

УДК 532.542.2/.9

## ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОГЕРЕНТНОГО ЛУЧА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ И СЛОЕ СМЕШЕНИЯ

К. Н. Волков

Университет Суррея, GU2 7XH Гилфорд, Великобритания  
E-mail: dsci@mail.ru

Разрабатывается полуэмпирическая модель, предназначенная для исследования искажений фазовой функции когерентного луча, индуцированных турбулентными флуктуациями параметров потока. Проводится моделирование крупных вихрей течений в пограничном слое и слое смешения и вызываемых ими аэрооптических эффектов. Результаты численных расчетов сравниваются с данными физического эксперимента и данными, полученными на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса.

**Ключевые слова:** турбулентность, аэрооптические эффекты, моделирование крупных вихрей, пограничный слой, слой смешения.

**Введение.** Свободные сдвиговые течения характеризуются наличием когерентных структур, представляющих собой вихревые образования (сгустки завихренности, локализованные в пространстве), развивающиеся и взаимодействующие друг с другом в случае мелкомасштабной турбулентности. Когерентные структуры имеют размеры, соизмеримые с поперечным размером слоя смешения, и существуют в течение длительного времени.

Образование, взаимодействие и разрушение когерентных структур играет важную роль в распространении когерентного луча через поток жидкости или газа.

Прохождение когерентного луча через случайно-неоднородную среду (например, турбулентный пограничный слой или слой смешения) сопровождается возникновением оптических аберраций. Флуктуации претерпевают амплитуда и фаза волны, что вызывает появление помех, обусловленных изменением структуры оптического луча (расширение, флуктуации направления распространения, расщепление). При этом искажения амплитудных характеристик луча пренебрежимо малы по сравнению с флуктуациями фазы [1, 2]. Как правило, длина волны полагается значительно меньшей минимального масштаба турбулентных вихрей, и используется приближение геометрической оптики [3].

Исследованию распространения оптического излучения в среде посвящено большое количество работ (см., например, [2, 4]). Однако в основном результаты получены для случая распространения оптического излучения в атмосфере [1], где наибольшие оптические искажения вносят вихревые структуры максимального масштаба (за исключением приземного пограничного слоя, в котором оптические искажения определяются вихрями минимального масштаба). Влияние атмосферных эффектов обусловлено относительно низкими частотами, и эти эффекты достаточно легко выявляются с помощью современных экспериментальных средств, влияние турбулентного перемешивания на распространение оптического излучения обусловлено высокими частотами. Поскольку спектр масштабов и частот турбулентного течения изменяется на несколько порядков величины, это существенно затрудняет проведение прямых измерений и численных расчетов [2, 5].

Влияние флуктуаций показателя преломления на распространение оптического излучения зависит от отношения  $D/L$  ( $D$  — диаметр пучка,  $L$  — пространственный период изменения показателя преломления). При  $D \ll L$  градиент показателя преломления не меняется по сечению пучка, и отклоняется весь пучок. При  $D \sim L$  турбулентность действует как линза, которая переформирует волну. При  $D \gg L$  под влиянием турбулентности разные элементы в поперечном сечении оптического пучка отклоняются по различным направлениям (т. е. происходит рассеивание).

В отличие от потоков, формирующихся в результате турбулентного перемешивания среды (слои смешения, струи), для атмосферной турбулентности характерная длина  $L$  достаточно велика, а потери на рассеивание вследствие турбулентности незначительны [1].

При моделировании аэрооптических эффектов ключевым вопросом является выбор метода расчета поля флуктуирующих параметров турбулентного потока, в частности поля флуктуаций плотности [2, 4] (плотность связана с показателем преломления с помощью закона Гладстоуна — Дейла). Для численного моделирования разработан ряд полуэмпирических моделей различной степени сложности, наиболее распространенными из которых на практике являются модель однородной турбулентности [3] и модель неоднородной турбулентности [6]. В моделях [3, 6, 7] дисперсия флуктуаций плотности принимается в качестве разности плотностей среды вблизи стенки и внешней области пограничного слоя. В подходе [8] поле флуктуаций плотности связано с флуктуациями температуры с помощью уравнения состояния (при этом флуктуациями давления пренебрегается). Флуктуации температуры находятся с использованием аналогии Рейнольдса и модели Прандтля.

В работах [5, 9, 10] развиваются полуэмпирические модели, при построении которых применяется предположение о квазистационарности потока. Для выполнения условия квазистационарности необходимо, чтобы время отклика системы и время распространения сигнала не превышали время “замороженности” турбулентности, которое составляет порядка  $10^{-3} \div 10^{-2}$  с.

В работе [11] предложена методика численного моделирования аэрооптических характеристик дозвукового потока воздуха вблизи плоской прямоугольной выемки с учетом наличия поля турбулентных пульсаций показателя преломления. Для замыкания уравнений Рейнольдса используется модель Кокли, а также гипотеза “замороженной” стационарной локально-однородной и изотропной турбулентности с колмогоровским спектром пульсаций. Оптические характеристики турбулентной среды находятся по локальным значениям средних аэродинамических полей. Флуктуациями давления в силу их малости по сравнению с флуктуациями температуры пренебрегается. В случае вихревых структур максимального масштаба указанная гипотеза нарушается [4], а при определении пульсационных параметров потока и их средних значений пренебрегается микроструктурой турбулентного потока.

В работе [12] используется разложение мгновенного поля скорости и давления на среднюю по времени величину, случайную (некогерентную) составляющую, описывающую мелкомасштабное движение, и периодическую (когерентную) составляющую, соответствующую крупным вихрям, для замыкания основных уравнений применяется гипотеза вихревой вязкости.

В отличие от решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса моделирование крупных вихрей позволяет получить поле флуктуаций плотности и другие статистические характеристики турбулентности из решения фильтрованных уравнений Навье — Стокса [13–16].

