УДК 539.3

ТЕРМОДИНАМИКА УПРУГО-НЕУПРУГОГО ПРОЦЕССА ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. А. Роговой

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь
E-mail: rogovoy@icmm.ru

Кинематические соотношения, описывающие процесс упруго-неупругого деформирования, совпадающие по форме с известным разложением Ли, но свободные от недостатков последнего, распространены на случай термоупруго-неупругого процесса при конечных деформациях. Рассмотрены ограничения, накладываемые на кинематику принципом объективности. Получены вытекающие из законов термодинамики соотношения для напряжений и энтропии, построено уравнение теплопроводности.

Ключевые слова: термоупруго-неупругие конечные деформации, кинематика, термодинамика, принцип объективности.

1. Кинематические соотношения. В работах [1–3] предложен подход к построению определяющих уравнений сложных сред при конечных упруго-неупругих деформациях. Кинематика процесса описывается соотношением, учитывающим реальную историю процесса упруго-неупругого деформирования, т. е. любую последовательность и длительность действий чисто упругого и чисто неупругого деформирования:

$$F = f \cdot F_*. \tag{1.1}$$

Здесь F, f, F_* — упруго-неупругие градиенты места, переводящие соответственно начальную конфигурацию в текущую, промежуточную конфигурацию, близкую к текущей, в актуальную и начальную в промежуточную. При этом в силу близости промежуточной и текущей конфигураций $f = f_E \cdot f_{IN} = f_{IN} \cdot f_E$ (f_E, f_{IN} — упругий и неупругий градиенты места). С использованием понятий матриканта и мультипликативного интеграла в работе [3] из кинематики (1.1) выделены неупругая (F_{IN}) и чисто упругая (F_E) кинематики. В результате соотношение (1.1) представляется в виде

$$F = F_E \cdot F_{IN}, \tag{1.2}$$

где все градиенты места определены в текущий момент времени t. Представление (1.2) совпадает по форме с известным разложением Ли, но свободно от недостатков последнего. В частности, из этого представления следует, что полная деформация скорости перемещений D есть сумма деформации скорости упругих перемещений D_E и деформации скорости неупругих перемещений D_{IN}, упругий градиент места F_E не меняется при чисто неупругом изменении конфигурации, а неупругий — при чисто упругом ее изменении.

Работа выполнена в рамках Программы Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН и Интеграционной программы УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00050).

Выражения для F_E и F_{IN}, полученные в работе [3], имеют вид

$$F_E = (g + \varepsilon h_E) \cdot F_{E*}; \tag{1.3}$$

$$F_{IN} = (g + \varepsilon F_{E*}^{-1} \cdot h_{IN} \cdot F_{E*}) \cdot F_{IN*}. \tag{1.4}$$

Здесь g — единичный тензор; градиенты места с индексом “$*$” соответствуют моменту времени t_*, а без него — текущему моменту t ($t - t_* = \varepsilon\tau$, $\tau > 0$, ε — малый положительный параметр); h_E, h_{IN} — градиенты упругих и неупругих перемещений относительно конфигурации, определяемой F_*, которые представляются через симметричную часть e_E, e_{IN} (малые деформации) и кососимметричную часть d_E и d_{IN} (малые повороты), причем $e = e_E + e_{IN}$, $d = d_E + d_{IN}$ — малые полные деформации и повороты (эти и только эти деформации и повороты являются совместными).

В соответствии с соотношением (1.2) мера деформаций Коши — Грина $C = F^{\mathrm{T}} \cdot F$ записывается в виде $C = F_{IN}^{\mathrm{T}} \cdot C_E \cdot F_{IN}$, где $C_E = F_E^{\mathrm{T}} \cdot F_E$. С учетом (1.3), (1.4) эту меру можно представить как

$$C = C_* + 2\varepsilon F_*^{\mathrm{T}} \cdot (e_E + e_{IN}) \cdot F_*, \qquad F_* = F_{E*} \cdot F_{IN*}, \qquad C_* = F_*^{\mathrm{T}} \cdot F_* \tag{1.5}$$

или

$$C = C_\star + 2\varepsilon F_\star^{\mathrm{T}} \cdot e_E \cdot F_\star, \qquad F_\star = F_{E\star} \cdot F_{IN}, \qquad C_\star = F_\star^{\mathrm{T}} \cdot F_\star. \tag{1.6}$$

Здесь величины с индексом “$*$” соответствуют промежуточной конфигурации $\varkappa_1$, величины с индексом “$\star$” — промежуточной упругой конфигурации $\varkappa_2$ (см. рисунок в работе [3]) в один и тот же момент времени t_*. В соответствии с этими соотношениями при стремлении промежуточной конфигурации $\varkappa_1$ к текущей ($F_* \to F$, $C_* \to C$) и промежуточной упругой конфигурации $\varkappa_2$ к текущей ($F_\star \to F$, $C_\star \to C$) предельным переходом можно получить два приращения и две скорости изменения меры деформации C:

$$(dC)_{\varkappa_1} = 2F^{\mathrm{T}} \cdot (de_E + de_{IN}) \cdot F,$$

$$(\dot{C})_{\varkappa_1} = 2F^{\mathrm{T}} \cdot (\dot{e}_E + \dot{e}_{IN}) \cdot F = 2F^{\mathrm{T}} \cdot (D_E + D_{IN}) \cdot F$$

