УДК 539.375

ПРИМЕНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ СЛАБОИСКРИВЛЕННОЙ ТРЕЩИНЫ

С. А. Назаров, М. Шпековиус-Нойгебауер*

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
* Университет г. Кассель, 34132 Кассель, Германия
E-mails: serna@snark.ipme.ru, specovi@mathematik.uni-kassel.de

Получена асимптотическая формула для приращения полной энергии при квазистатическом росте полубесконечной трещины в анизотропной упругой плоскости при сложном нагружении. Считается, что сдвиговые нагрузки много меньше разрывающих. Для определения формы слабоискривленной трещины использован критерий Гриффитса в двух вариантах: глобальном и локальном. Показано, в частности, что первый вариант приводит к неправдоподобному результату.

Ключевые слова: слабоискривленная трещина, локальный и глобальный критерии разрушения Гриффитса, асимптотический анализ.

1. Энергетический критерий разрушения. Обычно критерий Гриффитса формулируется следующим образом: при квазистатическом развитии трещина выбирает путь, обеспечивающий в любой момент времени наименьшее значение полной энергии (потенциальной и поверхностной). В связи с этим возникает два вопроса: 1) о каком времени идет речь, если процесс разрушения квазистатический; 2) как следует ставить минимизационную задачу: глобально, на всем промежутке времени, или локально, для каждого момента?

Ответ на первый вопрос достаточно прост: требуется параметр нагружения τ, соответствующий более медленному процессу, чем распространение волн в теле, и монотонно возрастающий вместе с реальным временем t. В принципе параметр τ может иметь отличающуюся от t размерность, но его введение позволяет обоснованно пренебрегать инерционными членами в уравнениях равновесия [1].

Ответ на второй вопрос не столь очевиден, поскольку при сложном напряженном состоянии решение задачи вычисления полной энергии в зависимости от формы трещины с использованием современного математического аппарата невозможно. Упрощающее предположение, позволившее в данной работе найти асимптотику энергии, состоит в том, что разрывающая нагрузка считается значительно превышающей сдвиговую нагрузку. Как следствие траектория трещины остается близкой к прямой, а ее слабое искривление учитывается с помощью асимптотических методов.

В настоящей работе исследовано удлинение и искривление полубесконечной трещины, проходящей первоначально по оси упругой и прочностной симметрии анизотропной плоскости. С использованием полученных приближенных, но асимптотически точных формул показано, что глобальная формулировка критерия Гриффитса (минимизация полной энергии на всем промежутке $[0,\tau]$) приводит к парадоксальному результату: отросток трещины

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00257) и гранта Deutscher Akademischer Austausch Dienst.

оказывается прямым и угол его отклонения определяется только нагружением в момент τ, но не предысторией нагружения. Этот вывод противоречит предположению о квазистатическом характере роста трещины, так как если нагружение не простое, то в любой момент $\tau' \in (0, \tau)$ трещина избирает другой угол отклонения от первоначальной оси. Причина неадекватности глобальной формулировки заключается, по-видимому, в отсутствии свойства потенциальности у функционала полной энергии, так как процесс разрушения необратим. Показано, что локальная формулировка критерия Гриффитса (минимизация приращений полной энергии на элементарных промежутках) лишена перечисленных недостатков.

2. Постановка задачи о трещине. Пусть полубесконечная трещина в однородной упругой плоскости $\mathbb{R}^2$ определяется формулой

$$\Lambda_l := \Lambda_l(h, H) = \{x = (x_1, x_2)\colon x_1 \leqslant l,\ x_2 = hH(x_1)\}. \tag{2.1}$$

При этом начало системы декартовых координат x совмещено с исходным положением вершины O прямой трещины, т. е. $H(x_1) = 0$ при $x_1 \leqslant 0$; H — непрерывная функция, гладкая при $x_1 \geqslant 0$, но ее производные могут претерпевать разрывы первого рода в точке $x_1 = 0$. Величина $l \geqslant 0$ — приращение длины трещины, а функция H и малый безразмерный параметр $h > 0$ описывают слабое искривление ее траектории.

Плоскость с трещиной нагружена на бесконечности и вектор смещений $u^l = (u_1^l, u_2^l)$ удовлетворяет однородным уравнениям равновесия и краевым условиям

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\,\sigma_{1k}(u^l; x) - \frac{\partial}{\partial x_2}\,\sigma_{2k}(u^l; x) = 0, \qquad k = 1, 2, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Lambda_l; \tag{2.2}$$

$$n_1^{\pm}(x)\sigma_{1k}(u^l; x) + n_2^{\pm}(x)\sigma_{2k}(u^l; x) = 0, \qquad k = 1, 2, \quad x \in \Lambda_l^{\pm}, \tag{2.3}$$

а также асимптотическому условию

$$u^l(x) = C_1(l)X^1(x) + C_2(l)X^2(x) + O(|x|^{-1/2}), \qquad |x| \to \infty. \tag{2.4}$$

Здесь $\sigma_{jk}(u)$ — декартовы компоненты тензора напряжений, порожденного вектором смещений u; $n^{\pm} = (n_1^{\pm}, n_2^{\pm})$ — единичный вектор внешней нормали на берегах $\Lambda_l^{\pm}$ трещины Λ_l. Величины $C_1(l)$ и $C_2(l)$, имеющие размерность коэффициента интенсивности напряжений (КИН), описывают внешние воздействия и определены так, что при каждом $l \geqslant 0$ трещина Λ_l критическая (уточнение определения см. в п. **5**). Через X^1 и X^2 обозначены поля смещений, порождающие корневые сингулярности напряжений и соответственно удовлетворяющие обычным условиям нормировки на продолжении трещины $\Lambda_0 = \{x\colon x_1 \leqslant 0, x_2 = 0\}$:

$$\sigma_{12}(X^j; x_1, 0) = (2\pi x_1)^{1/2}\delta_{j2}, \quad \sigma_{22}(X^j; x_1, 0) = (2\pi x_1)^{1/2}\delta_{j1}, \quad j = 1, 2, \quad x_1 > 0. \tag{2.5}$$