В настоящей работе развивается полуэмпирическая модель и проводится моделирование крупных вихрей аэрооптических aberrаций в турбулентном пограничном слое и слое смешения. Обсуждаются результаты, полученные в рамках различных подходов, прово-

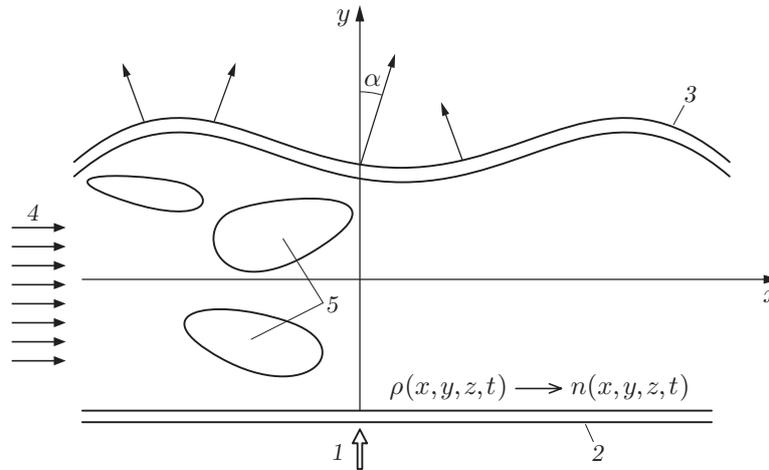


Рис. 1. Схема прохождения когерентного луча через случайно-неоднородную среду: 1 — излучение, 2 — невозмущенный волновой фронт, 3 — возмущенный волновой фронт, 4 — направление потока, 5 — вихревые образования

дится их сравнение друг с другом и с имеющимися расчетными и экспериментальными данными.

**1. Дисперсия флуктуаций фазы.** При прохождении монохроматической плоской волны через слой (среда полагается непроводящей и имеющей постоянную магнитную проницаемость), в котором показатель преломления меняется, амплитуда этой волны остается практически неизменной, а фаза претерпевает возмущения (рис. 1).

Угол, характеризующий направление луча, прошедшего через некоторый слой среды с переменной плотностью, определяется как производная от оптического пути луча

$$\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{d\varphi(\mathbf{x}, t)}{dt},$$

где  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  — фазовая функция волнового фронта. Путем интегрирования по времени получаем

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_0^t \alpha(\mathbf{x}, t) dt.$$

Для приложений представляет интерес разность мгновенного и среднего значений

$$\sigma_\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - \langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle.$$

Переход от временной постановки задачи к пространственной проводится с помощью гипотезы Тейлора о “замороженной” турбулентности.

На практике длина оптического пути определяется путем интегрирования распределения показателя преломления вдоль направления распространения луча [3]

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int [1 + n(\mathbf{x})] dl. \tag{1}$$

Зависимость показателя преломления от плотности устанавливается законом Гладстоуна — Дейла [2]

$$n(\mathbf{x}) = 1 + G[\rho(\mathbf{x}) - \rho_\infty], \tag{2}$$

где  $\rho_\infty$  — плотность невозмущенной среды;  $G$  — постоянная (для воздуха  $G = 2,23 \times 10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг}$ , слабой зависимостью от длины волны пренебрегается). Подставляя (2) в (1), получаем

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \{1 + G[\rho(\mathbf{x}) - \rho_\infty]\} dl.$$

Дисперсия мелкомасштабных флуктуаций плотности  $\sigma_\rho^2$  и соответствующий корреляционный масштаб  $l_\rho$  связаны с дисперсией фазы волны  $\sigma_\varphi^2$  соотношением [3]

$$\sigma_\varphi^2 = c\beta^2 \int \sigma_\rho^2 l_\rho dl, \quad (3)$$

где  $\beta = (2\pi/\lambda) dn/d\rho$ . Значение постоянной  $c$  зависит от принятой формы корреляционной функции пульсаций плотности. Например, для экспоненциальной корреляционной функции  $c = 2$ , для гауссовой  $c = \pi$ , что согласно выражению (3) приводит к различию в 11 % при оценке дисперсии флуктуаций фазы.

Линейный масштаб  $l_\rho$  находится интегрированием соответствующей корреляционной функции

$$l_\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\rho\rho}(y) dy.$$

В условиях локального равновесия корреляционный масштаб  $l_\rho$  совпадает с корреляционным масштабом пульсаций скорости  $l_u \sim k^{3/2}/\varepsilon$ . Такое предположение не выполняется вблизи стенки. На стенке пульсации скорости исчезают, поэтому  $k = 0$ ,  $l_u = 0$ , но  $l_\rho \neq 0$ .

Вместо соотношения (3) в пограничном слое используется полуэмпирическая формула [3]

$$\sigma_\varphi^2 = \beta^2 l_y \delta \sigma_\rho^2, \quad (4)$$

где  $l_y$  — интегральный масштаб турбулентности в направлении, нормальном к стенке. Дисперсия флуктуаций плотности оценивается как  $\sigma_\rho^2 = A^2(\rho_w - \rho_\infty)^2$  ( $\rho_w, \rho_\infty$  — значения плотности на стенке и в невозмущенном потоке;  $A = 0,1 \div 0,2$  — эмпирическая постоянная). При  $l_y \ll \delta$  для уточнения формулы (4) проводится интегрирование перпендикулярно пограничному слою [3, 7]:

$$\sigma_\varphi^2 = \beta^2 \int_0^\delta \sigma_\rho^2(y) l_y(y) dy.$$

При моделировании аэрооптических эффектов основной задачей является определение статистических характеристик турбулентного потока. В данной работе для этого используются полуэмпирическая вихревая модель и метод моделирования крупных вихрей.

**2. Полуэмпирическая модель.** Для изучения природы оптических aberrаций рассмотрим вихревую модель течения в пограничном слое и слое смешения, основанную на точном решении задачи о течении в плоском вихре Ламба.

Давление внутри вихря не является постоянным, что приводит к изменению плотности и показателя преломления. Давление и скорость связаны уравнением (вязкими эффектами пренебрегается)

$$\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

В предельных случаях, соответствующих вынужденному и свободному вихрям, распределение тангенциальной скорости описывается соотношением

$$u_{\theta}(r) = \begin{cases} Ur/R, & r \ll R, \\ UR/r, & r \gg R, \end{cases} \quad (5)$$

где  $R$  — радиус вихря;  $U$  — максимальная скорость, которая выражается через циркуляцию:  $U = \Gamma/(4\pi R)$ .

