т. е. обычный обобщенный закон Гука, где

$$\lambda = \frac{a+b}{15}, \quad \mu = \frac{2a+3b}{30} \tag{13}$$

На основании известных формул связи коэффициентов Ламе с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν получим

$$E = \frac{a}{3}\left[\frac{2a+3b}{4a+b}\right], \quad \nu = \frac{a-b}{4a+b} \tag{14}$$

Отсюда вытекает

$$a = \frac{3E}{1-2\nu} = 3K \tag{15}$$

Здесь K — модуль объемного сжатия.

Пусть в опыте на одноосновное растяжение замерено предельное сопротивление разрушению $\sigma = \sigma_{\text{Н}}$, а теоретическое усилие, подсчитанное по условиям отрыва атомных плоскостей, равно $\sigma_{\text{Т}}$. Максимальные отрывающие усилия испытывают атомные плоскости, перпендикулярные к направлению растяжения. В силу соотношений (6)

$$\sigma_{nn} = \sigma_{\text{Т}} = a\varepsilon_{nn} = a\varepsilon \tag{16}$$

где ε — осевая деформация. С другой стороны, $\varepsilon = \sigma_0/E$; но тогда на основании формулы (16) имеем

$$\sigma_{\text{Н}} = 3(1-2\nu)\,\sigma_{\text{Т}} \tag{17}$$

Из этого следует, что при приближении v к 1/2 (несжимаемое тело) наблюдаемое усилие разрушения может быть много меньше теоретического. Хотя это и нельзя считать (в силу несимметрии примененного метода относительно напряжений и деформаций) новым объяснением резкого различия между теоретическим и наблюдаемым усилиями разрушения, однако надо более критично подходить к существующим расчетам теоретического усилия в отношении учета не совпадающих с направлением отрыва взаимодействий.

Поступила
18 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Batdorf S. B. and Budiansky B. A Mathematical Theory of Pfasticity Based on the Concept of Slip. NACA Technical Notes, No. 1871, April, 1949.

ОБ ОБЩИХ СООТНОШЕНИЯХ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Л. В. Ершов, В. Н. Телиянц
(Москва)

Применение метода малого параметра для плоской задачи по теории малых упруго-пластических деформаций [1] рассмотрено в работе [2]. Ниже этим методом изучается осесимметричная задача.

Воспользуемся цилиндрическими безразмерными координатами ρ, θ, ξ.

Приведем основные обозначения: δ — безразмерный малый параметр; σ_ρ, σ_θ, σ_ξ, $\tau_{\rho\xi}$ — компоненты напряжений; e_ρ, e_θ, e_ξ, $e_{\rho\xi}$ — компоненты деформаций; u, w — перемещения в направлении радиуса ρ и оси ξ соответственно; σ_i — интенсивность напряжений; e_i — интенсивность деформаций. Зависимость между σ_i и e_i принимается в виде $\sigma_i = Ae_i^m$.

В качестве нулевого приближения берется решение упруго-пластической осесимметричной задачи при плоском деформированном состоянии, материал предполагается несжимаемым.

Если a и b — радиусы цилиндрической трубы и p — внутреннее давление, то

$$\sigma_\rho^\circ = -p\frac{\alpha^{2m}(1-\rho^{2m})}{\rho^{2m}(1-\alpha^{2m})}, \qquad \sigma_\theta^\circ = p\frac{\alpha^{2m}[(2m-1)+\rho^{2m}]}{\rho^{2m}(1-\alpha^{2m})} \tag{1}$$

$$\sigma_\xi^\circ = \frac{1}{2}(\sigma_\rho^\circ + \sigma_\theta^\circ), \qquad \tau_{\rho\xi}^\circ = 0, \qquad u^\circ = -\frac{c}{\rho}, \qquad w^\circ = 0$$

Здесь

$$c^m = \frac{3m}{2A}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{m-1} \frac{p\alpha^{2m}}{1-\alpha^{2m}}, \qquad \alpha = \frac{a}{b}, \quad \rho = \frac{r}{b}, \quad \xi = \frac{z}{b}$$