Здесь δ_{jk} — символ Кронекера. Кроме того, считаем, что гладкие функции $l \mapsto C_i(l)$ удовлетворяют соотношениям

$$C_1(l) > 0; \tag{2.6}$$

$$C_2(l) = h\overline{C}_2(l), \tag{2.7}$$

где $|\overline{C}_2(l)| \leqslant C_1(l)$ при всех $l \geqslant 0$; $h > 0$ — малый параметр (см. (2.1)). Будем предполагать, что ось абсцисс Ox_1 проходит через плоскость симметрии физических свойств тела. Как показано в работе [2], неравенство (2.6) обеспечивает отсутствие контакта берегов трещины (при произвольной анизотропии последнее, вообще говоря, неверно).

Поскольку вне некоторого круга трещина Λ_l прямолинейная, формулу (2.4) можно уточнить за счет использования младших асимптотических членов $O(|x|^{-1/2})$:

$$u^l(x) = \sum_{j=1}^{2}(C_j(l)X^j(x) + N_j(l)Y^j(x)) + O(|x|^{-1}), \qquad |x| \to \infty. \tag{2.8}$$

Здесь $N_1(l)$, $N_2(l)$ — коэффициенты, зависящие от КИН $C_j(l)$, упругих свойств материала и формы трещины (2.1). Вектор-функции Y^j, положительно однородные степени $-1/2$, подчинены условиям биортогональности (см., например, [2, 4, 5])

$$q(X^j, Y^k; \Gamma) := \int\limits_{\Gamma} (Y^k(x)\sigma^{(n)}(X^j; x) - X^j(x)\sigma^{(n)}(Y^k; x))\, ds_x = \delta_{jk}, \quad j = 1, 2, \ k = 1, 2, \tag{2.9}$$

где Γ — простая гладкая дуга, соединяющая берега трещины Λ_0 и охватывающая ее вершину; $\sigma^{(n)} = (\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)})$; $\sigma_j^{(n)} = n_1\sigma_{1j} + n_2\sigma_{2j}$; $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали для области Ω, ограниченной Γ. В правой части (2.9) интеграл инвариантный, в силу симметрии упругих свойств выполнены равенства [2]

$$\frac{\partial X^j}{\partial x_1}(x) = -m_{jj} Y^j(x), \qquad j = 1, 2, \tag{2.10}$$

причем $m_{11} > 0$, $m_{22} > 0$ — константы материала. В изотропном случае $m_{11} = m_{22} = \mu^{-1}(1 - \nu)$, где $\mu > 0$ — модуль сдвига; $0 \leqslant \nu < 1/2$ — коэффициент Пуассона.

В соотношении (2.10) присутствуют производные полей X^j вдоль прямолинейной трещины Λ_0, пропорциональные весовым функциям [6] или дуальным сингулярным решениям Y^j [4]. В работе [2] также получена формула, связывающая Y^2 и производную $\partial X^1/\partial x_2$ поперек трещины:

$$\frac{\partial X^1}{\partial x_2}(x) = -\frac{m_{11}}{m_{22}} \frac{\partial X^2}{\partial x_1}(x) = m_{11} Y^2(x). \tag{2.11}$$

Формула (2.11) отличается от формулы (2.6) в [2], поскольку в (2.11) используется базис $\{X^1, X^2\}$, адаптированный к силовым критериям разрушения, а в формуле (2.6) в [2] — базис, адаптированный к деформационным критериям разрушения; связь между этими базисами дана соотношениями (1.8) и (1.7) в [2].

3. Энергетический функционал. Поскольку решение u^l задачи (2.2)–(2.4) в неограниченной области $\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda_l$ растет как $O(|x|^{1/2})$ при $|x| \to \infty$, интеграл упругой энергии

$$E(u^l; \mathbb{R}^2 \setminus \Lambda_l) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda_l} \sigma_{jk}(u^l; x) \frac{\partial u_j^l}{\partial x_k}(x)\, dx$$

расходится. Для того чтобы придать смысл энергетическому функционалу, интерпретируем решение u^l как предел решений задач для больших, но ограниченных тел:

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{1k}(u_{(R)}^l; x) - \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{2k}(u_{(R)}^l; x) = 0, \qquad k = 1, 2, \quad x \in \Omega_R \setminus \Lambda_l; \tag{3.1}$$

$$n_1^{\pm}(x)\sigma_{1k}(u_{(R)}^l; x) + n_2^{\pm}(x)\sigma_{2k}(u_{(R)}^l; x) = 0, \qquad k = 1, 2, \quad x \in \Lambda_l^{\pm} \cap \Omega_R; \tag{3.2}$$

$$\sigma^{(n)}(u_{(R)}^l; x) = g_{(R)}^l(x) := \sum_{j=1}^{2} C_{1j}(l)\sigma^{(n)}(X^j; x), \qquad x \in \partial\Omega_R. \tag{3.3}$$

Здесь $\Omega_R = \{x\colon R^{-1}x \in \Omega\}$ — R-кратное растяжение некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, содержащей точку O. Считая отношение l/R малым параметром, будем искать асимптотику решения задачи (3.1)–(3.3) в виде

$$u_{(R)}^l(x) = u^l(x) + R^{-1/2} v(R^{-1}x) + \tilde{u}_{(R)}^l(x). \tag{3.4}$$

