

## НОВАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СМАЧИВАЮЩИХ ПЛЕНОК

УДК 532.5

О. В. Воинов

Институт механики многофазных систем СО РАН,  
625026 Тюмень

Рассматриваются медленные движения смачивающих пленок вязкой жидкости в тонких капиллярах. Как известно, граница раздела газ — жидкость в капилляре (мениск) может образовывать динамический краевой угол с твердой стенкой [1, 2]. При малых углах возможна стационарная прекурсионная пленка (п-пленка), движущаяся под действием сил Ван-дер-Ваальса. Ее характерная максимальная толщина зависит от скорости [1].

Математическая модель нестационарной динамики смачивающих пленок [3] включает краевые условия на подвижной границе с «толстой» пленкой и на линии смачивания. Новая модель описывает медленное смачивание, когда краевого угла нет. Нелинейная краевая задача соответствует нестационарному течению пленки с двумя пограничными слоями. Найдены критерии реализации предельных режимов динамики п-пленки. Показано, что при течении с краевым углом длина п-пленки много меньше радиуса капилляра. Существенные эффекты динамики смачивающих пленок могут быть описаны только в рамках новой модели. Преимущественно в ее рамках может реализоваться динамика п-пленки при подъеме жидкости в тонком капилляре.

Получено общее аналитическое решение нелинейной автомодельной задачи смачивания в плоском случае. Ранее были известны основные асимптотики и аналитическое решение осесимметричной задачи [3]. Установлена аналогия задач смачивания сухой поверхности и поверхности, покрытой сверхтонкой пленкой, а также растекания смачивающих пленок в случаях неподвижного мениска, полубесконечной пленки и распада разрыва толщины. Найдены границы справедливости полученных автомодельных решений как промежуточных асимптотик при  $t \rightarrow \infty$ , в которых не учитывается влияние силы тяжести.

**1. Равновесная межфазная граница и динамика смачивающей пленки.** Ползущее движение тонкой смачивающей пленки вязкой жидкости по плоской твердой поверхности при наличии ускорения силы тяжести  $g$  и сил Ван-дер-Ваальса подчиняется известному уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\operatorname{div} \left[ \frac{h^3}{3\mu} \left( \operatorname{grad} \left( \sigma \Delta h + \frac{A'}{6\pi h^3} \right) + \rho g \right) \right], \quad (1.1)$$

где  $h$  — толщина пленки;  $|\nabla h| \ll 1$ ;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $\rho$  — плотность;  $A'$  определяется через постоянные Гамакера [4]. При малой скорости  $v_0$  движения границы раздела фаз ( $|\operatorname{Ca}| \ll 1$ ,  $\operatorname{Ca} = \mu v_0 / \sigma$ ) в круглом или плоском капилляре (рис. 1) ее форма на достаточно большом расстоянии от стенки ( $h \gg h_0$ ) близка к равновесной:

$$\sigma(R_1^{-1} + R_2^{-1}) = \rho g(x - x_0) + \sigma R^{-1} + \operatorname{const} \quad (1.2)$$

(граница раздела симметрична относительно оси капилляра,  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны, ось  $x$  направлена против  $g$ ,  $g = |g|$ ). В плоскости  $x, h$  радиус кривизны  $R_1 \rightarrow R$

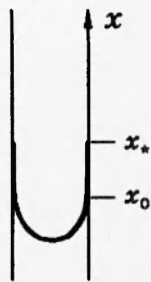


Рис. 1

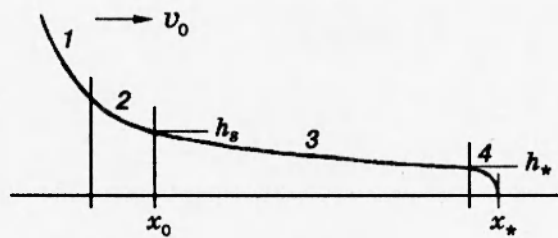


Рис. 2

при  $x \rightarrow x_0$ ,  $x_0$  — точка пересечения границы (1.2) с твердой стенкой ( $h = 0$  при  $x = x_0$ ),  $x'_0 = v_0$ . Динамика тонкой п-пленки не зависит от второго радиуса кривизны  $R_2$ , если круглый капилляр однороден вдоль своей оси. Отметим, что если динамика пленки контролируется капиллярными силами, то при достаточно большой ее длине, роль  $R_2$  может быть существенна.