(r, θ, z — размерные цилиндрические координаты). Для решения осесимметричных задач теории малых упруго-пластических деформаций используются уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + \frac{\partial \tau_{\rho\xi}}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\rho\xi}}{\partial \rho} + \frac{\tau_{\rho\xi}}{\rho} = 0 \tag{2}$$

законы активной пластической деформации-

$$\sigma_\rho - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_\rho, \qquad \sigma_\theta - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_\theta, \qquad \sigma_\xi - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_\xi, \qquad \tau_{\rho\xi} = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{\rho\xi} \tag{3}$$

причем

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_\xi)$$

Граничные условия

$$\sigma_\rho \cos(n\rho) + \tau_{\rho\xi} \cos(n\xi) = q_\rho, \qquad \tau_{\rho\xi}\cos(n\rho) + \sigma_\xi \cos(n\xi) = q_\xi \tag{4}$$

Здесь n — внешняя нормаль к контуру.

Решение задачи будем искать в виде рядов по степеням параметра δ

$$\sigma_\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \sigma_\rho^{(k)}, \qquad \sigma_\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \sigma_\theta^{(k)}, \qquad \sigma_\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \sigma_\xi^{(k)}$$

$$\tau_{\rho\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \tau_{\rho\xi}^{(k)}, \qquad u = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k u^{(k)}, \qquad w = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k w^{(k)} \quad \text{и т. д.} \tag{5}$$

Компоненты k приближения удовлетворяют уравнениям (2) в силу их линейности.

Выберем функцию $\psi^{(k)}$ так, чтобы

$$u^{(k)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \xi}, \qquad w^{(k)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \rho}$$

Тогда условие несжимаемости материала будет удовлетворено.

Компоненты деформаций k-го приближения при этом примут вид

$$e_\rho^{(k)} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \rho \partial \xi}, \qquad e_\theta^{(k)} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \xi} \tag{6}$$

$$e_\xi^{(k)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \rho \partial \xi}, \qquad e_{\rho\xi}^{(k)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi^2}$$

Подставляя разложения (5) в соотношения (3) и учитывая (6), получим

$$\sigma_\rho^{(k)} = \sigma^{(k)} + \frac{B}{\rho^{2m}} \left[2m \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \xi} - (m+1)\rho \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \rho \partial \xi} \right] + f_1^{(k-1)}$$

$$\sigma_\theta^{(k)} = \sigma^{(k)} - \frac{B}{\rho^{2m}} \left[2m \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \xi} - (m-1)\rho \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \rho \partial \xi} \right] + f_2^{(k-1)} \tag{7}$$

$$\sigma_\xi^{(k)} = \sigma^{(k)} + \frac{2B}{\rho^{2m}} \rho \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \rho \partial \xi} + f_3^{(k-1)} \quad \left[B = \frac{A}{3}\left(\frac{2c}{\sqrt{3}}\right)^{m-1} \right]$$

$$\tau_{\rho\xi}^{(k)} = \frac{B}{\rho^{2m}} \left[\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi^2} \right] + f_4^{(k-1)}$$

Здесь $f_1^{(k-1)}$, $f_2^{(k-1)}$, $f_3^{(k-1)}$, $f_4^{(k-1)}$ — функции, зависящие от компонент не выше приближения $(k-1)$.