Применив метод составных разложений [7] (см. также [3, 8–10] для задач теории упругости), заключаем, что главный член асимптотики (3.4) является решением задачи (2.2)–(2.4), а поправка v — ограниченным решением задачи для тела Ω с краевой трещиной $\Lambda_0 \cap \Omega$ (без отростка), компенсирующим невязку поля u^l в краевом условии (3.3). Таким образом, согласно разложению (2.8) имеем

$$\sigma^{(n)}(v;\xi) = -N_1(l)\,\sigma^{(n)}(Y^1;\xi) - N_2(l)\,\sigma^{(n)}(Y^2;\xi), \qquad \xi \in \partial\Omega. \tag{3.5}$$

Наконец, $\tilde{u}^l_{(R)}$ — малый остаток, который при подходящей нормировке, устраняющей произвол в выборе жесткого смещения, вне окрестности вершины трещины Λ_l подчинен неравенству [7, 9]

$$|\tilde{u}^l_{(R)}(x)| \leqslant c m_{11} C_1(l)\,\frac{l}{R}\,(l+|x|)^{-1/2} \tag{3.6}$$

с постоянной c, не зависящей от геометрических параметров R и l.

В силу теоремы Клапейрона и формул (3.4), (3.6) потенциальная энергия деформации (упругая энергия без учета работы внешних сил), запасенная телом $\Omega_R \setminus \Lambda_l$, удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} U^l_R &:= E(u^l_{(R)};\Omega_R\setminus\Lambda_l) - \int\limits_{\Gamma_R} g^l_{(R)} u^l_{(R)}\,ds_x = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_R} g^l_{(R)} u^l_{(R)}\,ds_x = \\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_R} g^l_{(R)}(x)\Big(u^l(x) + R^{-1/2} v\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big)\,ds_x + O\Big(m_{11}C_1(l)^2\,\frac{l}{R}\Big). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Рассмотрим последний интеграл I_R по контуру $\Gamma_R = \partial\Omega_R$. С учетом формул (2.4) и (2.5) имеем

$$\begin{gathered} I_R = RI^0 + \sum_{j=1}^{2} C_j(l) I^j_R, \qquad I^0 = \sum_{j,k=1}^{2} C_j(l)C_k(l)\int\limits_{\Gamma_1}\sigma^{(n)}(X^j;x)X^k(x)\,ds, \\ I^j_R = \int\limits_{\Gamma_R}\sigma^{(n)}(X^j;x)\Big(u^l(x) - \sum_{k=1}^{2} C_k(l)X^k(x) + R^{-1/2}v\Big(\frac{x}{R}\Big)\Big)\,ds. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Величина I^0 не зависит от R. Следует отметить, что в силу соотношений (2.8) и (3.5) разность $u^l - \sum C_k(l)X^k$ с точностью до $O(m_{11}C_1(l)(L/R)^{3/2})$ совпадает на контуре Γ_R с выражением $\sum N_k(l)\,Y^k$ и справедливо равенство

$$\sigma^{(n)}\Big(\sum_{k=1}^{2} N_k(l)Y^k(x) + R^{-1/2}v(R^{-1}x)\Big) = 0, \qquad x \in \Gamma_R.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I^j_R &= q\Big(X^j, \sum_{k=1}^{2} N_k(l)Y^k + R^{-1/2}v;\Gamma_R\Big) + O\Big(m_{11}C_1(l)^2\,\frac{l}{R}\Big) = \\ &= \sum_{k=1}^{2} N_k(l)q(X^j,Y^k;\Gamma) + O\Big(m_{11}C_1(l)^2\,\frac{l}{R}\Big) = N_j(l) + O\Big(m_{11}C_1(l)^2\,\frac{l}{R}\Big). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Итак, из формул (3.7)–(3.9) следует, что потенциальная энергия U_R^l неограниченно возрастает при $R \to +\infty$, однако приращение $\Delta U_R^l = U_R^l - U_R^0$ остается ограниченным и стремится к величине

$$\Delta U^l = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} C_j(l) N_j(l), \tag{3.10}$$

которую и следует понимать как приращение потенциальной энергии деформации неограниченного тела при удлинении трещины.

4. Асимптотика приращения полной энергии. Приращение поверхностной энергии при образовании отростка (2.1) трещины $\Lambda_l \setminus \Lambda_0$ найти несложно:

$$\Delta S^l = S^l - S^0 = 2\int_0^l \gamma\Big(\operatorname{arctg}\Big(h\frac{dH}{dx_1}(x_1)\Big)\Big)\Big(1 + h^2\Big|\frac{dH}{dx_1}(x_1)\Big|^2\Big)^{1/2} dx_1 =$$

$$= 2\gamma(0)l + h^2(\gamma(0) + h^2\gamma''(0))\int_0^l \Big|\frac{dH}{dx_1}(x_1)\Big|^2 dx_1 + O(h^4). \tag{4.1}$$

Здесь γ — плотность поверхностной энергии, гладко зависящая от угла наклона трещины $\theta = \operatorname{arctg}(h\,dH(x_1)/dx_1)$; штрих обозначает производную по θ; $\gamma'(0) = 0$, так как γ — четная функция переменной θ в силу предположения о симметрии физических свойств материала относительно оси абсцисс.