Рассмотрим параметр  $h_0$ , разделяющий область малых толщин ( $h \lesssim h_0$ ), в которой существенно ползущее течение, и область больших толщин ( $h \gg h_0$ ), где верно (1.2). Если краевой угол  $\alpha_0 \rightarrow 0$ , то  $h \sim h_0$  соответствует  $|x - x_0| \sim \delta \sim \sqrt{h_0 R}$  благодаря ограниченности числа Бонда  $Bo = \rho g R^2 / \sigma$  ( $Bo \lesssim 1$ ). Из (1.2) следует асимптотическое ( $\delta/R \rightarrow 0$ ) краевое условие для (1.1):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{R} + \frac{\rho g}{\sigma}(x - x_0) + \dots \quad \text{при} \quad \frac{x - x_0}{\delta} \rightarrow -\infty.$$

Пренебрегая малыми величинами  $\sim Bo \delta/R$ , запишем

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{R} + \dots \quad \text{при} \quad \frac{x - x_0}{\delta} \rightarrow -\infty, \quad |x - x_0| \ll \bar{h}. \quad (1.3)$$

Этому соответствует параболический профиль мениска

$$h = (1/2R)(x - x_0)^2 - \alpha_0(x - x_0) + \dots \quad (1.4)$$

( $\alpha_0$  — динамический краевой угол). Параметр  $h_0 \sim \alpha_0^2 R$  [1, 2].

Для замыкания асимптотической постановки задачи (1.1)–(1.4) достаточно задать расход жидкости (переменный в общем случае) в капилляре, а также условия для (1.1) на линии смачивания и начальные условия. Примем, что в начальный момент  $t = 0$  линия смачивания  $x = x_*$  близка к краю мениска ( $x_* = x_0$ ).

**2. Асимптотическая модель динамики медленного смачивания.** Пусть время с начала процесса смачивания велико ( $t \rightarrow \infty$ ), а скорость  $v_0$  мениска достаточно мала и плавно меняется со временем. При этом масштаб  $l$  ( $l \sim h/|\nabla h|$ ) изменения толщины смачивающей пленки для  $x > x_0$  достаточно велик, в том числе при  $x \rightarrow x_0$  (но  $x - x_0 \gg \delta$ ) масштаб  $l_0 \gg \delta$ . Тогда можно пренебречь вкладом капиллярных сил в (1.1) и записать уравнение динамики п-пленки [3, 5]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha \Delta \ln \dot{h} - \frac{\rho}{3\mu} g \nabla \dot{h}^3, \quad v = -\frac{\alpha}{\dot{h}^2} \nabla \dot{h} + \frac{\rho q}{3\mu} \dot{h}^2, \quad \alpha = \frac{A'}{G_{n\mu}}. \quad (2.1)$$

В пограничном слое вблизи мениска ( $x - x_0 \sim \delta$ ), где важны капиллярные силы,

уравнение (1.1) также можно упростить. Введем следующие переменные:

$$\bar{x} = (x - x_0)/\delta, \quad \bar{h} = h/h_s, \quad \bar{t} = t/\tau, \quad \delta = h_s^2/\lambda, \quad (2.2)$$

$$\tau_s = 3\mu\delta^4/(\sigma h_s^3), \quad \lambda = \sqrt{A'/(2\pi\sigma)}$$

( $\tau$  — характерное время процесса,  $h_0 = \dot{h}_*$  при медленном смачивании). С точностью до малых величин  $\sim \text{Bo} \delta/R$  уравнение (1.1) в пограничном слое примет вид

$$\frac{\tau_s}{\tau} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} - \frac{v_0 \tau_s}{\delta} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} = - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{h}^3 \frac{\partial^3 \bar{h}}{\partial \bar{x}^3} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \ln \bar{h}. \quad (2.3)$$

Время релаксации  $\tau_s$  (2.2) совпадает со временем релаксации к однородному состоянию участка пленки длиной  $\delta$  под действием капиллярных сил [6]. Благодаря сильному различию масштаба  $l_0$  течения п-пленки и толщины пограничного слоя ( $l_0 \gg \delta$ ) для решения уравнения (2.3) справедливо

$$\bar{h} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \bar{x} \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Медленному смачиванию соответствуют большие характерные времена

$$\tau \gg \tau_s, \quad \tau_v = \delta/|v_0| \gg \tau_s \quad (2.5)$$

( $\tau_s \rightarrow 0$ ), когда левая часть (2.3) пренебрежимо мала в пограничном слое ( $\bar{x} \sim 1$ ), уравнение которого с учетом (2.4) запишем в виде

$$\sigma \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{A'}{6\pi \bar{h}^3} = \frac{A'}{6\pi h_s^3}. \quad (2.6)$$

В пределе (2.4)  $h - h_s \sim h_s \exp(-\bar{x})$ . Из (1.3) и уравнения (2.6) находим

$$h_s = (\lambda^2 R/3)^{1/3}, \quad \delta = \sqrt{h_s R/3}, \quad \lambda^2 = A'/(2\pi\sigma). \quad (2.7)$$

Пределу (2.4) решения в пограничном слое соответствует следующее краевое условие для уравнения (2.1):

$$h = h_s \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (2.8)$$

На линии смачивания должны выполняться условия [3, 5]

$$h = \dot{h}_*, \quad \frac{dx_*}{dt} = v \quad \text{при} \quad x = x_*. \quad (2.9)$$

Для стационарного движения п-пленки условия (2.9) согласуются с эффектом усечения пленки [7].