относительно конфигурации $\varkappa_1$ (полное приращение и полная скорость изменения тензора C) и

$$\begin{gathered} (dC)_{\varkappa_2} = 2F^{\mathrm{T}} \cdot de_E \cdot F, \\ (\dot{C})_{\varkappa_2} = 2F^{\mathrm{T}} \cdot \dot{e}_E \cdot F = 2F^{\mathrm{T}} \cdot D_E \cdot F \end{gathered} \tag{1.7}$$

относительно конфигурации $\varkappa_2$ (приращение и скорость изменения тензора C за счет только упругих деформаций). Поэтому тензор, определяемый соотношением (1.5), будем обозначать $C_{\varkappa_1}$, а тензор, определяемый соотношением (1.6), — $C_{\varkappa_2}$. В соотношениях для приращений и скоростей $D_E = \dot{e}_E$, $D_{IN} = \dot{e}_{IN}$ — тензоры деформаций скоростей соответствующих перемещений, совпадающие в данном случае с тензорами скоростей деформаций.

Для того чтобы учесть влияние температуры, аналогично работе [3] кинематику термоупруго-неупругого процесса представим в виде $F = f_E \cdot f_{IN} \cdot f_\Theta \cdot F_*$, где f_Θ — градиент места, соответствующий малым температурным деформациям; F_* — термоупруго-неупругий градиент места, переводящий начальную конфигурацию в промежуточную. При этом все градиенты места, определяемые малыми деформациями, коммутируют между собой. Так же, как в работе [3], получаем

$$\begin{gathered} F = F_E \cdot F_{IN} \cdot F_\Theta = [g + \varepsilon(h_E + h_{IN} + h_\Theta)] \cdot F_*, \\ F_* = F_{E*} \cdot F_{IN*} \cdot F_{\Theta*}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь F_E, F_{IN} определяются соотношениями (1.3) и (1.4); h_Θ — градиент температурных перемещений относительно конфигурации F_*;

$$F_\Theta = (g + \varepsilon F_{IN*}^{-1} \cdot F_{E*}^{-1} \cdot h_\Theta \cdot F_{E*} \cdot F_{IN*}) \cdot F_{\Theta*}. \tag{1.9}$$

(Заметим, что в соотношениях (1.8), (1.9) индексы IN и Θ можно поменять местами.) В результате полные малые деформации и повороты определяются выражениями $e = e_E + e_{IN} + e_\Theta$, $d = d_E + d_{IN} + d_\Theta$, где e_Θ, d_Θ — симметричная и кососимметричная части h_Θ.

Аналогично работе [3] можно показать, что полная деформация скорости перемещений D есть сумма деформации скорости упругих перемещений D_E, деформации скорости неупругих перемещений D_{IN} и деформации скорости температурных перемещений D_Θ; упругий градиент места не меняется при чисто неупругом и температурном изменении конфигурации, неупругий — при чисто упругом и температурном ее изменении, а температурный — при чисто упругом и неупругом изменении конфигурации. Приращение и скорость изменения меры деформации Коши — Грина C относительно промежуточной упругой конфигурации $\varkappa_2$ определяется соотношением (1.7), в котором полный градиент места определяется выражением (1.8).

2. Соотношения, вытекающие из законов термодинамики. Запишем термодинамическое неравенство Клаузиуса — Дюгема

$$T \cdot\cdot D - \rho(\dot\Psi + \dot\Theta s) - \boldsymbol{q} \cdot \tilde\nabla \ln \Theta \geqslant 0,$$

где ρ, Ψ, s – плотность массы в текущей конфигурации, удельные (отнесенные к единице массы) свободная энергия и энтропия; $\boldsymbol{q}$ — вектор теплового потока; $\tilde\nabla$ — оператор Гамильтона в текущей конфигурации; $D = \dot e_E + \dot e_{IN} + \dot e_\Theta$ — тензор полной деформации скорости перемещений. Согласно принципу объективности аргументами у функции Ψ могут быть только инвариантные величины, т. е. какая-либо инвариантная по отношению к жесткому вращению текущей конфигурации кинематическая величина, температура Θ и конечное число внутренних параметров χ_i ($i = 1, \dots, m$) — объективных скалярных функций, характеризующих изменение внутренней структуры материала в процессе упруго-неупругого деформирования. В качестве кинематической величины выберем тензор C и представим удельную свободную энергию $\Psi = \Psi(C, \chi_i, \Theta)$ в виде $\Psi(C, \chi_i, \Theta) = \Psi_1(C, \chi_i, \Theta) + \Psi_2(\Theta)$, полагая: 1) $\dot\Psi_1 = 0$, если $(\dot C)_{\varkappa_2} = 0$ $((dC)_{\varkappa_2} = 0)$; 2) $\Psi_2 = 0$, если $\Theta = \Theta_0$. Здесь Θ_0 — температура приведения, измеряемая в градусах Кельвина (обычно комнатная температура). Согласно первому условию (см. (1.7)), если отсутствует изменение упругой деформации ($\dot e_E = D_E = 0$), то и Ψ_1 не меняется. Поэтому любой упруго-неупругий процесс трактуется как упругий с напряженной отсчетной конфигурацией и моделируется последовательным соединением упругого, неупругого и температурного элементов. Как полагается во многих работах (см., например, [4–8]), величина Ψ_1 — это энергия, накопленная в упругом элементе. Первому условию удовлетворяет функционал W_1, введенный в работе [3]:

