УДК 536.46

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОМ ГОРЕНИИ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ ЗОН ГОРЕНИЯ

Е. А. Гельман

(Москва)

При решении задач о стационарном горении возникают краевые задачи с условиями, заданными в особых точках. Обычно численные методы решения этих систем сводятся либо к итерациям (метод установления), либо к решению систем с выходом из особенности типа седла.

В некоторых случаях применение этих методов оказывается затруднительным и тогда приходится решать задачу с выходом из другой особенности. В данной статье рассмотрен пример такой задачи. Решается система уравнений, описывающая процесс стационарного горения с учетом диспергирования. Постановка задачи обсуждалась в статье [1].

Рассматриваем системы:

$$\left.\begin{aligned}
&v_0 \frac{d\eta}{dx} - k_0 (1-\eta) e^{-\frac{E}{RT}} = 0,\\
&\frac{d\left[\dfrac{\lambda_1}{c_t \rho_t} \dfrac{dT}{dx}\right]}{dx} - (1-m_0) v_0 \frac{d\left\{T\left[1-\eta z\left(1-\dfrac{c_r}{c_t}\right)\right]\right\}}{dx} +\\
&+ (1-m_0) \frac{Q}{c_t} k_0 (1-\eta) e^{-\frac{E}{RT}} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[1-(1-m_0)\frac{v_0}{v_t}\right] \frac{v_r}{v_0} = m_0 \frac{T}{T_0} + (1-m_0) z \eta \rho_t \frac{RT}{M p_0},\\
&v_0 \frac{d\eta}{dx} - \frac{v_0}{v_t} k_0 (1-\eta) e^{-\frac{E}{RT}} = 0,\\
&\frac{d\left[\dfrac{\lambda_2}{c_t \rho_t} \dfrac{dT}{dx}\right]}{dx} - (1-m_0) v_0 \frac{d\left\{T\left[1-\eta z\left(1-\dfrac{c_r}{c_t}\right)\right]\right\}}{dx} +\\
&+ (1-m_0) \frac{v_0}{v_t} \frac{Q}{c_t} k_0 (1-\eta) e^{-\frac{E}{RT}} = 0,\\
&\frac{d\left[(1-\eta z) v_t\right]}{dx} = \frac{18\mu}{\rho_t v_t d^2} (v_r - v_t).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Безразмерные переменные и параметры:

$$\xi = x \sqrt{\frac{c_t \rho_t k_0 \exp\left(-\dfrac{c_t E}{RQ}\right)}{\lambda_0}}; \quad \theta = \frac{\dfrac{Q}{c_t} - T}{R\left(\dfrac{Q}{c_t}\right)^2} E;$$

$$\omega_r = v_r \sqrt{\frac{c_t \rho_t}{\lambda_0 k_0 \exp\left(-\dfrac{c_t E}{RQ}\right)}};$$

$$\omega_t = v_t \sqrt{\frac{c_t \rho_t}{\lambda_0 k_0 \exp\left(-\frac{c_t E}{RQ}\right)}}; \quad \omega_0 = v_0 = \sqrt{\frac{c_t \sigma_t}{\lambda_0 k_0 \exp\left(-\frac{c_t E}{RQ}\right)}};$$

$$\pi_0 = \frac{p_0 M}{\rho_t E z}; \quad \beta = \frac{RQ}{c_t E}; \quad \Theta_0 = \frac{T_0 c_t}{Q}; \quad \sigma_c = \frac{c_r}{c_t};$$

$$\sigma_d = d_0 \sqrt{\frac{\rho_t k_0 \exp\left(-\frac{E c_t}{RQ}\right)}{\mu}}.$$

В безразмерных величинах при $\sigma_c = 1$ после приведения к первому порядку система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{1}{\omega_0}(1-\eta)\, e^{-\frac{\theta}{1-\beta\theta}} = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \xi \in [-\infty, \xi_0) \\ &\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\omega_0 (1-m_0)\left[\theta - \theta_{-\infty} + \frac{1}{\beta}(\eta - \eta_{-\infty})\right]. \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\omega_t}(1-\eta)\, e^{-\frac{\theta}{1-\beta\theta}}, \\ &\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\lambda_0}{\lambda_2}(1-m_0)\left[\theta - \theta_{+\infty} + \frac{1}{\beta}(\eta - 1)\right], \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \xi \in [\xi_0, +\infty) \\ &\frac{d\omega_t}{d\xi} = \frac{1}{1-\eta z}\left[\omega_t z \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{18}{\sigma_d^2}(1-\eta z)^{1/3}\left(\frac{\omega_r}{\omega_t} - 1\right)\right], \\ &\omega_r = \frac{\omega_0}{\pi_0}\left[(1-m_0)\beta(1-\beta\theta)\eta + \frac{m_0 \pi_0}{\theta_0}(1-\beta\theta)\right] \times \\ &\qquad \times \frac{1}{1-(1-m_0)(1-z\eta)\frac{\omega_0}{\omega_t}}. \end{aligned}\right|$$

Граничные условия:

$$\xi = -\infty: \quad \eta = 0, \quad \theta = \frac{1-\theta_0}{\beta}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\theta}{d\xi} = 0;$$

$$\xi = +\infty: \quad \eta = 1, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\omega_t}{d\xi} = 0.$$

Точка ξ_0 переключения систем 1 и 2 определяется условием $\eta(\xi_0) = \eta^*$.