Согласно [11] приращение потенциальной энергии деформации (3.10) вычисляется по формуле

$$\Delta U^l = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2} C_j(l) M_{jk}(l, hH) C_k(l), \tag{4.2}$$

где $M = (M_{jk})$ — симметричная положительно-определенная матрица высвобождения энергии размером 2×2, составленная из коэффициентов разложений

$$w^j(x) = X^j(x) + \sum_{k=1}^{2} M_{jk}(l, hH) Y^k(x) + O(|x|^{-1}), \qquad |x| \to \infty \tag{4.3}$$

специальных решений задачи (2.2), (2.3) о плоскости с трещиной Λ_l. В силу соотношений (2.4) и (4.3) выполнено равенство $u^l = C_1(l)w^1 + C_2(l)w^2$, которое вместе с соотношениями (2.8) и (3.10) приводит к формуле (4.2).

Для вычисления асимптотики (относительно параметра h) коэффициентов $M_{jk}(l, hH)$ применим метод спрямления границы (об альтернативном подходе см. [15, 16]), использованный в работах [2, 12–14] и обоснованный в [7]. Выполнив замену

$$x = (x_1, x_2) \;\mapsto\; \xi = (\xi_1, \xi_2) = (x_1 - l, x_2 - hH(l)),$$

поместим начало декартовой системы координат ξ в вершину трещины (2.1), которая в этих координатах определяется формулой

$$\Lambda_l := \Lambda_l(h, H) = \{\xi\colon \xi_1 \leqslant 0,\ \xi_2 = h(H(\xi_1 + l) - H(l))\}. \tag{4.4}$$

Поскольку для положительно однородной степени $\lambda \in \mathbb{R}$ функции Z при любом постоянном векторе $b \in \mathbb{R}^2$ верна формула Тейлора

$$Z(\xi + b) = Z(\xi) + (b\nabla_\xi)Z(\xi) + O(|\xi|^{\lambda-2}), \qquad |\xi| \to \infty,$$

асимптотическое условие (4.3) для вектор-функции $\xi \mapsto W^j(\xi) = w^j(x)$ записывается следующим образом:

$$W^j(\xi) = X^j(\xi) + l\,\frac{\partial X^j}{\partial \xi_1}(\xi) + hH(l)\,\frac{\partial X^i}{\partial \xi_2}(\xi) + \sum_{k=1}^{2} M_{jk}(l, hH) Y^k(\xi) + O(|\xi|^{-1}), \quad |\xi| \to \infty. \tag{4.5}$$

Отыскивая асимптотику относительно параметра h полей

$$W^j(\xi) = W^{j0}(\xi) + hW^{j1}(\xi) + h^2 W^{j2}(\xi) + \ldots, \tag{4.6}$$

снесем краевые условия с трещины (4.4) на луч $\Lambda_0 = \{\xi\colon \xi_1 \leqslant 0,\ \xi_2 = 0\}$. Внешняя нормаль $n^\pm(h, \xi_1)$ к берегам $\Lambda_l^\pm$ задана формулой

$$n^\pm(h, \xi_1) = n_0(h, \xi_1)^{-1/2}(\pm hH_l'(\xi_1), \mp 1), \tag{4.7}$$

где $H_l(\xi_1) = H(\xi_1 + l) - H(l)$; $n_0(h, \xi_1) = 1 + h^2 H_l'(\xi_1)^2$; штрих обозначает производную по ξ_1. Подставив соотношения (4.6) и (4.7) в краевое условие (2.3), умноженное на $n_0(h, \xi_1)^{1/2}$, получаем формально соотношение

$$\begin{gathered} 0 = \mp(\sigma_{2k}(W^j; h, \xi) - hH_l'(\xi_1)\sigma_{1k}(W^j; h, \xi))\big|_{\xi_2 = hH_l(\xi_1)} = \mp\sigma_{2k}(W^{j0}; \xi_1, \pm 0) \mp = \\ \mp h(\sigma_{2k}(W^{j1}; \xi_1, \pm 0) + H_l(\xi_1)\partial_2\sigma_{2k}(W^{j0}; \xi_1, \pm 0) - H_l'(\xi_1)\sigma_{1k}(W^{j0}; \xi_1, \pm 0)) \mp \\ \mp h^2(\sigma_{2k}(W^{j2}; \xi_1, \pm 0) + H_l(\xi_1)\partial_2\sigma_{2k}(W^{j1}; \xi_1, \pm 0) - H_l'(\xi_1)\sigma_{1k}(W^{j1}; \xi_1, 0) + \\ + (1/2)H_l(\xi_1)^2\partial^2\sigma_{2k}(W^{j0}; \xi_1, \pm 0) - H_l'(\xi_1)H_l(\xi_1)\partial_2\sigma_{1k}(W^{j0}; \xi_1, \pm 0)) + \ldots . \end{gathered} \tag{4.8}$$

Каждое из слагаемых W^{jp} в асимптотике (4.6) удовлетворяет однородным уравнениям равновесия (2.2) на плоскости с разрезом $\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda_0$. Вытекающие из системы (2.2) равенства $\partial_2\sigma_{2k}(W^{jp}) = -\partial_1\sigma_{1k}(W^{jp})$ упрощают множители при h^p в правой части (4.8). Аннулируя эти множители, выводим следующие краевые условия на берегах трещины Λ_0:

$$\sigma_{2k}(W^{j0}; \xi_1, \pm 0) = 0, \qquad k = 1, 2, \quad \xi_1 < 0; \tag{4.9}$$

$$\sigma_{2k}(W^{j1}; \xi_1, \pm 0) = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\,(H_l(\xi_1)\sigma_{1k}(W^{j1}; \xi_1, \pm 0)), \qquad k = 1, 2, \quad \xi_1 < 0; \tag{4.10}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{2k}(W^{j2}; \xi_1, \pm 0) = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\,(H_l(\xi_1)\sigma_{1k}(W^{j1}; \xi_1, \pm 0)) + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial \xi_1}\Big(H_l(\xi_1)^2\,\frac{\partial}{\partial \xi_2}\,\sigma_{1k}(W^{j0}; \xi_1, \pm 0)\Big), \qquad k = 1, 2, \quad \xi_1 < 0. \end{gathered} \tag{4.11}$$