$$W_1 = \int_0^t \Big(\int_0^\tau \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot\cdot \dot C_{\varkappa_2}\, d\tau_1 \Big) \cdot\cdot \dot C_{\varkappa_2}\, d\tau. \tag{2.1}$$

Здесь W — упругий потенциал, зависящий только от упругой кинематики, которая, в свою очередь, зависит от $C_{\varkappa_2}$ (см. соотношение (1.6)). Если положить, что константы a_k ($k = 1, \dots, n$) этого упругого потенциала являются функциями неупругой кинематики и температуры ($a_k = a_k(\chi_i, \Theta)$), то независимыми переменными в функционале W_1 будут $C_{\varkappa_2}$, χ_i, Θ. Тогда

$$\dot W_1 = \frac{\partial W_1}{\partial C_{\varkappa_2}} \cdot\cdot\, \dot C_{\varkappa_2} + \frac{\partial W_1}{\partial \chi_i}\,\dot\chi_i + \frac{\partial W_1}{\partial \Theta}\,\dot\Theta = \Big(\int\limits_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot\cdot\, \dot C_{\varkappa_2}\, d\tau\Big) \cdot\cdot\, \dot C_{\varkappa_2} +$$
$$+ \int\limits_0^t \Big[\int\limits_0^\tau \Big(\frac{\partial^3 W}{\partial \chi_i\, \partial C_E^2}\,\dot\chi_i + \frac{\partial^3 W}{\partial \Theta\, \partial C_E^2}\,\dot\Theta\Big) \cdot\cdot\, \dot C_{\varkappa_2}\, d\tau_1\Big] \cdot\cdot\, \dot C_{\varkappa_2}\, d\tau. \qquad (2.2)$$

Если положить $W = W(C_E(\tau), \chi_i(t), \Theta(t))$, т. е. если функции χ_i и температура Θ входят в упругий потенциал W в качестве параметров, зависящих от текущего времени t, то этот результат может быть получен при непосредственном дифференцировании по t функционала (2.1), который с учетом соотношения (1.7) можно записать в виде

$$W_1 = 4 \int\limits_0^t \Big\{ F \cdot \Big[\int\limits_0^{\tau_1} \Big(F \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot F^{\mathrm{T}} \Big) \cdot\cdot\, D_E\, d\tau_2 \Big] \cdot F^{\mathrm{T}} \Big\} \cdot\cdot\, D_E\, d\tau_1. \qquad (2.3)$$

Здесь знак $\overset{“3”}{\circ}$ означает операцию скалярного умножения слева тензора второго ранга F на третий базисный вектор тензора четвертого ранга $\partial^2 W/\partial C_E^2$.

Функционал W_1 отнесен не к единичной массе, а к единичному недеформированному объему, поэтому $\rho_0 \Psi_1 = W_1$ и $\Psi = W_1/\rho_0 + \Psi_2(\Theta)$, где ρ_0 — плотность массы в начальной конфигурации. Так как $\rho = J^{-1}\rho_0$ (J — якобиан, определяющий относительное изменение объемов), то, подставляя выражения для D, $\dot\Psi$, ρ в неравенство Клаузиуса — Дюгема, имеем

$$\Big(T - 2J^{-1} F \cdot \frac{\partial W_1}{\partial C_{\varkappa_2}} \cdot F^{\mathrm{T}} \Big) \cdot\cdot\, \dot e_E + T \cdot\cdot\, \dot e_{IN} + T \cdot\cdot\, \dot e_\Theta -$$
$$- J^{-1} \frac{\partial W_1}{\partial \chi_i}\,\dot\chi_i - J^{-1}\rho_0 \Big(\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial W_1}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \Theta} + s \Big)\dot\Theta - \boldsymbol{q} \cdot \tilde\nabla \ln \Theta \geqslant 0. \qquad (2.4)$$