Можно показать, что масштаб решения задачи (2.1), (2.8), (2.9) при  $x = x_0$  достаточно велик ( $l_0 \gg \delta$ ), если выполнено (2.5). Это верно, в частности, для рассматриваемых далее точных решений. Задача растекания смачивающей пленки, очевидно, имеет смысл при  $h_s > h_*$ , потому что  $h_s = h_*$  отвечает равновесию.

Таким образом, при медленном смачивании решение уравнения (1.1) имеет структуру, показанную на рис. 2: 1 — мениск, 2 — пограничный слой на границе п-пленки и мениска, 3 — п-пленка, 4 — пограничный слой на линии смачивания [3]. Благодаря этому динамика смачивающей п-пленки определяется задачей для уравнения (2.1) с краевыми условиями (2.8) и (2.9), в которой зависимость  $x_0(t)$  известна, а  $x_*(t)$  подлежит определению. Новая модель отличается от известной [3], содержащей условие неограниченности толщины

$h = \infty$  при  $x = x_0$ .

Отметим, что ограниченность  $h$  в точке  $x_0$ , вообще говоря, отменяет равенство  $v = v_0$  [3], обусловленное тем, что в малой окрестности особой точки справедливо стационарное решение. Кроме того, имеется новая возможность описания течений при  $v_0 < 0$ , когда межфазная граница отходит из капилляра.

Условия (2.8) и (2.9) одномерной задачи допускают обобщение на двумерный случай (для (2.9) оно дано в [3]).

Далее изучим промежуточные асимптотики при  $t \rightarrow \infty$ , для которых можно пренебречь ускорением силы тяжести в (2.1) ( $g = 0$ ). Интересно выяснить, возможно ли в рамках таких асимптотик описание движений достаточно длинных смачивающих пленок (длиной порядка высоты капиллярного поднятия мениска).

**3. Стационарные решения.** Рассмотрим решения вида  $h(x - v_0 t)$ , стационарные относительно мениска. Если твердая поверхность вдали от мениска покрыта сверхтонкой пленкой постоянной толщины  $h_+$ , то решение (2.1) с условием (2.8) имеет вид

$$h = h_+ \left[ 1 + \left( \frac{h_+}{h_s} - 1 \right) \exp \left( - \frac{h_+}{\alpha} v_0 (x - x_0) \right) \right]^{-1}, \quad x_0 = v_0. \quad (3.1)$$

Для стационарного течения в неподвижной системе ( $v_0 = 0$ ) толщина  $h = h_s \exp(-Qx/\alpha)$ ,  $Q = \text{const}$ .

Отметим, что условия (2.9) не выполняются для (3.1) ни в одной точке  $x \in (x_0(t), \infty)$ . Поэтому не существует аналогии между задачами стационарного растекания пленки по сухой и смоченной поверхностям. Интересно, что такая аналогия возможна при нестационарном растекании.

Для  $h_+ \rightarrow 0$  из (3.1) получается профиль пленки, аналогичный [1, 7, 8]:

$$h = \left( \frac{1}{h_s} + \frac{v_0}{\alpha} (x - x_0) \right)^{-1}. \quad (3.2)$$

Важно, что в отличие от (3.1) условия на линии смачивания (2.9) для (3.2) могут удовлетворяться.

При течении тонкого слоя с динамическим краевым углом [1] параметр  $h_0$ , равный  $h_s$  в его отсутствие, значительно превосходит ( $h_0 \gg h_m$ ) характерную максимальную толщину п-пленки

$$h_m = \sqrt{A'/2\pi\sigma} (3Ca)^{-1/3}. \quad (3.3)$$

Отметим, что при медленном смачивании параметр  $h_s$  совпадает с максимальной толщиной п-пленки.

**4. Критерии предельных режимов смачивания.** Сопоставим модель пограничного слоя вблизи мениска с моделью динамического краевого угла [1]. Согласно (2.2) и (2.7), время релаксации пограничного слоя вблизи мениска

$$\tau_s = \mu R^2 / (3\sigma h_s). \quad (4.1)$$

Условию медленного смачивания  $\tau_v = \delta/|v_0| \gg \tau_s$  в силу (2.7), (3.3) и (4.1) соответствует следующее соотношение максимальных толщин в разных режимах:  $h_s \ll h_m$ . Значит, мениск начинается с характерных толщин  $h_s$ , существенно меньших параметра  $h_m$ , в отличие от режима течения с динамическим краевым углом ( $h_0 \gg h_m$ ). Это придает  $h_m$  (3.3) смысл параметра, разграничивающего предельные режимы течения.

