которая при $\gamma = 1$ переходит в хорошо известное соотношение $\operatorname{tg} \delta = 1/\omega\tau_\varepsilon$, получаемое из обычного реологического уравнения Максвелла.

Следует подчеркнуть, что соображения, приведшие к формуле (28), свидетельствуют, что природа фона имеет чисто релаксационный характер, не связанный ни с какими ретардационными процессами.

Поступила 3 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. London, 1959
2. Bland D. R. The theory of linear viscoelasticity. Pergamon Press. Oxford, London, New York, Paris, 1960 (русск. перев. под ред. Григолюка Э. И. Теория линейной вязкоупругости. Изд. «Мир», М., 1965)
3. Zener C. Elasticity and Anelasticity of metals, Chicago, 1948 (русск. перев под ред. Вонсовского С. В. Упругость и неупругость металлов. Изд. иностр. лит. 1954)
4. Бронский А. П. Явление последействия в твердом теле, ПММ, 1941, т. 5, вып. 1
5. Duffing G. Elastizität und Reibung beim Riementrieb. Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1931 Bd. 2, N 3, s. 99
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959
7. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, 1949
8. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 3, стр. 53.
9. Cole K. S., Cole R. H. Dispersion and Absorption in Dielectrics. J. Chem. Phys., 1941, vol. 9, p. 341.
10. Мешков С. И., Пачевская Г. Н., Шермергор Т. Д. К описанию внутреннего трения с помощью дробно-экспоненциальных ядер. ПМТФ, 1966, № 3, стр. 103

ТЕНЗОР ГРИНА ДЛЯ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

И. А. Кунин (Новосибирск)

Модель упругой среды простой структуры с пространственной дисперсией рассматривалась в [1, 2]. В изотропном случае уравнения для смещений в (k, ω)-представлении формально совпадают с уравнениями обычной теории упругости, но коэффициенты Ляме λ, μ зависят от модуля волнового вектора $\mathbf{k}$ и (в случае сложной структуры) от частоты ω. При этом $|\mathbf{k}| \leqslant \varkappa = \pi / a$, где $\varkappa$ — дебаевский радиус, a — характерный масштабный параметр среды. Цель настоящей заметки — построение для данной модели явного выражения для статического тензора Грина $G_{\alpha\beta}$ в $\mathbf{r}$-представлении.

Исходным будет известное выражение для $G_{\alpha\beta}$ в $\mathbf{k}$-представлении [1]

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2\mu(k)}\left[\delta_{\alpha\beta} - \frac{\lambda(k)+\mu(k)}{\lambda(k)+2\mu(k)}\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right] \quad \begin{pmatrix} k = |\mathbf{k}| \\ r = |\mathbf{r}| \end{pmatrix} \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем $f(\mathbf{k})$ обозначает фурье-образ $f(\mathbf{r})$.

Для поставленной цели удобно представить $G_{\alpha\beta}$ в виде суммы продольного (l) и поперечного (t) тензоров Грина

$$G_{\alpha\beta}{}^{l}(\mathbf{k}) = \frac{k_\alpha k_\beta}{\rho k^2 \omega_l^2(k)}, \qquad G_{\alpha\beta}{}^{t}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\rho\omega_t^2(k)}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) \tag{2}$$

$$\omega_l^2(k) = \frac{k^2[\lambda(k)+2\mu(k)]}{\rho}, \qquad \omega_t^2(k) = \frac{k^2\mu(k)}{\rho} \tag{3}$$

Здесь ρ — плотность. Для среды простой структуры уравнения $\omega = \omega_i(k)$ $(i = l, t)$ определяют продольную и поперечную ветви колебаний, причем функции $\omega_i(k)$ должны удовлетворять соотношениям

$$d\omega_i(0) / dk = c_i, \qquad d\omega(\varkappa) / dk = 0 \tag{4}$$

где c_i — скорости звука при $k = 0$. Запишем выражения для $\omega_i(k)$ в виде

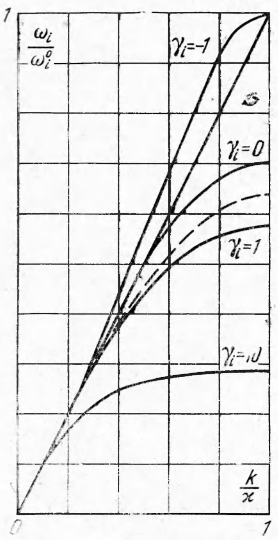
$$\omega_i^2 = c_i^2 k^2 / g_i(k^2) \tag{5}$$

где $g_i(x)$ — подходящий аппроксимирующий полином, удовлетворяющий условиям (4).