Построив локальное продолжение процесса [9] и связав $\dot e_\Theta$ с изменением температуры $\dot\Theta$ простейшим законом линейного температурного расширения $\dot e_\Theta = \beta \dot\Theta g$, где β — коэффициент линейного температурного расширения, который полагается функцией только температуры, для производной $\partial W_1/\partial C_{\varkappa_2}$ с учетом (2.2) получаем

$$T = J^{-1} F \cdot P_{\mathrm{II}} \cdot F^{\mathrm{T}},$$
$$P_{\mathrm{II}} = 2 \int\limits_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot\cdot\, \dot C_{\varkappa_2}\, d\tau = 4 \int\limits_0^t \Big(F \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot F^{\mathrm{T}} \Big) \cdot\cdot\, D_E\, d\tau, \qquad (2.5)$$

где P_{II} — симметричный тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа,

$$s = J\,\frac{\beta}{\rho_0}\, I_1(T) - \frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial W_1}{\partial \Theta} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \Theta},$$
$$T \cdot\cdot\, \dot e_{IN} - J^{-1} \frac{\partial W_1}{\partial \chi_i}\,\dot\chi_i - \boldsymbol{q} \cdot \tilde\nabla \ln \Theta \geqslant 0. \qquad (2.6)$$

Термодинамическое неравенство в (2.6) выполняется, если положить $\dot e_{IN} = \alpha_1 T$, $\alpha_1 > 0$, что соответствует дифференциальному закону вязкости, или $\dot e_{IN} = \alpha_2 S$, $\alpha_2 > 0$ (S — девиатор тензора T), что соответствует ассоциированному закону пластичности $\dot\chi_i =$

$-\alpha_3(\partial\Psi/\partial\chi_i)$, $\alpha_3 > 0$, и принять, в частности, что тепловой поток $\boldsymbol{q} = -\lambda\tilde{\nabla}\Theta$ (теплопроводность $\lambda > 0$) удовлетворяет уравнению Фурье (предположение для общего случая см., например, в [10]).

С учетом соотношений (2.5) функционал (2.1), (2.3) можно записать в виде

$$W_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^t P_{\rm II} \cdot\cdot\, \dot{C}_{\varkappa_2}\,d\tau = \int\limits_0^t JT \cdot\cdot\, D_E\,d\tau. \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.2) и (2.5) следует, что если деформирование происходит за счет только неупругого и температурного воздействий ($\dot{C}_{\varkappa_2} = 0$ ($D_E = 0$) на протяжении всего процесса), то напряжение T и производная $\partial W_1/\partial\Theta$ равны нулю. Тогда из соотношения (2.6) для энтропии следует

$$s = -\frac{\partial\Psi_2}{\partial\Theta}, \qquad s\Big|_{\Theta=\Theta_0} = -\frac{\partial\Psi_2}{\partial\Theta}\Big|_{\Theta=\Theta_0} = 0.$$

Из первого закона термодинамики

$$\rho(\dot{\Psi} + s\dot{\Theta} + \Theta\dot{s}) = T \cdot\cdot\, D + \rho\Omega - \tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}, \tag{2.8}$$

где Ω — удельная скорость производства тепла внутренними источниками, для этого случая (аналогично [11]) получаем

$$-\rho\Theta\,\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\Theta^2}\,\dot{\Theta} = \rho\dot{Q},$$

следовательно,

$$-\Theta\,\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\Theta^2} = \frac{dQ}{d\Theta} = c_T$$

($\rho\dot{Q} = \rho\Omega - \tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}$ — скорость изменения тепла, поступающего в единицу массы; c_T — теплоемкость единицы массы при нулевом напряжении). Полагая, что c_T зависит только от температуры, и представляя эту зависимость в виде

$$c_T = c_{T_0} + \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta} c_{T_1}(\Theta_1)\,d\Theta_1,$$

с учетом записанных выше начальных условий имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Psi_2}{\partial\Theta} = c_{T_0}\ln\frac{\Theta_0}{\Theta} - \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta}\ln\Big(\frac{\Theta}{\Theta_1}\Big)c_{T_1}(\Theta_1)\,d\Theta_1,\\ \Psi_2 = c_{T_0}\Big(\Theta\ln\frac{\Theta_0}{\Theta} + (\Theta-\Theta_0)\Big) - \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta}\Big(\Theta\ln\frac{\Theta}{\Theta_1} - (\Theta-\Theta_1)\Big)c_{T_1}(\Theta_1)\,d\Theta_1.\end{gathered} \tag{2.9}$$

В результате соотношение (2.6) для энтропии принимает вид

$$s = \frac{J\beta}{\rho_0}\,I_1(T) - \frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial W_1}{\partial\Theta} - c_{T_0}\ln\frac{\Theta_0}{\Theta} + \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta}\ln\Big(\frac{\Theta}{\Theta_1}\Big)c_{T_1}(\Theta_1)\,d\Theta_1. \tag{2.10}$$