Найдем минимальные угол  $\alpha_*$  и соответствующее капиллярное число  $Ca_*$ , которые ограничивают справедливость формулы динамического краевого угла мениска [1, 2]

$$\alpha_0^3 = 9Ca(\ln(h_0/h_m) - (1/3)\ln\ln(h_0/h_m)), \quad h_0 = (2/e^2)\alpha_0^2 R \quad (4.2)$$

(уточненное значение  $h_0$  соответствует [9]). Угол  $\alpha_0$  существует при  $h_0 \gg h_m$  и теряет смысл, когда  $\ln(h_0/h_m) \sim 1$ . При этом из (2.7), (3.3) и (4.2) вытекает  $h_m \sim h_s$  или эквивалентное соотношение  $\tau_v \sim \tau_s$ . Отсюда получим следующее ограничение (4.2):

$$\alpha_0 \gg \alpha_* = 2,4(\lambda/R)^{1/3} \quad \text{или} \quad Ca \gg Ca_* = \lambda/R. \quad (4.3)$$

Условия  $h_s \ll h_m$  и (4.3) можно объединить одним безразмерным параметром  $\Pi_* = CaR/\lambda$ . Режим медленного смачивания имеет место при  $\Pi_* \ll 1$ . Динамический краевой угол наблюдается при  $\Pi_* \gg 1$ . Следовательно, критерий  $\Pi_*$  наиболее просто определяет асимптотические режимы смачивания.

**5. Максимальная длина п-пленки в различных режимах.** Для случая, когда существует динамический краевой угол, определяя наименьшую скорость из формулы минимального капиллярного числа (4.3), находим максимальную длину п-пленки [3]

$$l = \varkappa/(v_0 h_*) < 0,2R\lambda/h_* \ll R. \quad (5.1)$$

Последнее неравенство справедливо благодаря  $h_* \gg \lambda \sim a$  ( $a$  — размер молекулы). Из (5.1) следует важный вывод: при наличии динамического краевого угла длина п-пленки всегда намного меньше радиуса кривизны мениска.

Оценим рост п-пленки за характерное время  $\tau_s$  процесса релаксации мениска и пограничного слоя к равновесию. На этот процесс сила тяжести не влияет, и можно положить  $g = 0$ .

Рассмотрим сначала квазистационарное течение, когда скорость  $v_0$  меняется относительно медленно, а длина пленки мала. Подстановка решения (3.2) в (2.1) дает критерий квазистационарности [3]:

$$|dv_0^{-1}/dt| \ll 1/l. \quad (5.2)$$

Максимальное значение  $l$  достигается при  $h_s \gg h_*$ :  $l \approx \varkappa/(h_* v_0)$ . Соответственно (5.2) принимает вид

$$|dl^2/dt| \ll 2\varkappa/h_*.$$

Учитывая начальное условие  $l = 0$  при  $t = 0$ , в результате интегрирования получим отсюда следующее ограничение длины пленки:

$$l \ll \sqrt{2\varkappa t/h_*}. \quad (5.3)$$

Отметим, что для  $v_0 \sim t^n$  и  $t \rightarrow \infty$  условие (5.2) выполнено, если степень  $n > -1/2$ .

Оценим  $l$  по нестационарной теории. Принимая для простоты  $h_s = \infty$ ,  $x_0 = \text{const}$  и следуя решению [3] задачи о неподвижном поршне, вычислим длину

$$l = \sqrt{8\varkappa t/(eh_*)}, \quad (5.4)$$

которая значительно больше, чем по оценке (5.3). Подставляя в (5.4)  $t = \tau_s$  из (4.1), найдем

$$l(\tau_s) \sim 0,6R\lambda/\sqrt{h_* h_s} \ll R, \quad (5.5)$$

что верно в силу  $\lambda \ll h_*$ ,  $h_s$ . Согласно (5.5), рост длины смачивающей пленки за время установления модели медленного смачивания пренебрежимо мал по сравнению с характерным размером мениска  $R$ . Поэтому для определения длины пленки, немалой по сравнению с радиусом мениска  $R$ , достаточно использовать только модель медленного смачивания, пренебрегая эффектами движения мениска с относительно большими скоростями.

**6. Динамика смачивания тонкого капилляра.** Проведенный анализ характерных времен достаточно полон, если равновесная высота  $H$  поднятия мениска в капилляре сравнима с его радиусом ( $H \sim R$ ). Когда высота поднятия мениска велика ( $H \gg R$ ), что имеет место в тонком капилляре, появляются новые характерные масштабы длины и времени.

Для больших значений длины столбика жидкости  $x_0$  ( $x_0 \gg R$ ) ползущее течение в капилляре близко к пуазейлевскому, и уравнение движения мениска имеет вид

$$p_i + \frac{\sigma\gamma}{R} - \frac{p_e^{(0)}}{1 - k_p x_0} - x_0 \rho g = \left( k_v + x_0 \frac{\theta\mu}{R^2} \right) w, \quad x_0 = 0, \quad t = 0, \quad (6.1)$$

где  $p_i$ ,  $k_v$  — давление и коэффициент сопротивления перед входом в капилляр;  $w = \dot{x}_0$  — расходная скорость;  $\gamma = 1$ ,  $\theta = 3$  и  $\gamma = 2$ ,  $\theta = 8$  в плоском и осесимметричном случаях соответственно;  $p_e^{(0)}$  — давление газа перед мениском при  $x_0 = 0$ ;  $k_p$  — коэффициент, учитывающий изменение объема газа.

