		$b \neq 0$	t, x
	284	2, 3, $a_{10} - 11 + 13, b_{10} + 14$		$b \neq 0$	t, x
	285	2, 3, $a_{11} + 13, 7 + b_{11} + c_{14}$		$b \neq 0$	$x/t, x$
286	2, 3, $a_{11} + 13, b_{11} + 14$	$b \neq 0$	$x/t, x$		
3	57	5, 6, $7 + a_{13} + b_{14}, 11$	$a \neq 0$	$x/t, y/t, z/t$	
	59	5, 6, 11, $13 + a_{14}$		$x/t, y/t, z/t$	
	217	1, $7 + a_{11}, b_4 + 13, c_{11} + 14$		$c \neq 0$	t, r, θ
	228	4, 11, $7 + a_{13}, b_{11} + 14$		$b \neq 0$	$x/t, r/t, \theta$
	229	4, 11, $13, 7 + a_{14}$		$b \neq 0$	$x/t, r/t, \theta$
	241	1, $4 + 10, 7 + 2a_{11} - a_{13},$ $2b_{11} - b_{13} + 14$		$b \neq 0$	t, r, θ
	242	1, $4 + 10, (2)_{11} - 13, 7 + a_{11}$			t, r, θ
	260	1, $a_4 + 6, b_{11} + 13, c_{11} + 14$		$c \neq 0$	$t, y/t, z/t$
	264	1, $2 + 4, a_{10} - 11 + 13, b_{10} + 14$			t, y, z

В табл. 1 приведен список 26 подалгебр $L_{4,i}$, порождающих простые решения классов DN для $N = 1, 2, 3$. В первом столбце указана размерность N , во втором — номер i подалгебры $L_{4,i}$ из оптимальной системы ΘL_{13} [3], в третьем — базис операторов этой подалгебры, в четвертом — ограничения параметров, гарантирующие выполнение условия I и попадание в соответствующий класс DN , а в пятом — независимые переменные, от которых зависит решение. Базисные операторы записаны в сокращенной форме, только с номерами порождающих операторов (2). Например, выражение $(2)_{11} - 13 + a_{14}$ означает оператор $2X_{11} - X_{13} + aX_{14}$, где a — произвольный параметр. Полярные координаты (r, θ) в плоскости (y, z) вводятся формулами

$$y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta. \quad (3)$$

В табл. 2 представлен список остальных восьми подалгебр $L_{4,i}$, порождающих простые решения класса $D4$. Эти решения можно объединить в три подкласса $D4_k$ ($k = 1, 2, 3$), в каждом из которых формулы представления решения имеют один и тот же вид. Поэтому здесь в первом столбце указано обозначение подкласса, второй и третий столбцы устроены

Таблица 2

Подалгебры $L_{4,i}$, производящие простые решения классов $D4$			
Подкласс	i	Базис $L_{4,i}$	Ограничения
$D4_1$	216	$4, 7 + a11, b11 + 13, c11 + 14$	$c \neq 0$
$D4_2$	252	$5, 6, 7 + a11 + b13, c11 + d13 + 14$	$ad - bc \neq 0$
	255	$5, 6, a11 + 13, 7 + b11 + c14$	$b \neq 0$
	256	$5, 6, a11 + 13, b11 + 14$	$b \neq 0$
$D4_3$	248	$5, 6, a1 + 2 + 13, b1 + d2 + c3 + 14$	$b \neq 0$
	249	$5, 6, a1 + 13, b1 + 7 + c14$	$b \neq 0$
	251	$5, 6, a1 + 13, b1 + 14$	$b \neq 0$
	254	$5, 6, a1 + 7 + b13, c1 + d13 + 14$	$ad - bc \neq 0$

так же, как в табл. 1, а ограничения параметров даны в четвертом столбце. Это позволяет дать компактное описание всех простых решений класса $D4$.

Простые решения $D4_1$. Представление решения:

$$u = \frac{1}{t}(x + Ur), \quad v = \frac{1}{t}(Vy - Wz), \quad w = \frac{1}{t}(Wy + Vz), \quad \rho = t^{A-1}r^{B-2}e^{K\theta}R, \quad p = t^{A-3}r^B e^{K\theta}P,$$

где (r, θ) — полярные координаты (3). Здесь U, V, W, R, P суть инварианты подалгебры, константы A, B, K выражаются через параметры (a, b, c) серии подалгебр, а именно: $A = 3 - b/c, B = (b + 1)/c, K = -a/c$.