Возвращаясь к первому закону термодинамики (2.8), с использованием выражений для Ψ и соотношений (2.9), (2.10) определим внутреннюю (собственную) диссипацию $\varphi = T \cdot\cdot D - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{\Theta})$. В результате получаем $\varphi = T \cdot\cdot D_{IN} - J^{-1} W_{1,\chi_i}\dot{\chi}_i$. Используя уравнение Фурье для теплового потока, для производства энтропии запишем соотношение

$$\rho\Theta\dot{s} = T \cdot\cdot D_{IN} - J^{-1} W_{1,\chi_i}\dot{\chi}_i + \rho\Omega + \tilde{\nabla}\cdot(\lambda\tilde{\nabla}\Theta). \tag{2.11}$$

Энтропия производится внешними источниками тепла (два последних слагаемых в правой части (2.11)) и скрытыми источниками (два первых слагаемых в правой части (2.11)), зависящими от мощности неупругого деформирования и изменения внутренней структуры материала. Долю энергии скрытых источников, переходящую в тепло, определим из уравнения теплопроводности.

В силу принципа равноприсутствия аргументами у энтропии являются тензор $C_{\varkappa_2}$, скалярные функции χ_i и температура Θ. При этом

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial C_{\varkappa_2}} \cdot\cdot \dot{C}_{\varkappa_2} + \frac{\partial s}{\partial \chi_i}\,\dot{\chi}_i + \frac{\partial s}{\partial \Theta}\,\dot{\Theta}.$$

Подставляя это выражение в левую часть соотношения (2.11), с учетом (1.7) получаем уравнение теплопроводности

$$c\dot{\Theta} = \dot{Q}_E + \dot{Q}_{IN} + \rho\Omega + \tilde{\nabla}\cdot(\lambda\tilde{\nabla}\Theta),$$

где $c = \rho\Theta(\partial s/\partial\Theta)$ — теплоемкость; $\dot{Q}_E$ — скорость производства тепла упругими деформациями:

$$\dot{Q}_E = -2\rho\Theta\Big(F\cdot\frac{\partial s}{\partial C_{\varkappa_2}}\cdot F^{\mathrm{T}}\Big)\cdot\cdot D_E,$$

$\dot{Q}_{IN}$ — скорость производства тепла неупругими деформациями и структурными изменениями в материале:

$$\dot{Q}_{IN} = T\cdot\cdot D_{IN} - \dot{\chi}_i\Big(J^{-1}W_{1,\chi_i} + \rho\Theta\,\frac{\partial s}{\partial\chi_i}\Big).$$

Уравнение теплопроводности, полученное дифференцированием зависимости (2.10) по времени, более удобно для работы. После несложных преобразований имеем

$$\begin{aligned}(\beta_{,\Theta}\Theta I_1(T) + J^{-1}\rho_0 c_T)\dot{\Theta} + \Big[\beta(I_1(T)I_1(D) + I_1(\dot{T})) - J^{-1}\frac{d}{dt}\,(W_{1,\Theta})\Big]\Theta =\\ = T\cdot\cdot D_{IN} - J^{-1}W_{1,\chi_i}\dot{\chi}_i + \rho\Omega + \tilde{\nabla}\cdot(\lambda\tilde{\nabla}\Theta).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь I_1 — первый инвариант соответствующего тензора; $f_{,\alpha} = \partial f/\partial\alpha$. Учитывая, что

$$I_1(\dot{T}) = 2T\cdot\cdot D - I_1(T)I_1(D) + g\cdot\cdot\Big(2J^{-1}F\cdot\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial W_1}{\partial C_{\varkappa_2}}\Big)\cdot F^{\mathrm{T}}\Big),$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial W_1}{\partial C_{\varkappa_2}}\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{dP_{\mathrm{II}}}{dt} = \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2}\cdot\cdot\dot{C}_{\varkappa_2} + \frac{1}{2}\,(P_{\mathrm{II},\chi_i}\dot{\chi}_i + P_{\mathrm{II},\Theta}\dot{\Theta}),$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial W_1}{\partial \Theta}\Big) = JT_{,\Theta}\cdot\cdot D_E + \dot{\chi}_i\int\limits_0^t JT_{,\Theta\chi_i}\cdot\cdot D_E\,d\tau + \dot{\Theta}\int\limits_0^t JT_{,\Theta\Theta}\cdot\cdot D_E\,d\tau,$$

из уравнения (2.12) получим следующие соотношения для теплоемкости и скорости производства тепла в результате упругого и неупругого деформирования и структурных изменений в материале:

$$c = J^{-1}\rho_0 c_T + \Theta\Big[(\beta_{,\Theta} + 2\beta^2)I_1(T) + \beta I_1(T_{,\Theta}) - J^{-1}\int\limits_0^t JT_{,\Theta\Theta}\cdot\cdot D_E\,d\tau\Big],$$

$$\dot{Q}_E = \Theta[T_{,\Theta} - 2\beta T - \beta(g \cdot\cdot \tilde{L}_6^{\mathrm{IV}})] \cdot\cdot D_E,$$

$$\dot{Q}_{IN} = (1 - 2\beta\Theta)T \cdot\cdot D_{IN} + \dot{\chi}_i \Big[J^{-1} \int\limits_0^t J(\Theta(t)T_{,\Theta\chi_i} - T_{,\chi_i}) \cdot\cdot D_E \, d\tau - \beta\Theta I_1(T_{,\chi_i})\Big].$$