Поскольку завихренность принимает постоянное значение в вынужденном вихре и равна нулю в свободном вихре, имеем

$$\omega = \begin{cases} \Omega, & r \ll R, \\ 0, & r \gg R. \end{cases}$$

Комбинированный вихрь состоит из внутреннего ядра, вращающегося как твердое тело с постоянной завихренностью  $\Omega$ , и внешней области, в которой завихренность стремится к нулю.

В точке  $r = R$  распределение скорости, описываемое соотношением (5), является недифференцируемым. Для построения гладкого распределения скорости используется интерполяционная формула

$$u_{\theta}(r) = 2U \frac{r/R}{1 + (r/R)^2}, \quad (6)$$

которая удовлетворяет предельным соотношениям (5). Различие профилей скорости, описываемых соотношениями (5), (6), уменьшается при уменьшении радиуса вихря.

В предположении, что имеют место изэнтропические условия

$$p/p_{\infty} = (\rho/\rho_{\infty})^{\gamma},$$

распределение плотности находится из соотношения

$$\rho(r) = \rho_{\infty} \left( 1 - 2(\gamma - 1) \frac{(U/a_{\infty})^2}{1 + (r/R)^2} \right)^{1/(\gamma-1)},$$

удовлетворяющего предельным случаям

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_{\min}, & r \ll R, \\ \rho_{\infty}, & r \gg R, \end{cases}$$

где

$$\rho_{\min} = \rho_{\infty} [1 - 2(\gamma - 1)(U/a_{\infty})^2]^{1/(\gamma-1)} —$$

плотность в центре вихря. При  $\Delta\rho/\rho_{\infty} \ll 1$  распределение плотности описывается формулой

$$\frac{\rho - \rho_{\infty}}{\rho_{\infty}} = -\frac{2}{\gamma} \frac{(U/a_{\infty})^2}{1 + (r/R)^2}$$

( $a_{\infty}$  — скорость звука на бесконечности). Поскольку в центре вихря плотность меньше, чем на его периферии, это приводит к возникновению оптических аберраций.

Поток заменяется бесконечной цепочкой вихрей, расположенных вдоль одной линии на одинаковом расстоянии друг от друга и имеющих циркуляцию  $\Gamma$ . Результирующее распределение скорости описывается соотношением, полученным в [17].

Несмотря на то что построенная полуэмпирическая модель не учитывает размер апертуры и применима при достаточно больших (строго говоря, бесконечных) ее значениях,

данная модель представляется полезным физическим упрощением дозвуковых сдвиговых течений.

**3. Пограничный слой на плоской пластине.** Оптические aberrации во внешней области пограничного слоя имеют регулярный характер и сравнительно невелики. Определяющее влияние на распространение излучения оказывают характеристики потока во внутренней области пограничного слоя.

Используя вихревую модель и полагая, что луч проходит через центр вихря, после интегрирования по  $r$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  получаем

$$\Delta\varphi = -2\pi \frac{G}{\gamma} \left( \frac{U}{a_\infty} \right)^2 \rho_0 R, \quad (7)$$

где индекс 0 соответствует параметрам в точке торможения.

Рассмотрим непрерывный ряд вихрей, расположенных на одной линии и перемещающихся с постоянной скоростью. Каждый вихрь вносит оптические возмущения, максимальная интенсивность которых определяется в соответствии с соотношением (10). Полагая, что эти возмущения имеют приблизительно синусоидальный характер, получаем следующую зависимость интенсивности оптических aberrаций от плотности, скорости, интенсивности и размера вихря:

$$\sigma_\varphi \approx 4,48G\theta^2 M_\infty^2 \rho_0 R \quad (8)$$

( $M_\infty$  — число Маха невозмущенного потока; величина  $\theta = U/U_\infty$  имеет смысл интенсивности турбулентности). В предположении, что  $R \sim \delta^*/2$  ( $\delta^*$  — толщина потери импульса), а интенсивность турбулентности равна 10 %, из соотношения (8) следует

$$\sigma_\varphi \approx 1,48 \cdot 10^{-5} \Phi, \quad (9)$$

где  $\Phi = \delta^* \rho_0 M_\infty^2 / \rho_\infty$ . Согласно оценкам [9], проведенным на основе данных измерений, постоянный множитель в формуле (9) равен  $2,4 \cdot 10^{-5}$ .

Соотношение (9) дает линейную зависимость длины оптического пути луча от динамического давления, что согласуется с данными [18], но противоречит данным [19], согласно которым  $\sigma_\varphi \sim p_0^{1/2}$ .

**4. Слой смешения.** Вследствие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца свободного слоя смешения образуются крупномасштабные когерентные вихревые структуры, размер которых увеличивается вниз по потоку в соответствии с зависимостью, близкой к линейной. Формирование таких структур приводит к возникновению оптических aberrаций, которые подчиняются синусоидальной зависимости по пространственной и временной координатам [10].

Для изоэнтропических течений изменение плотности прямо пропорционально изменению давления и обратно пропорционально изменению температуры. Полагая, что изменение давления в слое смешения приблизительно пропорционально квадрату характерной скорости  $U_c = (U_2 + U_1)/2$ , получаем

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p}{p_0} \approx \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} U_c^2 = M_c^2,$$

где  $M_c = (U_1 - U_2)/(a_1 + a_2)$  — эффективное число Маха;  $U_1, U_2$  — скорости смешивающихся потоков. Среднеквадратичная величина оптических aberrаций связана с интегралом от изменения плотности. Выбирая в качестве характерного масштаба толщину потери завихренности, имеем

$$\sigma_\varphi \approx G \Delta\rho \delta_\omega \approx G\rho_0 M_c^2 \delta_\omega. \quad (10)$$

В выражении (10) толщина потери завихренности находится из соотношения [20]

$$\frac{d\delta_\omega}{dx} = 0,17 \frac{(1-\lambda)(1+s^{1/2})}{1+\lambda s^{1/2}},$$

где  $\lambda = U_2/U_1$ ;  $s = \rho_2/\rho_1$ . Учитывая, что  $\delta_\omega \sim x$ , получаем линейную зависимость величины оптических аберраций от координаты  $\sigma_\varphi \sim \rho_0 M_c^2 x$ .