Рассмотрим заполнение капилляра под действием капиллярных сил, когда  $p_i = p_e^{(0)}$ ,  $k_p = 0$ ,  $k_v = 0$ . Динамика мениска в малой окрестности равновесной высоты  $H$  определяется формулами

$$x_0 - H = H \exp\left(-1 - \frac{t}{\tau_0}\right), \quad \tau_0 = \frac{H\theta\mu}{R^2\rho g}, \quad H = \frac{\gamma\sigma}{\rho g R}. \quad (6.2)$$

Важную роль в динамике п-пленки играет отношение времен релаксации (6.2) и (4.1):

$$\frac{\tau_0}{\tau_s} = 3\gamma\theta \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^2 \frac{h_s}{R^5}. \quad (6.3)$$

Согласно (6.3), для достаточно тонких капилляров ( $R \rightarrow 0$ ) характерное время остановки мениска значительно превышает время релаксации пограничного слоя ( $\tau_0/\tau_s \rightarrow 0$ ). Следовательно, для таких капилляров модель медленного смачивания может быть пригодна не только при  $x_0 \rightarrow H$ , но и когда мениск относительно далек от своего равновесного положения ( $|x_0 - H| \sim H$ ). Для этого необходимо выполнение (2.5), что в силу (4.1), (6.1) и (6.3) верно при

$$\frac{x_0}{R} \gg \frac{H_1}{R} = \frac{\gamma}{3\theta} \left(\frac{R}{h_s}\right)^{3/2} = \frac{R}{\lambda} \frac{\gamma}{\theta\sqrt{3}}. \quad (6.4)$$

Очевидно, для вертикального капилляра это возможно, когда  $H_1 \ll H$ . Из (6.4) и (6.2) получим условие справедливости модели медленного смачивания на большей части пути, протекшего мениском:

$$R^3 \ll \frac{3\theta}{\rho g} \sqrt{\frac{A'\sigma}{6\pi}}. \quad (6.5)$$

Например, для  $A' = 10^{-20}$  Дж,  $\sigma = 0,05$  Н/м,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> из (6.5) следует  $R \ll 2 \cdot 10^{-3}$  см.

При капиллярной пропитке  $x_0 \sim \sqrt{t}$ . Несложные оценки показывают, что при этом длина п-пленки очень мала ( $l \ll x_0$ ). Если выполнены условие (6.4) и условие квазистаци-

онарности (5.1), то пригодно решение (3.2), описывающее квазистационарную п-пленку, граничащую с мениском. Если (6.4) не выполнено, то на большей части пути, проходящего мениском, может наблюдаться динамический краевой угол. Отметим, что развитие протяженной п-пленки — процесс намного более медленный, чем капиллярная пропитка, и отличия от стационарной теории п-пленки могут иметь место, как правило, в малой окрестности точки останова мениска.

**Уравнение движения мениска.** Уточним связь скорости  $v_0$  ( $v_0 = \dot{x}_0$ ) поступательного перемещения мениска и расходной скорости  $w$ . Используя закон сохранения массы, запишем

$$v_0(S - h_s L) + v \Big|_{x_0} h_s L = wS$$

( $S, L$  — площадь и периметр поперечного сечения капилляра, скорость  $v$  дается (2.1), толщина  $h_s \ll R$ ). Отсюда находим уточненную формулу

$$v_0 = w \left( 1 + \gamma \frac{h_s}{R} \right) - v \Big|_{x_0} \frac{\gamma h_s}{R}, \quad (6.6)$$

которая полезна при малой расходной скорости  $w$ , когда важно влияние на перемещение мениска течения жидкости в тонкой п-пленке. Расчет скорости мениска по (6.6) можно производить после решения задачи (2.1), (2.8), (2.9) при  $v_0 = w$ .

**7. Аналитические решения автомодельных задач растекания пленок.** Задача (2.1), (2.8), (2.9) при  $g = 0$  имеет автомодельные решения

$$h = h_* y(\xi), \quad \xi = x \sqrt{\frac{h_*}{2\alpha \epsilon t}}. \quad (7.1)$$

Безразмерная толщина пленки  $y(\xi)$  находится из краевой задачи

$$-\xi y' = (\ln y)'', \quad \xi \in (\xi_0, \xi_*), \quad y = 1, \quad y' = -\dot{\xi}_*, \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_*, \quad y = y_s, \quad \dot{\xi} = \xi_0, \quad y_s = h_s/h_*. \quad (7.2)$$

Автомодельная координата  $\dot{\xi}_*$  линии смачивания, очевидно, определяет ее скорость  $v_*$ :

$$\sqrt{t} v_* = \dot{\xi}_* \sqrt{\alpha / 2h_*}.$$

Укажем важные задачи растекания пленок, отличающиеся от (7.2).

**Задача растекания полубесконечной пленки.** В начальный момент  $t = 0$  пленка имеет форму ступеньки высотой  $h_0$ :  $h = h_0, x < 0$ ;  $h = 0, x > 0$ .