В (4.8) использована формула Тейлора относительно переменной ξ_2, требующая достаточной гладкости вектор-функций W^j и W^{jp}. Исходная трещина (4.4) имеет угловые точки $\xi^0 = (0, 0)$ и $\xi^{h\pm} = (-l, hH(0) \pm 0)$, в которых напряжения $\sigma_{ik}(W^j; h, \xi)$ приобретают особенности. При спрямлении трещины Λ_l ее вершина ξ^0 остается неподвижной, поэтому напряжения $\sigma_{ik}(W^{jp}; \xi)$ обладают такими же особенностями $O(|\xi|^{-1/2})$, что и напряжения $\sigma_{ik}(W^j; h, \xi)$. При этом в правых частях (4.10) и (4.11) сингулярности высших порядков, возникшие при дифференцировании напряжений, погашены множителями $H_l(\xi_1)$, обращающимися в нуль при $\xi_1 = 0$.

Точка $\xi^{0\pm} = (-l, \pm 0) \in \Lambda_0^\pm$ является образом вершины $\xi^{h\pm}$ угла с раствором $\pi \mp \operatorname{arctg}(hH'(0))$ на $\Lambda_l^\pm$, а напряжения $\sigma_{ik}(W^j; h, \xi)$ есть величины порядка $O(|\xi - \xi^{h\pm}|^{\beta_\pm(h)})$ вблизи точек $\xi^{h\pm}$ ($\beta_\pm(h)$ — бесконечно малые при $h \to +0$) (см., например, [17]). В силу результатов, полученных в [7] (см. также [18, 19]), разложению (4.6) можно придать смысл лишь при условии, что порядок λ особенности $\sigma_{ik}(W^{jp};\xi) = O(|\xi - \xi^{0\pm}|^{-\lambda})$ строго меньше единицы. В противном случае вблизи точек $\xi^{h\pm}$ возникают дополнительные пограничные слои, отсутствующие в представлении (4.6), но конструируемые с помощью процедур, описанных в работах [7, 17–19]. Поскольку функция H_l гладкая всюду, кроме точки $\xi_1 = -l$, правые части краевых условий (4.10) могут претерпевать разрывы первого рода в этой точке, а напряжения $\sigma_{ik}(W^{j1})$ — приобретать логарифмическую сингулярность $O(1 + |\ln|\xi - \xi^{0\pm}||)$. В этом случае правые части краевых условий (4.11), а значит, и напряжения $\sigma_{ik}(W^{j2};\xi)$ имеют неэнергетические сингулярности $O(|\xi - \xi^{0\pm}|^{-1})$ и, как сказано выше, нуждаются в исправлении вблизи точек $\xi^{h\pm}$. Таким образом, при возникновении разрывов и неучете пограничных слоев из разложения (4.6) необходимо удалить сингулярное слагаемое $h^2W^{j2}(\xi)$, т. е. ограничиться двумя членами асимптотики и тем самым понизить точность разложения. Отметим, что согласно [20] дифференцирование кусочно-гладких данных краевых условий приводит к образованию δ-функций Дирака, не указанных явно в (4.11). Из анализа поведения решения $W^{j2}(\xi)$ при $\xi \to \xi^{0\pm}$ следует, что точность $o(h^2)$ разложения (4.6) сохраняется вне фиксированной окрестности точки $\xi = (-l, 0)$, т. е. пограничный слой вблизи вершин $\xi^{h\pm}$ “почти развернутых” углов оказывает лишь опосредованное влияние на члены асимптотик

$$M_{jk}(l, hH) = M^0_{jk} + hM^1_{jk} + h^2M^2_{jk} + \ldots \text{ —} \tag{4.12}$$

коэффициенты в разложении (4.5) на бесконечности. Тем не менее точность асимптотических конструкций без учета пограничных слоев приемлема для достижения основной цели данной работы.

Определим члены W^{jp}. Подставив (4.6) и (4.12) в соотношение (4.5), в силу (2.10) получаем

$$W^{j0}(\xi) = X^j(\xi) - lm_{jj}Y^j(\xi) + \sum_{k=1}^{2} M^0_{jk}Y^k(\xi) + O(|\xi|^{-1}). \tag{4.13}$$

Очевидно, что решение однородных уравнений равновесия в $\mathbb{R}^2 \setminus \Lambda_0$ с краевыми и асимптотическими условиями (4.9) и (4.13) имеет вид $W^{j0}(\xi) = X^j(\xi)$, поэтому верны равенства

$$M^0_{jj} = lm_{jj}, \quad j = 1, 2, \qquad M^0_{12} = M^0_{21} = 0. \tag{4.14}$$

Для следующего члена W^{j1} вытекающее из (4.5) асимптотическое представление имеет вид

$$W^{j1}(\xi) = H(l)\,\frac{\partial X^j}{\partial \xi_2}(\xi) + \sum_{k=1}^{2} M^1_{jk}Y^k(\xi) + O(|\xi|^{-1}). \tag{4.15}$$

Краевые условия (4.10) при $k = 2$ однородные (имеют нулевые правые части), так как X^j — решение однородной упругой задачи на плоскости с полубесконечным разрезом и, следовательно, $\sigma_{12}(X^j;\xi_1,\pm 0) = 0$, $\xi_1 < 0$. В [2] проверено, что

$$\sigma_{11}(X^1;\xi_1,\pm 0) = 0, \qquad \sigma_{11}(X^2;\xi_1,\pm 0) = \pm\sigma^0_{11}r^{-1/2} \neq 0, \qquad \xi_1 < 0. \tag{4.16}$$