Возмущения фазы при прохождении волны через слой толщиной  $L = |z_2 - z_1|$  находятся путем интегрирования распределения показателя преломления по толщине слоя

$$\Delta\varphi(x, y, t) = k \int_{z_1}^{z_2} \Delta n(x, y, z, t) dz,$$

где  $\Delta n(x, y, z, t)$  — изменение показателя преломления среды вдоль пути луча. При малых возмущениях волнового вектора интеграл принимает вид

$$\varphi(x, y, t) = k_0 \int_{z_1}^{z_2} n(x, y, z, t) dz. \quad (11)$$

Используя соотношение (11), результаты расчетов можно представить в виде [4]

$$\tilde{\varphi}(x, y, t) = \frac{\varphi(x, y, t)}{k_0 L \Delta n} \simeq \frac{1}{L \Delta n} \int_{z_1}^{z_2} [n(x, y, z, t) - n_\infty] dz. \quad (12)$$

Из выражения (12) следует, что в направлении распространения луча выполняется соотношение

$$\psi(x) = L \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{\Delta n} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial n}{\partial x} dz,$$

где  $L$  — размер области турбулентного перемешивания. Для спектров имеет место зависимость

$$S_\psi(k_x L) \sim (k_x L)^2 S_\varphi(k_x L).$$

Для слоя смещения принимается  $\Delta n = |n_1 - n_2|$ ,  $L = 2\delta$  ( $\delta$  — локальная ширина зоны смещения, индексы 1, 2 соответствуют смешивающимся потокам).

**5. Описание поля течения.** Нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается фильтрованными по пространству уравнениями Навье — Стокса, которые дополняются уравнением состояния совершенного газа и RNG-моделью (Re-normalized group model) подсеточной вязкости (постоянной модели присваивается значение 0,157). Ширина фильтра зависит от размера шага разностной сетки. В подсеточной модели учет сжимаемости оказывает слабое влияние на результаты численного моделирования. Для получения зависимости молекулярной вязкости от температуры используется закон Сазерленда (в качестве рабочей среды рассматривается воздух).

На стенке используются граничные условия непротекания и прилипания. На границах, через которые газ покидает расчетную область, используются неотражающие граничные условия, а в направлении, нормальном к плоскости развития течения, — периодические граничные условия.

При моделировании течения в пограничном слое на плоской пластине на входе в расчетную область задается профиль скорости, полученный при решении задачи Блазиуса [17], на который накладываются малые случайные возмущения. При моделировании

слоя смещения на входной границе задается профиль скорости, описываемый соотношением

$$u(y) = u_0 + \Delta u \operatorname{th}(y/\delta)\xi,$$

где  $\xi$  — случайное число, выбираемое из нормального распределения вероятности с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Среднеквадратичное значение пульсаций плотности находится путем обработки результатов расчетов по формуле

$$\sigma_\rho^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\rho(x, y, z, t_i) - \langle \rho(x, y, z) \rangle]^2$$

( $N$  — число шагов по времени; угловые скобки обозначают осреднение). Для получения статистически достоверной осредненной картины течения выполняется  $5 \cdot 10^4$  шагов по времени.

Дискретизация основных уравнений проводится с использованием метода конечных объемов [21]. Уравнения Навье — Стокса записываются в виде

$$\frac{dQ_{i,j,k}^n}{dt} + L(Q_{i,j,k}^n) = 0,$$

где

$$L(Q_{i,j,k}^n) = \frac{F_{i+1/2,j,k}^n - F_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x_{i,j,k}} + \frac{G_{i,j+1/2,k}^n - G_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y_{i,j,k}} + \frac{H_{i,j,k+1/2}^n - H_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z_{i,j,k}},$$

$F$ ,  $G$ ,  $H$  — векторы потоков; нижние индексы соответствуют ячейке сетки, верхний индекс — слою по времени.

Для дискретизации по времени используется трехшаговый метод Рунге — Кутты:

$$\begin{aligned} Q_{i,j,k}^{(1)} &= Q_{i,j,k}^{(n)} + \Delta t L(Q_{i,j,k}^{(n)}), \\ Q_{i,j,k}^{(2)} &= 3Q_{i,j,k}^{(n)}/4 + [Q_{i,j,k}^{(1)} + \Delta t L(Q_{i,j,k}^{(1)})]/4, \\ Q_{i,j,k}^{(n+1)} &= Q_{i,j,k}^{(n)}/3 + 2[Q_{i,j,k}^{(2)} + \Delta t L(Q_{i,j,k}^{(2)})]/3. \end{aligned}$$

Область устойчивости имеет вид круга с радиусом  $r_c$  (для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $\Delta t < r_c$ ). На комплексной плоскости область устойчивости представляется в виде круга

$$x + iy = r_c \exp(i\theta),$$

радиус которого находится из соотношения

$$r_c = \min_{\theta} r(\theta) \quad \text{при} \quad \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2.$$

В частности, для трехшагового метода Рунге — Кутты  $r_c = 1,25$ . Преимуществом метода Рунге — Кутты является также то, что он обеспечивает положительность разностной схемы (если в момент времени  $t^n$  решение и оператор  $L(Q)$  являются положительными, то они останутся положительными и в момент времени  $t^{n+1}$ ).

Вектор потока расщепляется на невязкую и вязкую составляющие. Использование центрированных разностных схем для дискретизации конвективных слагаемых при больших числах Рейнольдса приводит к вычислительной неустойчивости и нефизическим осцилляциям решения. Для дискретизации невязких потоков применяются метод кусочно-параболической реконструкции и схема Чакраварти — Ошера, а для дискретизации вязких

потоков — центрированные конечно-разностные формулы второго порядка. Невязкий поток находится из соотношения

$$F(Q_L, Q_R) = [F(Q_L) + F(Q_R) - |A|(Q_R - Q_L)]/2,$$

где индексы  $L, R$  соответствуют ячейкам, находящимся слева и справа от грани контрольного объема. Матрица  $A$  представляется в виде  $A = R|\Lambda|L$ , где  $\Lambda$  — диагональная матрица, составленная из собственных чисел якобиана;  $R, L$  — матрицы, составленные из его правых и левых собственных векторов.