Подставляя (7) в (2) и исключая из двух уравнений $\sigma^{(k)}$, нетрудно получить уравнение для определения функции $\psi^{(k)}(\rho, \xi)$

$$\frac{2m^2+m-1}{\rho}\frac{\partial^3\psi^{(k)}}{\partial\rho\partial\xi^2}-(m+1)\frac{\partial^4\psi^{(k)}}{\partial\rho^2\partial\xi^2}-\frac{\partial^4\psi^{(k)}}{\partial\xi^4}+\frac{4m^2-1}{\rho^3}\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial\rho}-$$
$$-\frac{4m^2-1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi^{(k)}}{\partial\rho^2}+\frac{4m-2}{\rho}\frac{\partial^3\psi^{(k)}}{\partial\rho^3}-\frac{\partial^4\psi^{(k)}}{\partial\rho^4}=\Phi^{(k-1)} \quad (8)$$

Здесь $\Phi^{(k-1)}$ — функция, зависящая от компонент не выше приближения $(k-1)$, для первого приближения $\Phi^{(k-1)}$ равно нулю.

Уравнение контура зададим в виде

$$\rho=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k\rho_k(\xi)$$

Выражения линеаризированных граничных условий для осесимметричной задачи приведены в работе [3].

Рассмотрим решение уравнения (8) для первого приближения. Положим $\psi^{(1)}(\rho,\xi)=\varphi(\rho)\cos\lambda\xi$, тогда для определения функции $\varphi(\rho)$ из (8) получим

$$\frac{d^4\varphi}{d\rho^4}-\frac{4m-2}{\rho}\frac{d^3\varphi}{d\rho^3}+\left[\frac{4m^2-1}{\rho^2}-\lambda^2(m+1)\right]\frac{d^2\varphi}{d\rho^2}+$$
$$+\left[-\frac{4m^2-1}{\rho^3}+\lambda^2\frac{2m^2+m-1}{\rho}\right]\frac{d\varphi}{d\rho}+\lambda^4\varphi=0 \quad (9)$$

Следуя А. Ю. Ишлинскому [4], уравнение (5) можно представить в виде

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1-2m}{\rho}\frac{d}{d\rho}+\nu^2\right)\left(\varphi''+\frac{1-2m}{\rho}\varphi'+\bar{\nu}^2\varphi\right)=0 \quad (10)$$

причем

$$\nu^2=-\frac{\lambda^2}{2}\left[(m+1)+i\sqrt{(3+m)(1-m)}\right]$$
$$\bar{\nu}^2=-\frac{\lambda^2}{2}\left[(m+1)-i\sqrt{(3+m)(1-m)}\right]$$

Тогда решение уравнения (9) запишется

$$\varphi(\rho)=\rho^m\left[\bar{C}_1I_m(\nu\rho)+C_1I_m(\bar{\nu}\rho)+\bar{C}_2N_m(\nu\rho)+C_2N_m(\bar{\nu}\rho)\right]$$

Здесь $I_m(x)$, $N_m(x)$ — соответственно функции Бесселя и Неймана m-го порядка, C_i и $\bar{C}_i$ — сопряженные постоянные.

В ряде случаев необходимо знать полиномиальные решения уравнения (8). Для этого уравнения имеют место решения

$$\psi_0=A_0,\qquad \psi_1=A_1\xi,\qquad \psi_2=A_2\xi^2+A_3\rho^2,\qquad \psi_3=A_4\rho^2\xi+A_5\xi^3$$
$$\psi_4=A_6\xi^4+\left[\frac{3}{m^2-1}A_6+\frac{4(m-2)}{m+1}A_7\right]\xi^2\rho^2+A_7\rho^4,\ldots$$

а также некоторые другие, например использованные в работе [5]. Полученные общие соотношения позволяют рассмотреть ряд задач устойчивости и равновесия осесимметричных тел, материал которых подчиняется законам малых упруго-пластических деформаций.

Поступила
22 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехтеоретиздат, 1948.
2. Ивлев Д. Д. Приближенное решение задач теории малых упруго-пластических деформаций. ДАН СССР, 1957, т. 113, № 3.
3. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. О приближенном решении осесимметричных упруго-пластических задач методом малого параметра. Вест. МГУ, 1958, № 2.
4. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязко-пластического течения полосы и круглого прута. ПММ, 1943, т. VII, вып. 2.
5. Ершов Л. В. Упруго-пластическое состояние конической и искривленной труб. Вестн. МГУ, 1958, № 3.