Подстановка представления в УГД (1) приводит к факторсистеме

$$UV = 0, \quad K \frac{P}{R} = (1 - 2V)W, \quad B \frac{P}{R} = W^2 - V^2 + V, \quad BV + KW + A = 0, \quad 2\gamma V = 3 - \gamma.$$

Решение должно удовлетворять условиям $V^2 + W^2 \neq 0, B^2 + K^2 \neq 0$, первое из которых гарантирует принадлежность классу $D4$, а второе предотвращает попадание в класс барохронных решений. Возникают следующие возможности:

1⁰. $V(V-1)(2V-1) \neq 0$. В силу выражения $V = (3-\gamma)/2\gamma$ это равносильно неравенству $(\gamma-1)(2\gamma-3)(\gamma-3) \neq 0$. Здесь $U = 0$, а константы B, K и P/R выражаются через A, V и W по формулам

$$B = \frac{W^2 - V^2 + V}{(V-1)(V^2 + W^2)} A, \quad K = \frac{(1-2V)W}{(V-1)(V^2 + W^2)} A, \quad \frac{P}{R} = \frac{1}{A}(V-1)(V^2 + W^2), \quad (4)$$

причем должно быть выполнено условие положительности величины P/R , а именно $(V-1)A > 0$, равносильное условию $(\gamma-1)A < 0$. Решение зависит от четырех произвольных постоянных V, W, A, γ , связанных указанными соотношениями.

2⁰. $V = 0$. Решение существует лишь для $\gamma = 3$. Формулы (4) упрощаются до следующих:

$$B = -A, \quad KW = -A, \quad P/R = -W^2/A \quad (W \neq 0).$$

Получаем простое решение

$$u = \frac{x}{t} + U \frac{r}{t}, \quad v = -W \frac{z}{t}, \quad w = W \frac{y}{t}, \quad \rho = t^{A-1}r^{-A-2}c^{-A\theta/W}R, \quad p = t^{A-3}r^{-A}e^{-A\theta/W}P,$$

причем необходимо выполнение условия $A < 0$. Решение зависит от трех произвольных постоянных U, W, A .

3⁰. $V = 1/2$. Решение существует лишь для $\gamma = 3/2$. Здесь $U = 0$, а формулы (4) упрощаются до следующих:

$$B = -2A, \quad K = 0, \quad P/R = -(W^2 + 1/4)/2A.$$

Получаем простое решение

$$u = \frac{x}{t}, \quad v = \frac{y - 2Wz}{2t}, \quad w = \frac{2Wy + z}{2t}, \quad \rho = t^{A-1} r^{-2A-2} R, \quad p = t^{A-3} r^{-2A} P,$$

причем необходимо выполнение условия $A < 0$. Решение зависит от двух произвольных постоянных W, A .

4⁰. $V = 1$. Решение существует лишь для $\gamma = 1$. Здесь $U = 0$, а из факторсистемы следует, что $W \neq 0, K \neq 0$. Получаем соотношения $A = 0, B = -KW$, что дает простое решение

$$u = \frac{x}{t}, \quad v = \frac{y - Wz}{t}, \quad w = \frac{Wy + z}{t}, \quad \rho = t^{-1} r^{-KW-2} e^{K\theta} R, \quad p = t^{-3} r^{-KW} e^{K\theta} P,$$

где $P/R = -W/K$ при $KW < 0$. Решение зависит от двух произвольных постоянных W, K .

Простые решения $D4_2$. Представление решения:

$$u = U \frac{x}{t}, \quad v = \frac{y}{t}, \quad w = \frac{z}{t}, \quad \rho = t^{A+2} x^{B-2} R, \quad p = t^A x^B P.$$

Здесь U, R, P суть инварианты любой из подалгебр подкласса $D4_2$ (см. табл. 2), а константы A, B однозначно выражаются через соответствующие параметры a, b, c, d этих подалгебр. Данные константы должны удовлетворять неравенствам $A + B \neq 0, B \neq 0$, первое из которых обеспечивает принадлежность решения классу $D4$, а второе предотвращает попадание в класс барохронных решений.

Подстановка представления в УГД (1) приводит к факторсистеме

$$B \frac{P}{R} = U - U^2, \quad (B - 1)U + A + 4 = 0, \quad (B + \gamma)U + A + 2\gamma = 0.$$

Необходимым является условие $U - U^2 \neq 0$, что равносильно $(\gamma - 1)(\gamma - 2) \neq 0$. Здесь константа $B \neq 0$ остается произвольной, а остальные выражаются через нее:

$$U = 2 \frac{2 - \gamma}{\gamma + 1}, \quad A = 2 \frac{\gamma - 2}{\gamma + 1} B - \frac{6\gamma}{\gamma + 1}, \quad \frac{P}{R} = -\frac{6}{B} \frac{(\gamma - 1)(\gamma - 2)}{(\gamma + 1)^2},$$

причем B и γ должны удовлетворять неравенствам $B(\gamma - 1) \neq 2\gamma, B(\gamma - 1)(\gamma - 2) < 0$. При выполнении этих неравенств решение зависит от двух произвольных постоянных B и γ .