Схема Чакраварти — Ошера предполагает кусочно-параболическое распределение искоемых переменных в пределах контрольного объема. На промежуточном шаге определяются вспомогательные переменные

$$\begin{aligned}\alpha_{1,m+1/2}^i &= l_{m+1/2}^i(Q_m - Q_{m-1}), & \alpha_{2,m+1/2}^i &= l_{m+1/2}^i(Q_{m+1} - Q_m), \\ \alpha_{3,m+1/2}^i &= l_{m+1/2}^i(Q_{m+2} - Q_{m+1}),\end{aligned}$$

где  $l = \{l_1, l_2, \dots\}$  — множество левых собственных векторов; верхний индекс  $i$  соответствует  $i$ -му собственному числу и  $i$ -му собственному вектору; нижние индексы 1, 2, 3 используются для нумерации вспомогательных величин.

Семейство схем, удовлетворяющих условию TVD (total variation diminishing), имеет вид

$$\begin{aligned}F_{m+1/2} &= H_{m+1/2} + \sum_i \left( \frac{1+\varkappa}{4} \tilde{\alpha}_{2,m+1/2}^i + \frac{1-\varkappa}{4} \tilde{\alpha}_{2,m+1/2}^i \right) \lambda_{m+1/2}^{i+} r_{m+1/2}^i - \\ &\quad - \sum_i \left( \frac{1+\varkappa}{4} \tilde{\alpha}_{2,m+1/2}^i + \frac{1-\varkappa}{4} \tilde{\alpha}_{3,m+1/2}^i \right) \lambda_{m+1/2}^{i+} r_{m+1/2}^i,\end{aligned}$$

где  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ ,  $r = \{r_1, r_2, \dots\}$  — множество собственных чисел и множество правых собственных векторов соответственно. Первый член в правой части определяет поток по схеме первого порядка:

$$H_{m+1/2} = \frac{1}{2} [F(Q_{m+1/2}) + F(Q_m)] - \frac{1}{2} \sum_i (\lambda_{m+1/2}^{i+} - \lambda_{m+1/2}^{i-}) \alpha_{2,m+1/2}^i r_{m+1/2}^i.$$

Коэффициенты разностной схемы находятся по соотношениям

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{1,m+1/2}^i &= \min\text{mod} \{ \alpha_{1,m+1/2}^i, b\alpha_{2,m+1/2}^i \}, & \tilde{\alpha}_{2,m+1/2}^i &= \min\text{mod} \{ \alpha_{2,m+1/2}^i, b\alpha_{1,m+1/2}^i \}, \\ \tilde{\alpha}_{2,m+1/2}^i &= \min\text{mod} \{ \alpha_{2,m+1/2}^i, b\alpha_{3,m+1/2}^i \}, & \tilde{\alpha}_{3,m+1/2}^i &= \min\text{mod} \{ \alpha_{3,m+1/2}^i, b\alpha_{2,m+1/2}^i \},\end{aligned}$$

где  $b = (3 - \varkappa)/(1 - \varkappa)$ ; параметр  $\varkappa$  определяет схемы различной точности. Ограничитель потока имеет вид

$$\min\text{mod}(x, y) = \text{sign}(x) \max \{ 0, \min [|x|, y \text{sign}(x)] \}.$$

Шаг интегрирования по времени находится из оценки невязких и вязких потоков

$$\frac{1}{\Delta t_i} = \frac{1}{\text{CFL}} \max \left\{ \frac{1}{\Delta t_i^1}, \frac{\beta}{\Delta t_i^2} \right\}$$

(CFL — число Куранта — Фридрихса — Леви;  $\beta \approx 0,5$ ). Шаг по времени  $\Delta t_i^1$  вычисляется из спектрального радиуса якобиана дискретного невязкого оператора, а шаг по времени  $\Delta t_i^2$  — из квазилинейной формы вязких потоков, записанных в примитивных переменных, и спектрального радиуса якобиана дискретного вязкого оператора [21].

Вычислительная процедура реализуется в виде следующей последовательности шагов.

1. Реконструкция решения в каждом контрольном объеме, экстраполяция неизвестных для нахождения состояния потока на гранях этого объема по величинам, заданным в центре (reconstruction).

2. Решение задачи Римана для каждой грани контрольного объема с учетом локального направления потока (в направлении нормали к грани контрольного объема).

3. Реализация шага по времени (evolution).

Система разностных уравнений решается многосеточным методом на основе схемы полной аппроксимации. В качестве сглаживающего алгоритма используется обобщенный метод взвешенных невязок. Для распараллеливания вычислительной процедуры применяется интерфейс межпроцессорного взаимодействия MPI.

**6. Результаты расчетов.** Основные цели моделирования течений в слое смешения и пограничном слое заключаются в нахождении среднего и флуктуационного полей плотности. Подробные результаты численного моделирования, относящиеся к распределениям средних и пульсационных характеристик потока, приведены в работах [14–16].

6.1. *Пограничный слой на пластине.* Координата  $x$  направлена вдоль пластины, координата  $y$  — по нормали к ней. Начало системы координат расположено в передней кромке пластины. Пластина имеет постоянную температуру  $T_w = 300$  К. Расчеты проводятся при  $Re_\delta = 2,6 \cdot 10^4$  (число Рейнольдса, вычисленное по толщине пограничного слоя  $\delta = 18$  мм) и  $Re_{\delta_m} = 2,8 \cdot 10^3$  (число Рейнольдса, вычисленное по толщине потери импульса  $\delta_m = 2,2$  мм) на сетке  $180 \times 90 \times 90$ ; при этом  $x^+ = 45$ ,  $y_{\min}^+ = 1$ ,  $z^+ = 14$  (индекс “+” соответствует безразмерной пристенной координате); шаг по времени равен  $\Delta t = 2,1 \cdot 10^{-5}$  с.

Уровень флуктуаций плотности, полученный в расчетах, на 10–20 % выше полученного при измерениях (рис. 2). Максимум распределения пульсаций плотности по поперечной координате расположен достаточно близко к стенке. При  $0,2 < y/\delta < 0,6$  среднеквадратичное значение флуктуаций плотности остается практически постоянным, что приводит к равномерному распределению дисперсии флуктуаций фазы волны в данной области.

Сравнение линейных масштабов  $l_u$  и  $l_\rho$  показывает, что их равенство имеет место лишь в интервале  $0,10 < y/\delta < 0,22$ . В остальной области пограничного слоя корреляционный масштаб пульсаций скорости существенно меньше корреляционного масштаба пульсаций плотности.