Случай $g_i = 1$, очевидно, соответствует дебаевской модели [3]. Более реалистическая модель получается, если положить

$$g_i(k^2) = 1 + \gamma_i (k/\varkappa)^2 + (k/\varkappa)^4 \qquad (-2 < \gamma_i < \infty) \tag{6}$$

Соответствующее семейство дисперсионных кривых, зависящих от параметра γ_i, показано на фигуре. Прямая линия соответствует дебаевской модели, $\omega_i^0 = c_i \varkappa$ — дебаевская частота. Пунктирная кривая соответствует модели Борна — Кармана [3] и, как видно из фигуры, практически совпадает с кривой $\gamma_i = 0.5$. В более общем случае параметр γ_i определяется из соотношения



Фиг. 1

$$\omega_i(\varkappa) / \omega_i^\circ = 1 / \sqrt{2 + \gamma_i} \tag{7}$$

В $\mathbf{r}$-представлении все допустимые функции (включая δ-функцию и тензор Грина) принадлежат классу целых аналитических функций степени $\leqslant \varkappa$. Это есть следствие обрезки фурье-спектров функций дебаевским радиусом или, что более наглядно, наличия элементарной единицы длины в $\mathbf{r}$-пространстве [1].

Для функций, зависящих только от r, формула обратного преобразования Фурье имеет вид

$$f(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\varkappa k \sin kr f(k)\, dk \tag{8}$$

Отсюда, в частности, следует выражение для трехмерной δ-функции в указанном классе функций

$$\delta_\varkappa(\mathbf{r}) = \frac{\varkappa}{2\pi^2 r^2} \left(\frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r} - \cos \varkappa r\right) \tag{9}$$

Заметим, что $\delta_\varkappa(\mathbf{r})$ переходит в обычную δ-функцию при $\varkappa \to \infty$. Для дебаевской модели $\omega_i(k) = c_i k$ $(i = l, t)$, и из (2) при учете (8) получаем явное выражение для тензоров Грина

$$G_{\alpha\beta}^{\ l}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho c_l^2} \partial_\alpha \partial_\beta F(r), \qquad G_{\alpha\beta}^{\ t}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho c_t^2} [\Delta F(r)\, \delta_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta F(r)] \tag{10}$$

$$F(r) = \frac{1}{4\pi^2 \varkappa} \left(\varkappa r \operatorname{Si} \varkappa r + \frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r} + \cos \varkappa r\right) \tag{11}$$

Здесь $\operatorname{Si} x$ — интегральный синус. В общем случае, подставляя (5) в (2), находим

$$G_{\alpha\beta}^{\ l}(\mathbf{r}) = \rho^{-1} c_l^{-2}\ \partial_\alpha \partial_\beta F_l(r), \qquad G_{\alpha\beta}^{\ t}(\mathbf{r}) = \rho^{-1} c_t^{-2} [\Delta F_t(r)\, \delta_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta F_t(r)] \tag{12}$$

$$F_i(r) = g_i(-\Delta) F(r) \qquad (i = l, t) \tag{13}$$

В частности, для модели (6)

$$F_i(r) = F(r) - {}^1/_2\, \gamma_i \pi^{-2} \varkappa^{-2} r^{-1} \operatorname{Si} \varkappa r - \varkappa^{-4} \delta_\varkappa(r) \tag{14}$$

При $r \gg a$ или, что то же, при $\varkappa \to \infty$ выражения (10) и (12) переходят в известные формулы обычной теории упругости. Однако, в отличие от обычной теории упругости, построенный тензор Грина, как указывалось выше, не имеет особенности в нуле. Это позволяет, например, вычислить упругую энергию W для сосредоточенной силы Q:

$$W = \frac{1}{2} Q^\alpha Q^\beta G_{\alpha\beta}(0) = \frac{Q^2 \varkappa}{10\pi^2 \rho} \left(\frac{\Gamma_l}{c_l^2} + \frac{2\Gamma_t}{c_t^2}\right) \tag{15}$$

Для модели (6) $\Gamma_i = 1 + {}^5/_{18}\, \gamma_i$ $(i = l, t)$, а для модели Борна — Кармана можно положить $\gamma_i = 0.5$.

Поступила 23 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Кунин И. А. Модель упругой среды простой структуры с пространственной дисперсией. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3, стр. 542.
2. Вдовин В. Е., Кунин И. А. Теория упругости с пространственной дисперсией. Трехмерная сложная структура. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
3. Займан Дж. Электроны и фононы. Изд. иностр. лит., 1962.