Итак, в случае $j = 1$ оба краевых условия (4.10) являются однородными. В силу формулы (2.11) соотношение (4.15) преобразуется в следующее:

$$W^{11}(\xi) = m_{11}H(l)Y^2(\xi) + \sum_{k=1}^{2} M^1_{1k}Y^k(\xi) + O(|\xi|^{-1}) = O(|\xi|^{-1/2}). \tag{4.17}$$

Исчезающее на бесконечности решение однородной задачи теории упругости тривиально, т. е. $W^{11}(\xi) = 0$. В силу разложения (4.17) получаем

$$M^1_{11} = 0, \qquad M^1_{12} = M^1_{21} = -m_{11} H(l). \tag{4.18}$$

Из второй формулы в (4.16) следует, что в случае $H'_l(-l) \neq 0$ при $j = 2$, $k = 1$ правая часть краевого условия (4.10) претерпевает разрыв в точке $\xi_1 = -l$, поэтому построение члена W^{22} затруднено. Как и в работе [2], можно проверить, что $M^1_{22} = 0$, однако далее это равенство не потребуется.

Осталось рассмотреть член W^{12}. Из формул (4.5), (4.11), (2.10) и соотношений $W^{10} = X^1$, $W^{11} = 0$ получаем

$$W^{12}(\xi) = \sum_{k=1}^{2} M^2_{1k} Y^k(\xi) + O(|\xi|^{-1}), \qquad |\xi| \to \infty,$$

$$\sigma_{22}(W^{12}; \xi_1, \pm 0) = 0,$$

$$\sigma_{21}(W^{12}; \xi_1, \pm 0) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \Big(H_l(\xi_1)^2 \sigma_{11}\Big(\frac{\partial X^1}{\partial \xi_2}; \xi_1, \pm 0\Big)\Big) =$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{m_{11}}{m_{22}} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \Big(H_l(\xi_1)^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \sigma_{11}(X^2; \xi_1, \pm 0)\Big), \qquad \xi_1 < 0.$$

Повторим вычисления, приведшие к (3.9), используя формулу Грина в области $\Omega_R \setminus \Lambda_0$. Тогда с учетом нормировки (2.9) получим

$$M^2_{1k} = q(X^2, W^{12}; \Gamma_R) = \lim_{R \to \infty} \sum_{\pm} \int_{-R}^{0} X^k_2(\xi_1, \pm 0)\, \sigma_{21}(W^{12}; \xi_1, \pm 0)\, d\xi_1 = 0, \qquad k = 1, 2. \tag{4.19}$$

Равенство (4.19) получено с использованием соотношений, доказанных в [2] и аналогичных формулам (4.16):

$$X^1_2(\xi_1, \pm 0) = 0, \qquad X^2_2(\xi_1, \pm 0) = \pm X^{20}_2 r^{1/2} \neq 0, \qquad \xi_1 < 0.$$

Из результатов работы [7] и выполненного анализа членов W^{jp} асимптотического представления (4.6) следует, что погрешность в определении коэффициентов $M_{11}(l, hH)$, $M_{12}(l, hH) = M_{21}(l, hH)$ разложений (4.5) составляет $O(h^3)$, погрешность в определении коэффициента $M_{22}(l, hH)$ — $O(h^2(1 + |\ln h|))$.

5. Применение критерия Гриффитса. Согласно формулам (2.7), (3.10), (4.1), (4.12), (4.14), (4.18), (4.19) имеем

$$\Delta T^l = \Delta U^l + \Delta S^l = 2\Big(\gamma(0) - \frac{1}{4} m_{11} C_1(l)^2 - \frac{h^2}{4} m_{22} \overline{C}_2(l)^2\Big) l +$$
$$+ h^2 \Big((\gamma(0) + \gamma''(0)) \int_0^l \Big|\frac{dH}{dx_1}(x_1)\Big|^2 dx_1 + m_{11} H(l) C_1(l) \overline{C}_2(l)\Big) + O(h^3). \tag{5.1}$$

При глобальной формулировке энергетического критерия разрушения следует минимизировать выражение (5.1). Все параметры, за исключением функции H, описывающей форму трещины (2.1), известны. Из уравнения Эйлера для функционала

$$(\gamma(0) + \gamma''(0)) \int_0^l \Big|\frac{dH}{dx_1}(x_1)\Big|^2 dx_1 + m_{11} H(l) C_1(l) \overline{C}_2(l) \tag{5.2}$$

на множестве функций H из соболевского класса $W_2^1(0,l)$, удовлетворяющих условию

$$H(0)=0, \tag{5.3}$$

следуют дифференциальные равенства

$$-\frac{d^2H}{dx_1^2}(x_1)=0, \quad x_1\in(0,l), \qquad \frac{dH}{dx_1}(l)=-\frac{1}{2}\,(\gamma(0)+\gamma''(0))^{-1}m_{11}C_1(l)\overline{C}_2(l). \tag{5.4}$$

Решение смешанной краевой задачи (5.4), (5.3) очевидно:

$$H(x_1)=-(1/2)(\gamma(0)+\gamma''(0))^{-1}m_{11}C_1(l)\overline{C}_2(l)x_1, \tag{5.5}$$

однако физическая интерпретация результата затруднена, так как форма трещины (2.1), (5.5) определена только КИН $C_i(l)$ и не учитывает предысторию нагружения. В частности, в случае $C_1(\lambda)C_2(\lambda)\neq C_1(l)C_2(l)$ при $\lambda<l$ трещина Λ_λ не ложится на трещину Λ_l, так как отросток $\Lambda_\lambda\setminus\Lambda_0$ направлен под углом к оси абсцисс, отличным от угла, под которым направлен отросток $\Lambda_l\setminus\Lambda_0$. Вместе с тем трещина не может изменить путь, так как процесс разрушения необратим. Обнаруженное противоречие означает, что глобальная формулировка энергетического критерия разрушения, приводящая к задаче о минимуме квадратичного функционала (5.2), не является адекватной процессу искривления трещины под действием переменной нагрузки.