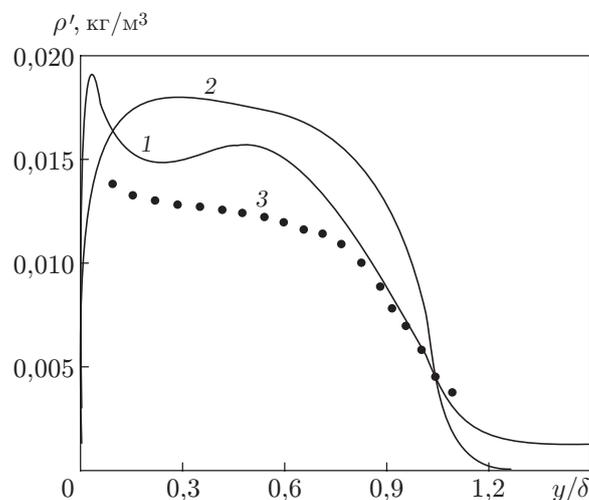


Рис. 2. Распределения флуктуаций плотности в пограничном слое:

1 — результаты расчетов, 2, 3 — данные [7] (2 — расчет, 3 — измерения при  $M_\infty = 0,88$ )

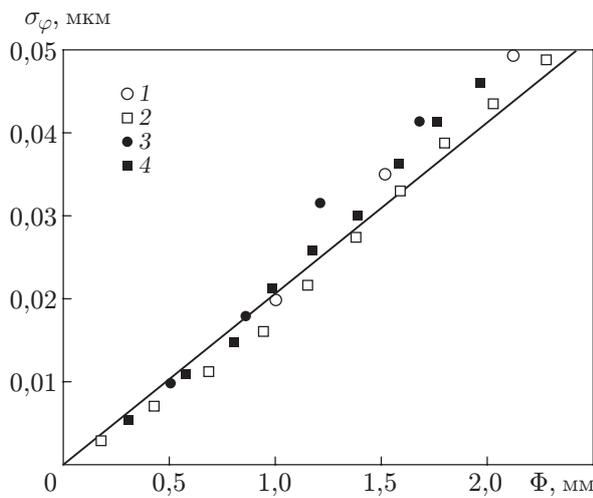


Рис. 3

Рис. 3. Среднеквадратичные значения оптических aberrаций в пограничном слое: линия — расчет по соотношению (9), 1, 3 — данные [9], 2, 4 — результаты моделирования крупных вихрей; 1, 2 —  $x = 0,11$  см, 3, 4 —  $x = 0,16$  см

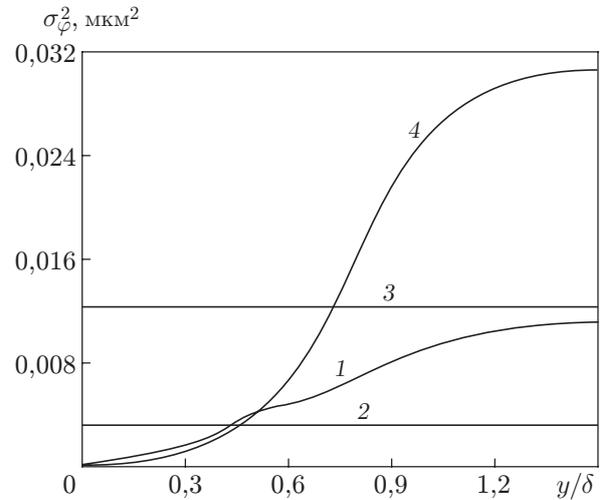


Рис. 4

Рис. 4. Распределения дисперсии флуктуаций фазовой функции волнового фронта в пограничном слое:

1 — результаты численного моделирования, 2, 3 — расчет по модели [3] (2 —  $A = 0,1$ , 3 —  $A = 0,2$ ), 4 — расчет по модели [7]

На рис. 3 для пограничного слоя на плоской пластине приведены результаты расчетов по зависимости (9), а также данные работы [9] и результаты моделирования крупных вихрей при  $x = 0,11; 0,16$ . Видно, что численные расчеты дают меньшие значения дисперсии фазовой функции волнового фронта по сравнению с данными [9] при обоих значениях координаты  $x$ .

На рис. 4 приведены результаты расчетов величины оптических aberrаций в пограничном слое при  $c = 2$ . Видно, что расчеты по модели [7] (кривая 4) дают бóльшие значения, чем расчет по модели [3] (кривые 2, 3). В отличие от кривой 4 распределение дисперсии фазы волны, полученное на основе моделирования крупных вихрей (кривая 1), имеет точку перегиба.

6.2. *Слой смешения.* Два полубесконечных потока газа движутся в одном направлении со скоростями  $U_1, U_2$  вдоль плоскости  $x < 0, y = 0$ . В точке  $x = 0$  потоки соприкасаются, и далее (при  $x > 0$ ) на границе между этими потоками имеет место турбулентность.

Расчеты проводятся на сетке размером  $250 \times 80 \times 80$  при  $Re_\delta = 2 \cdot 10^5, M_c = 0,8$  (перепад плотностей составляет  $\rho_2/\rho_1 = 4$ ). Толщина потери завихренности в начальном сечении равна  $\delta_{\omega_0} = 0,02$  м. Расчетная область имеет длину  $25\delta_{\omega_0}$  и ширину  $6\delta_{\omega_0}$  (координата  $y$  изменяется в диапазоне  $-3\delta_{\omega_0} \leq y \leq 3\delta_{\omega_0}$ ). В направлении оси  $z$  протяженность расчетной области составляет  $5\delta_{\omega_0}$  (используются периодические граничные условия). Сгущение узлов сетки производится таким образом, чтобы вблизи линии раздела потоков ширина фильтра имела порядок тейлоровского микромасштаба длины. Шаг по времени выбирается равным  $\Delta t = 1,5 \cdot 10^{-3}$  с.