Тензор четвертого ранга $\tilde{L}_6^{\mathrm{IV}}$, присутствующий в этих соотношениях, определяет свойства материала в текущий момент времени. Общее выражение для этого тензора получено в работе [3]:

$$\tilde{L}_6^{\mathrm{IV}} = 4J^{-1} F \cdot \Big(F \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \overset{2}{*} F^{\mathrm{т}}\Big) \cdot F^{\mathrm{т}}.$$

Здесь знак $\overset{\text{“2”}}{*}$ означает операцию скалярного умножения справа тензора второго ранга (в данном случае $F^{\mathrm{т}}$) на второй базисный вектор тензора четвертого ранга (в данном случае $\partial^2 W/\partial C_E^2$).

3. Ограничения, следующие из принципа объективности. В уравнения (2.4), (2.6), (2.7), (2.12) входят мощности $T \cdot\cdot \dot{e}_E$, $T \cdot\cdot \dot{e}_{IN}$ и $T \cdot\cdot \dot{e}_\Theta$. Рассмотрим их преобразование при вращении как жесткого целого текущей, неупругой, температурной и начальной конфигураций.

В соотношении (1.8) градиент F_Θ переводит начальную конфигурацию $\varkappa_0$ в конфигурацию $\varkappa_1$, являющуюся, в свою очередь, начальной для градиента F_{IN}, который переводит эту конфигурацию в $\varkappa_2$, преобразуемую в текущую конфигурацию $\varkappa$ градиентом F_E:

$$F\colon \varkappa_0 \to \varkappa, \qquad F_\Theta\colon \varkappa_0 \to \varkappa_1, \qquad F_{IN}\colon \varkappa_1 \to \varkappa_2, \qquad F_E\colon \varkappa_2 \to \varkappa.$$

Следуя работам [12, 13], рассмотрим, как преобразуются эти градиенты при изменении систем отсчета, относительно которых определяются движения, приводящие к конфигурациям $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa$, а также при изменении системы отсчета, в которой описываются величины, определяющие начальную конфигурацию $\varkappa_0$. Иными словами, рассмотрим, каким образом изменяются градиенты F, F_E, F_{IN}, F_Θ при трансляции и вращении конфигураций $\varkappa$, $\varkappa_2$, $\varkappa_1$, $\varkappa_0$ как жесткого целого.

При изменении только текущей конфигурации, соответствующей моменту времени t, и неизменных остальных конфигурациях имеем

$$F' = O \cdot F, \qquad F'_E = O \cdot F_E, \qquad F'_{IN} = F_{IN}, \qquad F'_\Theta = F_\Theta. \tag{3.1}$$

Здесь все градиенты определены в момент времени t. Подвергая преобразованию как жесткого целого только конфигурацию $\varkappa_2$, соответствующую моменту времени t, при неизменных остальных конфигурациях имеем

$$F' = F, \qquad F'_E = F_E \cdot O_{IN}^{\mathrm{т}}, \qquad F'_{IN} = O_{IN} \cdot F_{IN}, \qquad F'_\Theta = F_\Theta. \tag{3.2}$$

Подвергая преобразованию как жесткого целого только конфигурацию $\varkappa_1$, соответствующую моменту времени t, при неизменных остальных конфигурациях получаем зависимости

$$F' = F, \qquad F'_E = F_E, \qquad F'_{IN} = F_{IN} \cdot O_\Theta^{\mathrm{т}}, \qquad F'_\Theta = O_\Theta \cdot F_\Theta. \tag{3.3}$$

Наконец, при изменении начальной конфигурации $\varkappa_0$

$$F' = F \cdot O_0, \qquad F'_E = F_E, \qquad F'_{IN} = F_{IN}, \qquad F'_\Theta = F_\Theta \cdot O_0. \tag{3.4}$$

В результате при изменении всех конфигураций из соотношений (3.1)–(3.4) следует

$$F' = O \cdot F \cdot O_0, \qquad F'_E = O \cdot F_E \cdot O_{IN}^{\mathrm{т}}, \tag{3.5}$$

$$F'_{IN} = O_{IN} \cdot F_{IN} \cdot O^{\mathrm{т}}_{\Theta}, \qquad F'_{\Theta} = O_{\Theta} \cdot F_{\Theta} \cdot O_0.$$