Простые решения $D4_3$. Представление решения:

$$u = \frac{1}{t}, \quad v = \frac{1}{t}(y + f(\lambda)), \quad w = \frac{1}{t}(z + g(\lambda)), \quad \rho = t^{-2} e^{A\lambda} R, \quad p = t^{-4} e^{A\lambda} P, \quad \lambda = x - \ln t.$$

Здесь f и g , вообще говоря, произвольные функции переменной λ . Для конкретных подмоделей из табл. 2 они имеют следующие значения:

- при $i = 248$ $f = m\lambda, g = n\lambda$;
- при $i = 249, 251$ $f = g = 0$;
- при $i = 254$ $f = h \cos(m\lambda), g = h \sin(m\lambda)$,

константы m, n, h и A однозначно выражаются через параметры a, b, c, d соответствующих подалгебр.

Условие принадлежности классу $D4$ есть $A \neq 0$. Подстановка представления в УГД дает факторсистему, сводящуюся к соотношениям $\gamma = 2, AP = R$, поэтому здесь должно быть $A > 0$. Решение зависит максимум от трех произвольных постоянных, например, m, n, A .

Коллапс. Для движений газа, описываемых простыми решениями класса $D4$, характерно явление коллапса, а именно обращение плотности в бесконечность при $t = 0$. В

отличие от барохронных движений газа [4] здесь геометрия коллапса более сложная, так как траектории частиц газа не прямолинейны.

Ниже для бóльшей физической наглядности в обсуждаемых простых решениях выполнено преобразование «обращения времени» $t \rightarrow 1-t$, $\mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}$, допускаемое УГД. Движение газа рассматривается в промежутке $0 \leq t \leq 1$. Тогда при $t = 0$ особенности нет, а коллапс наступает при $t = 1$.

Траектории частиц описываются решениями системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \Big|_{t=0} = \mathbf{x}_0. \quad (5)$$

Пусть решение данной системы есть $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_0)$. Исключение времени t дает уравнения кривой — проекции $L(\mathbf{x}_0)$ траектории частицы, стартующей при $t = 0$ из точки \mathbf{x}_0 , на пространство $R^3(\mathbf{x})$. Точки коллапса лежат на этих проекциях и могут быть получены из выражений $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X}(1, \mathbf{x}_0)$. Так как матрица Якоби $\partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{x}_0$, вообще говоря, вырождена при $t = 1$, то множество коллапса $M(\mathbf{x}_1)$ имеет в $R^3(\mathbf{x})$ размерность меньше трех, т. е. это может быть точка, линия или двумерная поверхность (иногда находящиеся на бесконечности). Далее явление коллапса иллюстрируется на примерах двух простых решений класса $D4$.

Решение $D4_1 2^0$. В цилиндрических координатах поле скоростей имеет вид (r, θ определены в (3))

$$u = -\frac{1}{1-t}(x + \bar{U}r), \quad v_r = \dot{u}, \quad v_\theta = \frac{r}{1-t}W,$$

где u есть осевая (по оси x), v_r — радиальная и v_θ — окружная компоненты вектора скорости. Тогда решение соответствующей системы (5)

$$x = (x_0 + Ur_0)(1-t) - Ur_0, \quad r = r_0, \quad \theta = \theta_0 + W \ln(1-t).$$

Проекция $L(\mathbf{x}_0)$ траекторий на $\bar{R}^3(\mathbf{x})$ даются уравнениями

$$r = r_0, \quad x = (x_0 + Ur_0) \exp \frac{\theta - \theta_0}{W} - Ur_0.$$

Точки коллапса ($t = 1$) определяются из уравнений $x_1 = -Ur_0$, $r_1 = r_0$, причем координата θ_1 остается неопределенной, так как при $t \rightarrow 1$ угол $\theta \rightarrow \infty$ (если $W < 0$). Множество коллапса $M(\mathbf{x}_1)$ есть конус с уравнением $x_1 = -Ur_1$. Любая траектория, выходящая при $t = 0$ из точки (x_0, r_0, θ_0) , лежит на цилиндре радиуса r_0 (с осью x) и неограниченно наматывается на него с экспоненциально убывающим шагом, приближаясь к окружности коллапса — сечению цилиндра плоскостью $x = -Ur_0$ (совпадающему с пересечением цилиндра и конуса $M(\mathbf{x}_1)$). Типичная траектория качественно представлена на рис. 1.

Решение $D4_3$ ($i = 254$). Для простоты положим $m = 1$. Тогда поле скоростей можно взять в виде

$$u = \frac{1}{1-t}, \quad v = -\frac{1}{1-t}(y + h \cos \lambda),$$

$$w = -\frac{1}{1-t}(z + h \sin \lambda), \quad \lambda = x + \ln(1-t),$$

причем в представлении плотности и давления надо заменить A на $-A$.