Профили флуктуаций плотности в слое смешения приведены на рис. 5. Видно, что в поперечных сечениях слоя смешения распределения флуктуаций плотности и давления имеют одинаковую форму с максимумом на линии раздела потоков. Профили пульсаций

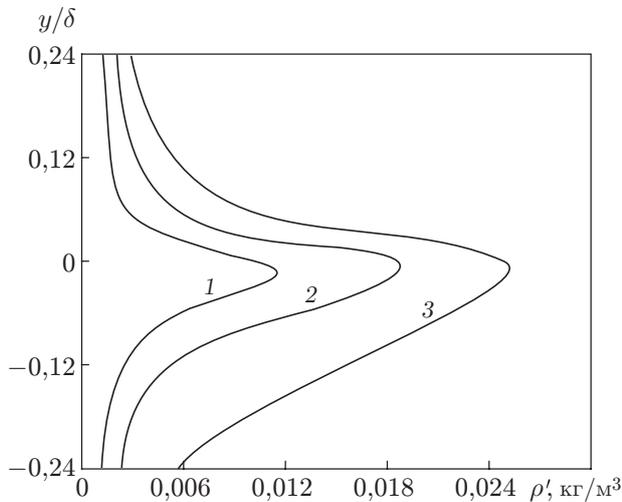


Рис. 5

Рис. 5. Профили флуктуаций плотности в различных поперечных сечениях слоя смешения:

1 —  $x/L = 0,25$ ; 2 —  $x/L = 0,5$ ; 3 —  $x/L = 0,75$

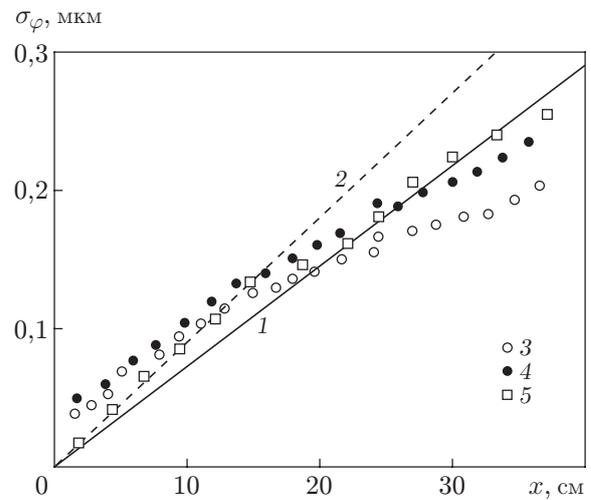


Рис. 6

Рис. 6. Среднеквадратичные значения оптических aberrаций в слое смешения:

1 — расчет по соотношению (10), 2 — расчетные данные [9], 3, 4 — экспериментальные данные [10] (3 —  $A = 20$  см, 4 —  $A = 30$  см), 5 — результаты моделирования крупных вихрей

давления являются более наполненными (площадь, ограниченная кривой, увеличивается), а максимальное значение пульсаций давления увеличивается по координате  $x$  в соответствии с зависимостью, близкой к линейной. Малые отклонения от линейной зависимости имеют место лишь при  $x/L > 0,68$ . В то же время зависимость максимальной величины флуктуаций плотности от продольной координаты является немонотонной. При  $x/L < 0,6$  такая зависимость близка к линейной, затем максимальная величина флуктуаций плотности достигает наибольшего значения и постепенно уменьшается. Результаты расчетов показывают, что  $l_\rho \sim 4l_u$ , где  $l_u = 0,2k^{3/2}/\varepsilon$ .

Приведенные на рис. 6 результаты расчетов для слоя смешения по полуэмпирической зависимости (10) при  $M_c = 0,24$ ,  $U_1 = 260$  м/с,  $M_1 = 0,77$ ,  $U_2 = 0,06$  м/с,  $M_2 = 0,06$  (при этом  $d\delta_\omega/dx \approx 0,25$ ) удовлетворительно согласуются с данными физического эксперимента [10] в случае достаточно больших размеров апертуры (при  $A > 20$  см) и с результатами моделирования крупных вихрей.

Линия 2 на рис. 6 соответствует результатам, полученным в работе [9] с использованием синусоидального закона для угла отклонения  $\alpha = \sin(2\pi ft)$ , где  $f = U_c/\Lambda$  — частота формирования вихрей;  $\Lambda$  — размер вихря;  $U_c$  — характерная скорость. Такой подход позволяет получить зависимость величины оптических aberrаций от продольной координаты в конечном виде. Однако согласование расчетных данных с данными измерений ухудшается вниз по потоку.

Для волнового спектра в промежуточном диапазоне волновых чисел имеет место степенная зависимость  $S_\varphi(k_x L) \sim (k_x L)^{-q}$ , где  $q \approx 2$  (рис. 7). Сжимаемость оказывает сравнительно слабое влияние на спектр [4], в основном это влияние имеет место при больших волновых числах.

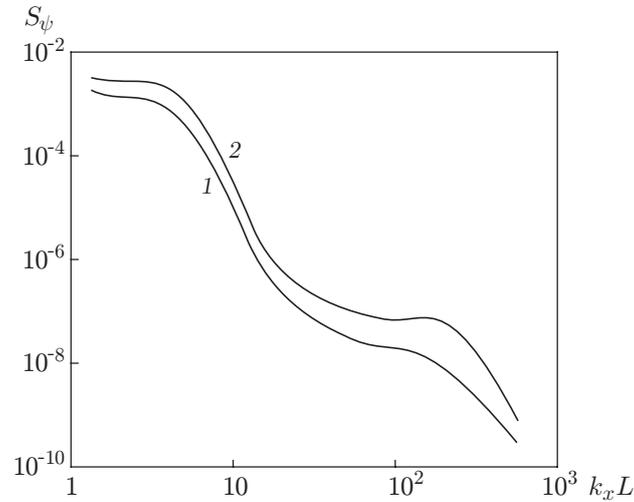


Рис. 7. Спектр флуктуаций фазы в свободном слое смешения:  
1 —  $M_c = 0,2$ , 2 —  $M_c = 0,8$

Для волнового спектра в свободной струе при  $Re = (2 \div 8) \cdot 10^4$  и больших волновых числах:  $2r_a k_x > 1$  ( $r_a$  — радиус выходного сечения сопла) имеет место степенная зависимость  $S_\varphi(k_x L) \sim (2r_a k_x)^{-q}$  ( $q \approx 2,5$ ) [13]. Результаты расчетов для струи нормируются на  $\Delta n = |n_a - n_\infty|$  и  $L = 2r_a$  (индексы  $a, \infty$  соответствуют параметрам на срезе сопла и в затопленном пространстве). Из работы [16] следует, что вследствие более сильного турбулентного перемешивания спектр для струи более крутой, чем для слоя смешения. При этом число Рейнольдса, вычисленное по параметрам на срезе сопла, не оказывает существенного влияния на спектр [13].