С учетом (3.5), следуя [13], выясним, как изменяются мощности $T \cdot\cdot \dot{e}_E$, $T \cdot\cdot \dot{e}_{IN}$ и $T \cdot\cdot \dot{e}_{\Theta}$ при вращении как жесткого целого конфигураций $\varkappa$, $\varkappa_2$, $\varkappa_1$, $\varkappa_0$ при действии введенных ортогональных тензоров. Тензор истинных напряжений — объективный тензор, поэтому $T' = O \cdot T \cdot O^{\mathrm{т}}$. В работе [3] показано, что градиенты скоростей упругих и неупругих перемещений $l_E = (\tilde{\nabla} \boldsymbol{v}_E)^{\mathrm{т}}$ и $l_{IN} = (\tilde{\nabla} \boldsymbol{v}_{IN})^{\mathrm{т}}$ представляются в виде

$$l_E = \dot{F}_E \cdot F_E^{-1} = \dot{e}_E + \dot{d}_E, \qquad l_{IN} = F_E \cdot \dot{F}_{IN} \cdot F_{IN}^{-1} \cdot F_E^{-1} = \dot{e}_{IN} + \dot{d}_{IN}.$$

Аналогично можно показать, что

$$l_{\Theta} = F_{IN} \cdot F_E \cdot \dot{F}_{\Theta} \cdot F_{\Theta}^{-1} \cdot F_E^{-1} \cdot F_{IN}^{-1} = \dot{e}_{\Theta} + \dot{d}_{\Theta} \qquad (l_{\Theta} = (\tilde{\nabla} \boldsymbol{v}_{\Theta})^{\mathrm{т}}).$$

С учетом соотношений (3.5) определяем l'_E, l'_{IN}, l'_{Θ}. В результате имеем

$$\begin{gathered} T' \cdot\cdot \dot{e}'_E = T' \cdot\cdot l'_E = T \cdot\cdot \dot{e}_E + (F_E^{-1} \cdot T \cdot F_E) \cdot\cdot (\dot{O}^{\mathrm{т}}_{IN} \cdot O_{IN}), \\ T' \cdot\cdot \dot{e}'_{IN} = T' \cdot\cdot l'_{IN} = T \cdot\cdot \dot{e}_{IN} - (F_E^{-1} \cdot T \cdot F_E) \cdot\cdot (\dot{O}^{\mathrm{т}}_{IN} \cdot O_{IN}) + \\ + (F_{IN}^{-1} \cdot F_E^{-1} \cdot T \cdot F_E \cdot F_{IN}) \cdot\cdot (\dot{O}^{\mathrm{т}}_{\Theta} \cdot O_{\Theta}), \\ T' \cdot\cdot \dot{e}'_{\Theta} = T' \cdot\cdot l'_{\Theta} = T \cdot\cdot \dot{e}_{\Theta} - (F_{IN}^{-1} \cdot F_E^{-1} \cdot T \cdot F_E \cdot F_{IN}) \cdot\cdot (\dot{O}^{\mathrm{т}}_{\Theta} \cdot O_{\Theta}) + \\ + (F_{\Theta}^{-1} \cdot F_{IN}^{-1} \cdot F_E^{-1} \cdot T \cdot F_E \cdot F_{IN} \cdot F_{\Theta}) \cdot\cdot (\dot{O}_0 \cdot O_0^{\mathrm{т}}). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Последнее слагаемое в третьем выражении равно нулю, так как тензор O_0, определяющий начальную анизотропию материала, не зависит от времени.

Из представленных выше соотношений следует, что полная мощность есть инвариантная величина: $T' \cdot\cdot \dot{e}' = T \cdot\cdot \dot{e}$ (аксиома Нолла (см. [9])). Однако мощности упругого деформирования, механической и тепловой диссипации зависят от жестких преобразований конфигураций $\varkappa_2$ и $\varkappa_1$ за счет членов, включающих операцию двойного скалярного умножения на кососимметричные тензоры (спины) $A_{IN} = \dot{O}^{\mathrm{т}}_{IN} \cdot O_{IN}$ и $A_{\Theta} = \dot{O}^{\mathrm{т}}_{\Theta} \cdot O_{\Theta}$. Если эти члены не равны нулю, то соответствующим выбором тензоров O_{IN} и O_{Θ} можно получить любые по величине и знаку мощности упругого деформирования, механической и тепловой диссипации за счет только жесткого изменения отсчетных конфигураций. Эти члены равны нулю в двух случаях: 1) если тензоры, с которыми свертываются спины A_{IN} и A_{Θ}, симметричны; 2) если $R_{IN} = g$ и $R_{\Theta} = g$ в любой момент времени (R_{IN}, R_{Θ} — ортогональные тензоры в полярных разложениях градиентов места F_{IN} и F_{Θ}). Первое условие выполняется только для чисто упругого процесса при начальной изотропии материала (см. [13]). В случае упруго-неупругого процесса, как следует из выражений (2.5), это условие не выполняется. Так как соотношения (3.6) справедливы для любых ортогональных тензоров O_{IN} и O_{Θ}, то, полагая $O_{IN} = R_{IN}$ и $O_{\Theta} = R_{\Theta}$, получаем второе условие. В результате полный градиент места представляется в виде $F = F_E \cdot U_{IN} \cdot U_{\Theta}$, где U_{IN}, U_{Θ} — симметричные положительно-определенные тензоры чистых деформаций в полярных разложениях градиентов места $F_{IN} = R_{IN} \cdot U_{IN}$, $F_{\Theta} = R_{\Theta} \cdot U_{\Theta}$ и $R_{IN} = g$, $R_{\Theta} = g$. Таким образом, доказано необходимое условие инвариантности мощности упругого деформирования, механической и тепловой диссипации по отношению к жестким преобразованиям отсчетных конфигураций, которое является также достаточным. Действительно, при условии $R_{IN} = g$, $R_{\Theta} = g$ и изменении только текущей конфигурации имеем