Решение соответствующей системы (5) имеет следующий вид:

$$x = x_0 - \ln(1-t), \quad y = (y_0 + h \cos x_0)(1-t) - h \cos x_0,$$

$$z = (z_0 + h \sin x_0)(1-t) - h \sin x_0.$$

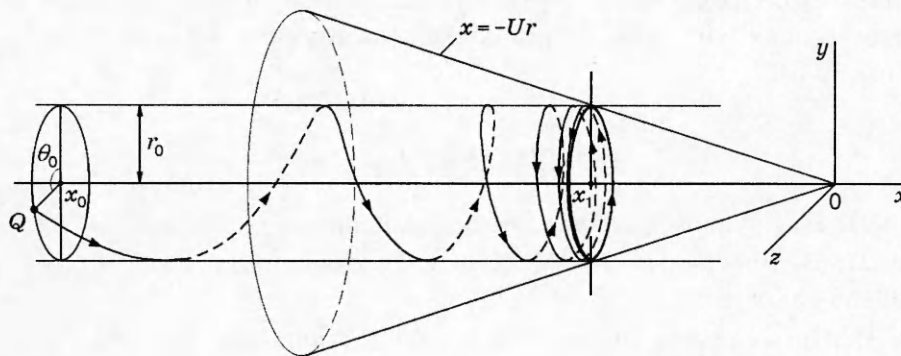


Рис. 1. Типичная траектория частицы Q , стартующей при $t = 0$ из точки (x_0, r_0, θ_0)

Проекции $L(\mathbf{x}_0)$ траекторий на $\tilde{R}^3(\mathbf{x})$ даются уравнениями

$$y + h \cos x_0 = (y_0 + h \cos x_0)e^{x_0 - x}, \quad z + h \sin x_0 = (z_0 + h \sin x_0)e^{x_0 - x}$$

и являются плоскими кривыми. Точки коллапса ($t = 1$) определяются из уравнений

$$x_1 = +\infty, \quad y_1 = -h \cos x_0, \quad z_1 = -h \sin x_0.$$

Множество коллапса $M(\mathbf{x}_1)$ есть окружность радиуса $|h|$ с центром на оси x при $x = +\infty$. Частицы, стартующие при $t = 0$ с плоскостей $x = x_0$ и $x = x_0 + 2\pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$), приходят в одну и ту же точку на $M(\mathbf{x}_1)$. Типичные траектории качественно представлены на рис. 2.

Заключение. Приведенные примеры простых решений УГД (1) показывают, что эти решения далеко не тривиальны: они описывают достаточно сложные движения газа. Вместе с тем относительная простота формул представления данных решений позволяет найти в конечном виде траектории движения частиц и детально проследить за динамикой наступления коллапса. Это же обстоятельство может упростить решение ряда интересных газодинамических задач, таких как продолжение решения за коллапс, сопряжение различных простых решений через слабые и сильные разрывы, распад произвольного разрыва и т. п. Предполагается также опубликование полного списка всех простых решений УГД (1).

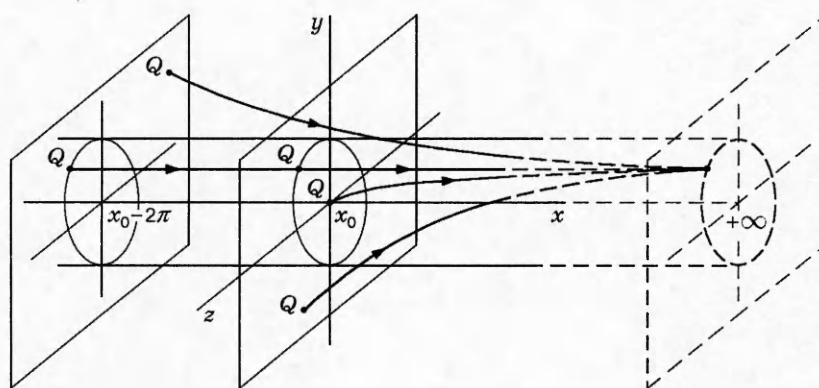


Рис. 2. Типичные траектории частиц Q , стартующих при $t = 0$ с плоскостей $x = x_0$ и $x = x_0 - 2\pi$

Автор выражает благодарность А. П. Чупахину за полезные обсуждения затронутых в данной работе вопросов и С. В. Хабирову, предоставившему некоторые материалы по подмоделям типа $(0,0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
3. **Головин С. В.** Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа. Новосибирск, 1996. (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики; № 5-96).
4. **Чупахин А. П.** О барохронных движениях газа // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 624–626.

Поступила в редакцию 30/X 1998 г.