Рассмотрим локальный критерий Гриффитса. В качестве параметра τ примем приращение l длины проекции трещины на ось абсцисс. Сравним положения трещины в моменты $\tau=l$ и $\tau+\Delta\tau=l+\Delta l$ ($l^{-1}\Delta l$ — малое положительное число). В силу формулы (5.1), записанной для значений l и $l+\Delta l$, приращение полной энергии на промежутке $(\tau,\tau+\Delta\tau)$ равно

$$\Delta T=2\Big(\gamma(0)-\frac{1}{4}\,(m_{11}C_1(l)^2-h^2m_{22}\overline{C}_2(l)^2)-\frac{l}{2}\,\frac{d}{dl}\,(m_{11}\,C_1(l)^2-h^2m_{22}\overline{C}_2(l)^2)\Big)\Delta l+$$
$$+h^2\Big((\gamma(0)+\gamma''(0))\Big|\frac{dH}{dx_1}(l)\Big|^2+m_{11}\,\frac{dH}{dx_1}(l)\,C_1(l)\overline{C}_2(l)+m_{11}H(l)\,\frac{d}{dl}\,(C_1(l)\,\overline{C}_2(l))\Big)\Delta l+$$
$$+O(h^3+\Delta l^2). \tag{5.6}$$

Выражение (5.6) зависит от параметров материала m_{11}, m_{22}, $\gamma(0)$, от КИН $C_i(l)$ и скоростей их изменения, а также от величин $H(l)$ и $(dH/dx_1)(l)$, характеризующих положение вершины трещины и угол ее отклонения от оси абсцисс (ср. с определением (2.1)). В момент $\tau=l$ все данные задачи, за исключением производной $(dH/dx_1)(l)$, зафиксированы, а минимум квадратичной функции

$$\frac{dH}{dx_1}(l)\mapsto(\gamma(0)+\gamma''(0))\,\Big|\frac{dH}{dx_1}(l)\Big|^2+m_{11}\,\frac{dH}{dx_1}(l)\,C_1(l)\overline{C}_2(l)$$

достигается при

$$\frac{dH}{dx_1}(l)=-\frac{1}{2}\,(\gamma(0)+\gamma''(0))^{-1}m_{11}C_1(l)\overline{C}_2(l). \tag{5.7}$$

Решение задачи Коши (5.7), (5.3) задано равенством

$$H(x_1)=-\frac{1}{2}\,(\gamma(0)+\gamma''(0))^{-1}m_{11}\int\limits_0^{x_1}C_1(l)\overline{C}_2(l)\,dl. \tag{5.8}$$

Форма трещины (2.1), (5.8) зависит от полной истории нагружения. После исключения параметра h из формул (2.1), (2.7), (5.8) уравнение траектории трещины принимает вид

$$x_2 = -\frac{1}{2}\,(\gamma(0) + \gamma''(0))^{-1} m_{11} \int\limits_0^{x_1} C_1(l) C_2(l)\,dl \qquad (5.9)$$

в предположении малости отношения КИН $C_2(l)/C_1(l)$. Если $C_2(l) = 0$ при $l \in (0, l^0)$, то трещина Λ_{l0} остается прямолинейной.

Подставив формулы (5.9) и (2.7) в соотношение (5.6), находим скорость высвобождения полной энергии при росте искривленной трещины:

$$-\frac{dT}{dl}(l) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dl}\,\big(l(m_{11}C_1(l)^2 + m_{22}C_2(l)^2)\big) - 2\gamma(0) +$$

$$+ \frac{1}{4}\,\frac{m_{11}^2}{\gamma(0) + \gamma''(0)}\,\Big\{C_1(l)^2 C_2(l)^2 + 2\int\limits_0^l C_1(\lambda) C_2(\lambda)\,d\lambda\,\frac{d}{dl}\,(C_1(l)C_2(l))\Big\} + O(h^3). \qquad (5.10)$$

При гипотетически прямолинейном распространении трещины под действием смешанной нагрузки скорость высвобождения полной энергии вычисляется без ограничений на КИН второй моды:

$$-\frac{dT}{dl}(l) = -\frac{dS}{dl}(l) - \frac{\partial U}{\partial l}(l) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dl}\,\big(l(m_{11}C_1(l)^2 + m_{22}C_2(l)^2)\big) - 2\gamma(0). \qquad (5.11)$$

Формула (5.11) совпадает с классической формулой Гриффитса при постоянных КИН $C_i(l)$. В выражении (5.10) присутствует дополнительное слагаемое следующего порядка малости по сравнению с $m_{11}C_1(l)^2$. Это слагаемое появляется вследствие искривления трещины и зависит от скорости изменения нагружения (производная по l) и его предыстории (интеграл по λ). Обе зависимости легко предсказуемы. Во-первых, приращение потенциальной энергии деформации вызвано не только ростом трещины, но и вариацией нагрузки (см., например, [21]). Во-вторых, формулы (5.1) и (5.6) содержат суммарное отклонение $hH(l)$ вершины трещины Λ_l от оси абсцисс, которое определяется всем процессом нагружения.