В точке ξ_0 заданы условия:

$$\eta(\xi_0+0) = \eta(\xi_0-0), \quad \theta(\xi_0+0) = \theta(\xi_0-0),$$

$$\lambda_1 \frac{d\theta}{d\xi}(\xi_0 - 0) = \lambda_2 \frac{d\theta}{d\xi}(\xi_0 + 0), \quad \frac{d\eta}{d\xi}(\xi_0 - 0) = \frac{d\eta}{d\xi}(\xi_0 + 0),$$

из которых находится $\theta_{+\infty} = \theta_{-\infty} - \frac{1}{\beta}$ и $\omega_t(\xi_0) = \omega_0$. Если η^* — неизвестный параметр, то в точке ξ_0 задано условие $\omega_r - \omega_0 = f(\eta^*)$. При известном η^* параметр ω_0 подлежит определению.

Система имеет особенности на обоих концах ($\pm\infty$). Исследование особенности на правом конце ($+\infty$) представляет значительные трудности в основном потому, что ее характер зависит от варианта задачи. Например, если предполагать производные $\frac{d\theta}{d\eta}$ и $\frac{d\omega_t}{d\eta}$ непрерывными и ограниченными на $+\infty$, то их можно однозначно определить, с их помощью задать выход из особой точки и решать систему с правого конца. Однако встречаются варианты, в которых $\frac{d\omega_t}{d\eta} \to \infty$ при $\eta \to 1$.

Ввиду сказанного пришлось от решения с правого конца отказаться, хотя такой способ был бы экономичным.

При исследовании особенности на $-\infty$ используется обычная операция «срезания» экспоненты, т. е. считаем $e^{-\frac{\theta}{1-\beta\theta}}$ тождественным нулем при $\theta \geqslant \theta_1$. Из уравнения для θ видно, что если $\theta(\xi)$ удовлетворяет граничному условию на $+\infty$, то $\theta(\xi)$ — монотонно убывающая функция. Пусть $\theta(\xi_1) = \theta_1$ тогда при $\xi \leqslant \xi_1$ $e^{-\frac{\theta}{1-\beta\theta}} \equiv 0$ и, следовательно, имеем систему: при $\xi \leqslant \xi_1$ $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, $\frac{d\theta}{d\xi} = A\omega_0(\theta - \theta_{-\infty})$.

Из этой системы видно, что граничное условие на $-\infty$ выполняется для любого ω_0. Используя этот факт, мы можем заменить нашу задачу следующей задачей Копи: в точке ξ_1 задаем $\theta = \theta_1$, $\eta = 0$ и решаем систему на $(\xi_1 + \infty)$. Опыт счета показывает, что θ_1 можно брать значительно меньше $\Theta_{-\infty}$. Решение зависит от параметра ω_0, если известно η^* и от η^*, если задано ω_0. «Вилка» для параметра ω_0 или η^* находится благодаря седловому характеру особенности для $\theta(\xi)$, на $+\infty$. Пусть найденный параметр $\omega_0 \in [a, b]$, $b - a = \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданная точность для ω_0. При решении системы с $\omega_0 = b$ имеем: $\theta(\xi)$ монотонно убывает и при $\eta \to 1$ $\theta \to -\infty$, поэтому при $\xi > \xi_2$, где $\theta(\xi_2) = \theta_{+\infty}$ прекращаем счет θ, т. е. решаем систему уравнений для η и ω_t, считая $\theta = \theta_{+\infty}$. Из рассмотрения такой системы видно, что граничные условия для η и ω_t на $+\infty$ выполняются. Если задача состоит в отыскании параметра ω_0 или η^*, то считать систему при $\xi > \xi_2$ не нужно. Если требуется найти $f(\eta^*)$ при заданной зависимости ω_0 от π_0, то, фиксируя π_0 и ω_0, находим η^* и, следовательно, функцию $f(\eta^*)$ по формуле $f(\eta^*) = \omega_2(\xi_0) - \omega_0$.

Обратная задача — при заданной функции $f(\eta^*)$ найти зависимость ω_0 от π_0 — решается следующим образом: при фиксированном значении π_0 для различных значений η^* находится $\omega_r(\xi_0) - \omega_0$ как функция от η^*, а затем берется пересечение этой функции с $f(\eta^*)$.

Поступила в редакцию
20/VI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Мержанов, Б. И. Хайкин. Докл. АН СССР, 1967, **173**, 1382.