В (7.2) вместо последнего условия должно выполняться условие

$$y \rightarrow y_0, \quad \xi \rightarrow -\infty. \quad (7.3)$$

Растекание жидкости по поверхности, покрытой тонким жидким слоем, моделируется, если вместо условия (7.2) на линии смачивания справедливо

$$y \rightarrow y_+ > 0, \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (7.4)$$

Задаче распада начального разрыва толщины пленки ( $t = 0$ :  $h = h_0, x < 0$ ;  $h = h_+ < h_0, x > 0$ ) соответствуют условия (7.3) и (7.4).

Для интегрирования уравнения (7.2) введем переменные  $\psi$  и  $\varphi$  по формулам

$$\psi = y'^2 / y^3, \quad \varphi = \xi y' / y. \quad (7.5)$$

Уравнение (7.2) и его интеграл [3] запишем в виде

$$-\xi \frac{d\psi}{d\xi} = \varphi\psi + 2\varphi^2; \quad (7.6)$$

$$\frac{\varphi^2}{\psi} + \varphi + \ln \psi - C = 0. \quad (7.7)$$

Из (7.5)–(7.7) находим уравнения, определяющие решение в параметрической форме  $y(\psi)$ ,  $\xi(\psi)$ :

$$\frac{d\xi}{\xi} = \mp \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 4(\ln \psi - C)/\psi}} \mp 1 \right) \frac{d\psi}{2\psi(\ln \psi - C)}; \quad (7.8)$$

$$y = \frac{\psi}{4\xi^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\psi}(\ln \psi - C)} \right)^2. \quad (7.9)$$

Вместо (7.8) можно также записать уравнение

$$\frac{dy}{y} = \pm \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^2 - 4\psi(\ln \psi - C)}}. \quad (7.10)$$

Общее решение задачи (7.2) построим для  $\xi_* > 0$ . Случай  $\xi_* < 0$  получится заменой  $\xi \rightarrow -\xi$ .

Будем рассматривать  $\xi_*$  как параметр. Тогда из (7.2) и (7.7) получим

$$C = \ln \xi_*^2, \quad \psi(\xi_*) = \psi_* = \xi_*^2. \quad (7.11)$$

Если параметр  $\psi_* \geq 4/e$ , то из (7.9)–(7.11) следует

$$\ln y = \int_{\psi_*}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^2 - 4\psi \ln(\psi/\psi_*)}}, \quad \xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\psi}{y} \right)^{1/2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\psi} \ln \frac{\psi}{\psi_*}} \right). \quad (7.12)$$

Если  $\psi_* \leq 4/e$ , то существуют значения  $\psi_m$  и  $y_m$ , при которых изменяются знаки в формулах (7.8)–(7.10):

$$\psi_* = \psi_m \exp(-\psi_m/4), \quad \psi_m \leq 4, \quad \ln y_m = \int_{\psi_*}^{\psi_m} \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^2 - 4\psi \ln(\psi/\psi_*)}}. \quad (7.13)$$

В области  $y \leq y_m$ ,  $\psi \in [\psi_*, \psi_m]$  справедливы формулы (7.12). В области  $y \geq y_m$ ,  $\psi \in (0, \psi_m)$  решение имеет вид

$$\ln y = \ln y_m + \int_{\psi}^{\psi_m} \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^2 - 4\psi \ln(\psi/\psi_*)}}, \quad \xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\psi}{y} \right)^{1/2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\psi} \ln \frac{\psi}{\psi_*}} \right). \quad (7.14)$$

*Решение задачи о неподвижном мениске.* В случае  $\xi_0 = 0$  из (7.2), (7.13) и (7.14) находим

$$\ln y_s = 2 \int_0^{s_m} \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{s}{s_m} \exp(s_m - s)}}, \quad s_m \in (0, 1), \quad s = \ln(\psi/\xi_*^2), \quad \xi_*^2 = 4s_m \exp(-s_m). \quad (7.15)$$

Отсюда следует зависимость  $\xi_*(y_s)$ .



В пределе  $y_s \rightarrow 1$  коэффициент  $\xi_* \rightarrow 0$  по закону

$$\xi_* = \sqrt{y_s - 1} + \dots, \quad (7.16)$$

что соответствует малой скорости растекания.

Асимптотика  $y_s \rightarrow \infty$  отвечает  $s_m \rightarrow 1$ . В этом пределе

$$\int_0^{s_m} \frac{as}{\sqrt{1 - \frac{s}{s_m} \exp(s_m - s)}} = \sqrt{2} \ln \frac{2}{1 - s_m} - 0,44248 + \dots, \quad (7.17)$$

$$\xi_* = \frac{2}{\sqrt{e}} \left( 1 - \frac{1}{4}(1 - s_m)^2 + \dots \right),$$

откуда находим

$$\xi_* = \frac{2}{\sqrt{e}} \left( 1 - \frac{0,5349}{y_s^{\sqrt{2}/2}} + \dots \right). \quad (7.18)$$

Согласно (7.18), координата  $\xi_* \rightarrow 2/\sqrt{e}$  при  $y_s \rightarrow \infty$ .