**Заключение.** Моделирование крупных вихрей турбулентных течений в пограничном слое и слое смешения позволяет получить информацию о средних и флуктуирующих параметрах потока, а также рассчитать характеристики распространения излучения в случайно-неоднородной среде без использования полуэмпирических моделей и упрощающих предположений.

Анализ результатов расчетов, полученных на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса, и их сравнение с данными моделирования крупных вихрей показывают, что использование полуэмпирических моделей турбулентности дает заниженный уровень дисперсии флуктуаций фазы волны, который может отличаться от данных моделирования крупных вихрей в несколько раз (это обусловлено неопределенностью постоянных множителей, входящих в соответствующие расчетные соотношения).

Результаты моделирования крупных вихрей и вызываемых ими аэрооптических эффектов в пограничном слое на плоской пластине и в свободном слое смешения показывают, что спектр флуктуаций фазы достаточно слабо зависит от параметров на входе в расчетную область и от сжимаемости потока (такое влияние имеет место при больших волновых числах).

Полуэмпирические соотношения, построенные на основе вихревой модели течения, позволяют с удовлетворительной точностью рассчитать среднеквадратичную величину оптических aberrаций в пограничном слое на плоской пластине и в свободном слое смешения. Для пограничного слоя на плоской пластине зависимость среднеквадратичной величины флуктуаций фазы волны от динамического давления является линейной, а для слоя смешения — линейной начиная от координаты, отсчитываемой вдоль направления распространения потока.

Полученные результаты представляются полезными для учета влияния флуктуаций плотности на прохождение оптического излучения через случайно-неоднородную среду в расчетах, основанных на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса. Разработанные средства численного моделирования можно использовать для исследования искажений фазовой функции когерентного луча, индуцированных турбулентными флуктуациями параметров среды, в лазерных измерительных системах и других устройствах, а также для развития адаптивных методов компенсации искажений оптического сигнала, в частности в когерентных адаптивных оптических системах с управляемым волновым фронтом излучаемого поля.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Зуев В. Е.** Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М.: Сов. радио, 1970.
2. **Jumper E. J., Fitzgerald E. J.** Recent advances in aero-optics // *Progress Aerospace Sci.* 2001. V. 37, N 3. P. 299–339.
3. **Sutton G. W.** Aero-optical foundations and applications // *AIAA J.* 1985. V. 23, N 10. P. 1525–1537.
4. **Dimotakis P. E., Catrakis H. J., Fourquette D. C.** Flow structure and optical beam propagation in high-Reynolds-number gas-phase shear layers and jets // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 433. P. 105–134.
5. **Gordeyev S., Jumper E. J.** The optical environment of a cylindrical turret with a flat window and the impact of passive control devices. S. l., 2005. (Paper / AIAA; N 2005-4657).
6. **Sutton G. W.** Effect of inhomogeneous turbulence on imaging through turbulent layers // *Appl. Optics.* 1994. V. 33, N 18. P. 3972–3976.
7. **Tromeur E., Garnier E., Sagaut P.** Analysis of the Sutton model for aero-optical properties of compressible boundary layers // *J. Fluids Engng.* 2006. V. 128. P. 239–246.
8. **Truman C. R.** The influence of turbulent structure on optical phase distortion through turbulent shear flow. S. l., 1992. (Paper / AIAA; N 92-2817).
9. **Gordeyev S., Jumper E. J.** Aero-optical characteristics of compressible, subsonic turbulent boundary layers. S. l., 2003. (Paper / AIAA; N 2003-3606).
10. **Siegenthaler J. P., Gordeyev S., Jumper E.** Shear layers and aperture effects for aero-optics. S. l., 2005. (Paper / AIAA; N 2005-4772).
11. **Котеров В. Н., Савельев А. Д., Толстых А. И.** Численное моделирование аэрооптических полей около приемного порта воздушной обсерватории // *Мат. моделирование.* 1997. Т. 9, № 1. С. 27–39.
12. **Lifshitz Y., Degani D., Tumin A.** On the interaction of turbulent shear layers with harmonic perturbations // *Flow, Turbulence Combust.* 2008. V. 80, N 1. P. 61–80.
13. **Волков К. Н., Емельянов В. Н.** Аэрооптические эффекты в турбулентном потоке и их моделирование // *Журн. техн. физики.* 2008. Т. 78, № 2. С. 77–84.
14. **Волков К. Н.** Моделирование крупных вихрей полностью развитого турбулентного течения в канале и сравнение моделей подсеточной вихревой вязкости // *ПМТФ.* 2006. Т. 47, № 3. С. 31–42.
15. **Волков К. Н.** Расчет свободного слоя смешения на основе метода крупных вихрей // *Мат. моделирование.* 2007. Т. 19, № 9. С. 114–128.
16. **Волков К. Н.** Моделирование крупных вихрей неизотермической турбулентной струи, истекающей в затопленное пространство // *Теплофизика высоких температур.* 2008. Т. 46, № 5. С. 81–90.

17. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкостей. М.: Мир, 1973.
18. **Fitzgerald E. J., Jumper E. J.** Scaling aero-optic aberrations produced by high-subsonic-Mach shear layer // AIAA J. 2002. V. 40, N 7. P. 1373–1381.
19. **Gilbert K. G.** KC-135 aero-optical boundary-layer/shear-layer experiments // Aero-optical phenomena / Ed. by K. G. Gilbert, L. J. Otten. N. Y.: AIAA, 1982. V. 80. P. 306–324.
20. **Paramoschou D., Roshko A.** The compressible turbulent shear layer: an experimental study // J. Fluid Mech. 1988. V. 197. P. 453–477.
21. **Волков К. Н.** Дискретизация уравнений Навье — Стокса на неструктурированной сетке при помощи метода контрольного объема и разностных схем повышенной разрешающей способности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 7. С. 1250–1273.

*Поступила в редакцию 7/V 2009 г.,  
в окончательном варианте — 25/VIII 2009 г.*

---