Если КИН $C_2(\lambda)$ тождественно не равен нулю на интервале $(0, l)$, то в (5.10) выражение в фигурных скобках не обязательно положительное. Таким образом, скорость высвобождения энергии (5.11) может превышать скорость (5.10), однако это не обусловливает прямолинейное развитие трещины, поскольку она уже искривлена, и использовать формулу (5.11) нельзя.

Рассмотрим множитель $(\gamma(0) + \gamma''(0))^{-1}$ в соотношениях (5.8)–(5.10), отражающий анизотропию прочностных свойств материала. Если направлению $\theta = 0$ соответствует минимум плотности поверхностной энергии $\gamma(\theta)$ (напомним, что $\gamma'(0) = 0$ по предположению), то $\gamma''(0) > 0$, а значит, по сравнению со случаем прочностной изотропии траектория уплощается и критическая нагрузка возрастает. Если $\theta = 0$ — точка максимума плотности γ, то кривизна графика увеличивается и критическая нагрузка падает. Кроме того, формулы (5.8)–(5.10) теряют смысл при $\gamma''(0) = -\gamma(0)$ (например, $\gamma(\theta) = \cos\theta + O(|\theta|^3)$). Иными словами, быстрое уменьшение поверхностной энергии при возрастании угла $|\theta|$ обусловливает резкое отклонение трещины от оси абсцисс, и асимптотический анализ, выполненный в п. **4**, становится неправомерным.

Принятое в п. **2** предположение о том, что в любой момент τ нагрузка критическая и трещина равновесная, означает, что $dT/dl = 0$ при всех $l \geqslant 0$. Согласно формуле (5.10) это условие накладывает ограничение на величины КИН. Одна из возможных ситуаций — постоянные критические КИН $C_1(l) = C_1(0)$ и $C_2(l) = C_2(0)$, при которых асимптотическая модель критерия Гриффитса предсказывает развитие трещины вдоль луча под углом

$-\operatorname{arctg}((\gamma(0)+\gamma''(0))^{-1}m_{11}C_1(0)C_2(0)/2)$ к ее первоначальному направлению. Если постоянен КИН $C_2(l)=C_2(0)\neq 0$ второй моды, то КИН $C_1(l)$ первой моды находится из задачи Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Y''(l)Y(l)+Y'(l)^2/2+m_{11}^{-1}(\gamma(0)+\gamma''(0))C_2(0)^{-2}(Y'(l)^2+2lY''(l)Y'(l)) = \\ = m_{11}^{-2}(4\gamma(0)C_2(0)^{-2}-m_{22}), \quad l>0, \qquad Y(0)=0$$

относительно неизвестной

$$Y(l)=\int_0^l C_1(\lambda)\,d\lambda.$$

Последняя формула позволяет восстановить КИН.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Назаров С. А.** Направление роста трещины по критерию Новожилова // Докл. РАН. 2004. Т. 396, № 5. С. 620–623.
2. **Назаров С. А.** Коэффициенты интенсивности напряжений и условия девиации трещины в хрупком анизотропном теле // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 3. С. 98–107.
3. **Назаров С. А., Шпековиус-Нойгебауер М.** О погрешностях при аппроксимации неограниченных тел ограниченными // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 4. С. 650–663.
4. **Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.** О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd 76. S. 29–60.
5. **Назаров С. А.** Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 3. С. 489–502.
6. **Bueckner H. F.** A novel principle for the computation of stress intensity factor // Z. angew Math. Mech. 1976. Bd 50. S. 529–546.
7. **Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.** Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000. V. 1.
8. **Морозов Н. Ф., Назаров С. А.** О напряженно-деформированном состоянии в окрестности трещины, упирающейся в зерно // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. Вып. 13. С. 141–148.
9. **Назаров С. А., Полякова О. Р.** Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные расширения оператора Ламе // Тр. Моск. мат. о-ва. 1996. Т. 57. С. 16–75.
10. **Назаров С. А.** Тензор и меры поврежденности. 1. Асимптотический анализ анизотропной среды с дефектами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 3. С. 113–124.
11. **Аргатов И. И., Назаров С. А.** Высвобождение энергии при изломе трещины в плоском анизотропном теле // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, № 3. С. 502–514.
12. **Баничук Н. В.** Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 2. С. 130–137.
13. **Cotterell B., Rice J. R.** Slightly curved or kinked cracks // Intern. J. Fracture. 1980. V. 16. P. 155–169.
14. **Мовчан А. Б., Назаров С. А., Полякова О. Р.** Искривление траектории при квазистатическом росте трещины в плоскости с малым дефектом // Исследования по упругости и пластичности. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 1999. Вып. 18. С. 142–161.

15. **Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.** Плоская задача о криволинейных трещинах в твердом теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 3. С. 69–82.
16. **Amestoy M., Leblond J. B.** Crack path in plane situations. 2. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors // Intern. J. Solids Struct. 1992. V. 29, N 4. P. 465–501.
17. **Мовчан Н. В., Назаров С. А.** Напряженно-деформированное состояние вблизи вершин тупых и острых конусов // Прикладная механика. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 1997. Вып. 10. С. 74–88.
18. **Мазья В. Г., Назаров С. А.** Парадоксы предельного перехода в решениях краевых задач при аппроксимации гладких областей многоугольными // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 6. С. 1156–1177.
19. **Назаров С. А., Олюшин М. В.** Приближение гладких контуров многоугольными. Парадоксы в задачах для системы Ламе // Изв. РАН. Сер. мат. 1997. Т. 61, № 3. С. 159–186.
20. **Назаров С. А.** Инвариантные интегралы в модели трещины Леонова — Панасюка — Дагдейла // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 147–155.
21. **Назаров С. А.** Взаимодействие трещин при хрупком разрушении. Силовой и энергетический подходы // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, № 3. С. 484–496.

Поступила в редакцию 17/XI 2005 г.