Предельное выражение скорости линии смачивания

$$\sqrt{tv_*} = \sqrt{2\alpha/(eh_*)} \quad (7.19)$$

соответствует универсальной зависимости [3]. Формула (7.19) справедлива при достаточно большом радиусе мениска  $R$ , связанном с  $h_s$  по (2.7).

Решение задачи растекания полубесконечной пленки. Из (7.13), (7.14) при условии (7.3) получим

$$\ln y_0 = \int_0^{s_m} \frac{as}{\sqrt{1 - \frac{s}{s_m} \exp(s_m - s)}} + \int_{-\infty}^{s_m} \frac{as}{\sqrt{1 - \frac{s}{s_m} \exp(s_m - s)}} \quad (7.20)$$

( $s, s_m$  определены в (7.15)). Формулы (7.15) и (7.20) связывают коэффициент  $\xi_*$  скорости линии смачивания с толщиной пленки  $y_0$  на бесконечности. При малых толщинах ( $y_0 \sim 1$ ) коэффициент  $\xi_*$  зависит от  $y_0$  аналогично (7.16):

$$y_0 - 1 = \xi_* \sqrt{\pi/2} + \dots \quad (7.21)$$

Большие значения толщины ( $y_0 \gg 1$ ) отвечают пределу  $s_m \rightarrow 1$ , когда интегралы неограниченно возрастают. Справедливы формулы (7.17) и справедливо предельное выражение

$$\int_{-\infty}^0 \frac{as}{\sqrt{1 - \frac{s}{s_m} \exp(s_m - s)}} = 1,06616 + \dots, \quad s_m \rightarrow 1. \quad (7.22)$$

Из (7.17), (7.20) и (7.22) найдем

$$\xi_* = \frac{2}{\sqrt{e}} \left( 1 - \frac{1,1367}{y_0^{\sqrt{2}/2}} + \dots \right). \quad (7.23)$$

Следовательно, координата  $\xi_*$  при  $y_0 \rightarrow \infty$  приближается к предельному значению  $\xi_* = 2/\sqrt{e}$  задачи о неподвижном поршне [3]. Это доказывает, что растекание пленки большой толщины происходит по универсальной зависимости (7.19) [3].

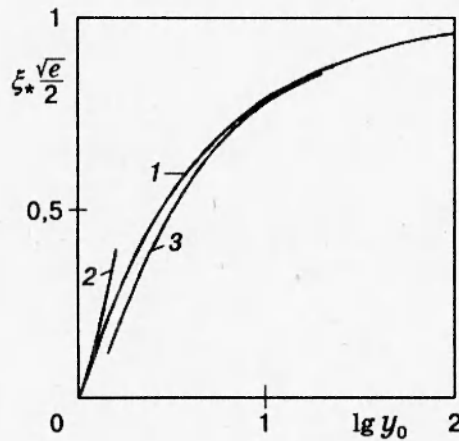


Рис. 3

Решение задачи о неподвижном мениске (7.15) является частью решения задачи растекания полубесконечной пленки.

Зависимость  $\xi_*$  от  $y_0$  по (7.20) приведена на рис. 3 (кривая 1). Для сравнения даны также графики асимптотик (7.21), (7.23) — кривые 2, 3. Видно, что асимптотика (7.23) хорошо соответствует точному решению, параметр скорости  $\xi_*$  достаточно быстро приближается к (7.23) с ростом толщины пленки  $y_0$ .

*Растекание жидкости по поверхности, покрытой пленкой.* Решения задач о смачивании сухой поверхности можно продолжить за линию смачивания, если формально допустить значения  $h < h_*$ . При  $y < 1$  решение находим по формулам (7.12). При  $\psi \rightarrow 0$   $\xi \rightarrow \infty$  и толщина  $y \rightarrow y_+$ . Предельное значение толщины дается формулой

$$\ln \frac{1}{y_+} = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{1 + 4\xi_*^{-2} z e^z}}. \quad (7.24)$$

Интеграл (7.24) равен разности интегралов в (7.20) при  $\xi_* < 2/\sqrt{e}$  и совпадает с интегралом (7.22) при  $\xi_* = 2/\sqrt{e}$ .

В задаче о поршне предельная толщина  $y_+ \rightarrow 0$ , если  $\xi_0 \rightarrow \infty$ . Причина этого в том, что  $\xi_* \rightarrow \infty$  и интеграл (7.24) неограниченно растет. Но наиболее интересны малые значения  $\xi_0 \rightarrow 0$ , когда  $\xi_* \rightarrow 2/\sqrt{e}$ . В этом случае указанный интеграл близок к единице.

Таким образом, автомобильные задачи о поршне, когда поверхность при  $\xi \rightarrow \infty$  покрыта тонкой пленкой, или о распаде разрыва толщины аналогичны задачам растекания пленок по сухой поверхности.