$$F' = O \cdot F, \quad F'_E = O \cdot F_E, \quad U'_{IN} = U_{IN}, \qquad U'_{\Theta} = U_{\Theta}.$$

Подвергая преобразованию как жесткого целого только конфигурацию $\varkappa_2$, получаем

$$F' = F, \qquad F'_E = F_E, \qquad U'_{IN} = U_{IN}, \qquad U'_{\Theta} = U_{\Theta},$$

а преобразуя только конфигурацию $\varkappa_1$, имеем

$$F' = F, \qquad F'_E = F_E, \qquad U'_{IN} = U_{IN}, \qquad U'_\Theta = U_\Theta.$$

Наконец, при изменении начальной конфигурации $\varkappa_0$

$$F' = F \cdot O_0, \qquad F'_E = F_E \cdot O_0, \qquad U'_{IN} = O_0^{\text{т}} \cdot U_{IN} \cdot O_0, \qquad U'_\Theta = O_0^{\text{т}} \cdot U_\Theta \cdot O_0.$$

В результате при изменении всех конфигураций получаем

$$F' = O \cdot F \cdot O_0, \qquad F'_E = O \cdot F_E \cdot O_0,$$
$$U'_{IN} = O_0^{\text{т}} \cdot U_{IN} \cdot O_0, \qquad U'_\Theta = O_0^{\text{т}} \cdot U_\Theta \cdot O_0.$$

Используя эти выражения и вычисляя (с учетом независимости O_0 от времени) величины

$$l'_E = \dot{F}'_E \cdot (F'_E)^{-1}, \qquad l'_{IN} = F'_E \cdot \dot{U}'_{IN} \cdot (U'_{IN})^{-1} \cdot (F'_E)^{-1},$$
$$l'_\Theta = U'_{IN} \cdot F'_E \cdot \dot{U}'_\Theta \cdot (U'_\Theta)^{-1} \cdot (F'_E)^{-1} \cdot (U'_{IN})^{-1},$$

устанавливаем, что мощности упругого деформирования, механической и тепловой диссипации инвариантны относительно жестких преобразований отсчетных конфигураций. Это утверждение означает объективность всех соотношений п. **2**.

Заключение. В данной работе в рамках кинематики, определяемой наложением упруго-неупругих градиентов места (переводящих промежуточную конфигурацию в близкую текущую) на конечные упруго-неупругие (переводящие начальную конфигурацию в промежуточную), аналогично работе [3] построено разложение полного градиента места на упругий, неупругий и температурный, совпадающее по форме с известным разложением Ли, но свободное от недостатков последнего. Показано, что в силу принципа объективности, как и в представлении Ли, неупругий и температурный градиенты места должны быть чистыми деформациями без вращений.

С использованием в качестве одного из слагаемых в выражении для свободной энергии функционала, введенного в работе [3], получены вытекающие из термодинамики соотношения для напряжений и энтропии и построено уравнение теплопроводности. При этом константы, входящие в этом функционале в тензор четвертого ранга, который определяет свойства материала в текущий момент времени и зависит только от упругой кинематики, полагались функциями температуры и скалярных структурных параметров, определяемых неупругой кинематикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новокшанов Р. С., Роговой А. А.** О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С. 77–95.
2. **Новокшанов Р. С., Роговой А. А.** Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 122–140.
3. **Роговой А. А.** Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
4. **Lion A.** A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomers // Acta Mech. 1997. V. 123. P. 1–125.
5. **Lion A.** On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures // J. Mech. Phys. Solids. 1997. V. 45, N 11/12. P. 1805–1834.
6. **Miehe C.** A constitutive frame of elastoplasticity at large stains based on the notion of a plastic metric // Intern. J. Solids Struct. 1998. V. 35, N 30. P. 3859–3897.

7. **Haupt P., Lion A., Backhaus E.** On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: constitutive modelling and identification of parameters // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37, N 26. P. 3633–3646.
8. **Helm D., Haupt P.** Shape memory behaviour: modelling within continuum thermomechanics // Intern. J. Solids Struct. 2003. V. 40, N 4. P. 827–949.
9. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
10. **Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Гуменюк Б. П.** Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. Киев: Наук. думка, 1985.
11. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
12. **Кондауров В. И.** Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
13. **Левитас В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987.

Поступила в редакцию 13/VI 2006 г.