Интересно еще одно решение, соответствующее условиям  $y \rightarrow y_0$ ,  $\xi \rightarrow -\infty$ ;  $y \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ .

В этом случае  $y \rightarrow \xi^{-2}$  при  $\xi \rightarrow \infty$  и  $C = 2 \ln 2 - 1$  в (7.8)–(7.10). Параметр  $\psi = 4$  при  $\xi = \infty$ . Решение дается (7.9) и формулой

$$\ln \frac{y_0}{y} = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^2 - 4\psi(\ln \psi - C)}}.$$

Полученное решение описывает динамику полубесконечной пленки в области достаточно больших толщин, когда предельная толщина велика ( $y_0 \rightarrow \infty$ ).

8. Границы справедливости промежуточных асимптотик при  $t \rightarrow \infty$ . Пренебрежение силой тяжести в динамике смачивающей пленки оправдано, если относительно мал ее вклад в уравнение (2.1):

$$\rho g \ll \frac{A'}{2\pi h^4} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| \geq \frac{A'}{2\pi h_*^4} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x_0) \right|. \quad (8.1)$$

Последнее соотношение выполнено для всех рассматриваемых точных решений. Оно означает, что вклад сил Ван-дер-Ваальса в динамику пленки растет с уменьшением ее толщины. Среди автомодельных решений наиболее интересен случай неподвижного мениска, когда длина п-пленки максимальна для каждого момента  $t$ . Для него по формулам (7.1) и (7.5) находим

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = -\sqrt{\psi} \Big|_{\xi=0} \sqrt{\frac{h_s^3}{2\alpha t}} = -\xi_*^2 \frac{h_s}{l} \left( \frac{h_s}{h_*} \right)^{1/2}. \quad (8.2)$$

Здесь учтено, что в силу второй формулы (7.14)  $\psi|_{\xi=0} = \psi_* = \xi_*^2$ . Рассматривая большие значения толщины ( $h_s \gg h_*$ ), когда  $\xi_* = 2/\sqrt{e}$ , получим из (8.1) с помощью (2.7) и (8.2) эквивалентное ограничение длины п-пленки:

$$l \ll 2 \left( \frac{h_s}{h_*} \right)^{1/2} H, \quad H = \frac{\gamma\sigma}{\rho g R}. \quad (8.3)$$

Отсюда следует важный вывод: промежуточные асимптотики при  $t \rightarrow \infty$  ( $g = 0$ ) справедливы для длин смачивающих пленок порядка максимальной высоты подъема мениска ( $l \sim H$ ). Согласно (8.3), значительный эффект смачивания за счет сил Ван-дер-Ваальса достигается без возмущающего влияния  $g$  на течение пленки. Условие  $h_s \gg h_*$  выполнено для не слишком малых радиусов мениска  $R$ . Например, при  $h_* = 10^{-7}$  см,  $\sigma = 0,05$  Н/м и  $A' = 10^{-20}$  Дж необходимо, чтобы  $R \gg 10^{-5}$  см. Это совсем не жесткое ограничение, так как  $R = 10^{-5}$  см соответствует огромная высота подъема мениска ( $H = 100$  м) и большая правая часть неравенства (8.3).

Исследование влияния отношения  $h_s/h_*$  на скорость смачивания в условиях относительно больших значений  $g$  возможно на основе (2.1), (2.8) и (2.9). Длины п-пленок, для растекания которых существенна сила тяжести, очень велики. Их развитие может быть затруднено из-за ограниченности времени наблюдения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воинов О. В. Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // ПМТФ. 1977. № 2. С. 92–99.
2. Воинов О. В. Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 76–84.
3. Воинов О. В. Динамическая теория смачивания твердого тела вязкой жидкостью под действием сил Ван-дер-Ваальса // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 69–85. Деп. в ВИНТИ 21.12.93, № 3197–В93.
4. Бараш Ю. С. Силы Ван-дер-Ваальса. М.: Наука, 1988.
5. Воинов О. В. Неустановившиеся течения смачивающих пленок вязкой жидкости по твердой поверхности // Докл. РАН. 1994. Т. 338, вып. 2. С. 191–194.

6. **Воинов О. В.** Релаксация жидкого слоя под действием капиллярных сил // ПМТФ. 1970. № 1. С. 73–77.
7. **Hervet H., de Gennes P. G.** Dynamique du mouillage: films precurseurs sur solide «sec» // C. r. Acad. Sci. Paris. Ser. II. 1984. T. 299, N 9. P. 499–503.
8. **Huh C., Scriven L. E.** Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line // J. Coll. Int. Sci. 1971. V. 35, N 1. P. 85–101.
9. **Воинов О. В.** Термодинамика и асимптотическая теория движения линии контакта трех фаз при смачивании твердых тел. Тюмень, 1994. Деп. в ВИНТИ 02.09.94, № 2136–В94.

*Поступила в редакцию 31/III 1995 г.*

---