ПМТФ, № 3, 1960

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКИ ГАЗА

С. В. Иорданский

(Москва)

Выводятся уравнения, описывающие среднее движение жидкости, содержащей большое количество мелких пузырьков газа. Рассматривается случай, когда необходимо учитывать «внутреннее» движение жидкости, связанное с движением и пульсациями пузырьков. В работе [1,2] приведены уравнения для осредненного движения такой жидкости, однако автор предполагал, что давление внутри пузырька и в жидкости одинаково, и только частично учитывал наличие движения пузырьков относительно жидкости. В настоящей работе проведен более последовательный вывод уравнений для среднего движения в случае малой концентрации пузырьков.

1. Будем предполагать, что характерный размер среднего движения L, среднее расстояние между пузырьками l и радиус пузырьков a удовлетворяют неравенствам

$$L \gg l \gg a \tag{1.1}$$

Не будем, однако, предполагать, что характерное время среднего движения обязательно велико по сравнению со временем затухания пульсаций или с их периодом.

Уравнения гидродинамики для всей жидкости в целом имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_k = 0, \qquad \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k + p\delta_{ik} - \sigma_{ik}) = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{v_k^2}{2} + \varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_k\left(\frac{v_i^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik} v_i) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial x_k}\right) = 0$$

В этих уравнениях, как и в дальнейшем, предполагается суммирование от 1 до 3 по одинаковым индексам; σ_{ik} — тензор вязких напряжений; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, ρ, v_i, p, T, ε — плотность, компоненты скорости, давление, температура и внутренняя энергия на единицу массы жидкости, δ_{ik} — символ Кронекера. Функции $\rho(p, T)$, $\varepsilon(p, T)$ различны для жидкости и газа внутри пузырьков. Произведем осреднение этих уравнений по некоторому объему V, который, согласно неравенству (1.1), можно выбрать таким, что, с одной стороны, он будет содержать большое количество пузырьков, а, с другой стороны,—средние характеристики движения жидкости внутри него практически не меняются.

Тогда для уравнения неразрывности будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\int\limits_V \rho dV = -\frac{1}{V}\int\limits_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} dV = -\frac{1}{V}\oint \rho v_i dS_i \tag{1.3}$$

Обозначим средние величины той же буквой, но с чертой вверху, и положим

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \; v_i = \bar{u}_i + v_i' \quad \left(\bar{\rho} = \frac{1}{V}\int\limits_V \rho dV, \; \bar{\rho}\,\bar{u}_i = \frac{1}{V}\int\limits_V \rho v_i dV\right)$$

так что

$$\overline{\rho'} = 0, \qquad \overline{\bar{\rho} v_i' + \rho' v_i'} = 0 \tag{1.4}$$

Пользуясь этими обозначениями, можно представить уравнение (1.3) в виде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\frac{1}{V} \oint (\bar{\rho}\, \bar{u}_i + \rho' \bar{u}_i + \bar{\rho} v_i' + \rho' v_i')\, dS_i \tag{1.5}$$

В правой части стоит точное выражение для потока вещества через поверхность S, ограничивающую объем V, которое зависит от положения этой поверхности относительно заданной конфигурации пузырьков. Однако нас такая микроструктура не интересует; кроме того, точные положения пузырьков неизвестны; поэтому для получения уравнений, описывающих «среднее» движение, произведем дополнительное усреднение, перемещая, например, поверхность S как целое, так что одна ее точка занимает все положения внутри объема V, для того чтобы избавиться от флуктуационных членов. Как нетрудно видеть, после такого усреднения уравнение (1.5), согласно (1.4), приобретает вид обычного уравнения неразрывности для средней плотности

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho}\, \bar{u}_i) \tag{1.6}$$

Пользуясь точно такой же процедурой, осредним уравнения Эйлера; после интегрирования по объему V имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}\, \bar{u}_i = -\frac{1}{V} \oint [\bar{\rho}\, \bar{u}_i\, \bar{u}_k + \bar{u}_i (\bar{\rho} v_k' + \rho' v_k') + \bar{u}_i \bar{u}_k \rho' + p\delta_{ik} -$$
$$- \sigma_{ik} + \bar{u}_k (\bar{\rho} v_i' + \rho' v_i') + \rho v_i' v_k']\, dS_k$$

Производя дополнительное осреднение и пользуясь (1.4), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}\, \bar{u}_i = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho}\, \bar{u}_i\, \bar{u}_k + \bar{p}\delta_{ik} + \overline{\rho v_i' v_i'} - \bar{\sigma}_{ik}) \tag{1.7}$$

Для того чтобы произвести осреднение уравнения энергии, положим

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \varepsilon' \qquad \left(\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\bar{\rho} V} \int\limits_V \rho\varepsilon dV, \qquad \overline{\rho' \varepsilon' + \bar{\rho}' \varepsilon'} = 0\right) \tag{1.8}$$

Интегрируя по объему V уравнение энергии и производя дополнительное осреднение, получим, учитывая (1.4), (1.8) и определения средних, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho}\, \bar{\varepsilon} + \bar{\rho}\, \frac{u_k^2}{2} + \rho \frac{\overline{v_k'^2}}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\rho} \bar{u}_i \left(\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{u}_k^2}{2} + \frac{\overline{v_k'^2}}{2}\right) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{v_i' \bar{p} + p' v_i'}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{u}_k \rho v_k' v_i' - \bar{u}_i \overline{\rho' \frac{v_k'^2}{2}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\rho v_i' \frac{v_k'^2}{2}} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(\rho' v_i' \varepsilon' + \bar{\rho} v_i' \varepsilon')} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\sigma}_{ik} \bar{u}_k + \sigma_{ik} v_k' + \overline{\sigma_{ik}' v_k'} + \overline{\varkappa \frac{\partial T}{\partial x_i}}\right) \tag{1.9}$$

Уравнения (1.6), (1.7) и (1.9) описывают среднее движение жидкости в целом. Однако для замыкания этой системы уравнений нужно знать средние от штрихованных величин и, кроме того, две зависимости между $\bar{\varepsilon}$, $\bar{p}$, $\bar{\rho}$, $\bar{T}$.

2. Воспользуемся условием (1.1) для замыкания полученной системы уравнений. Для этого будем учитывать влияние пузырьков лишь в первом порядке по их концентрации, т. е. лишь в первом порядке по a^3 / l^3. В этом случае при вычислении движения отдельного пузырька можно полагать различные величины, характеризующие течение вдали от пу-

зырька, равными своим средним значениям (или отличающимися от них на величину порядка a^3 / l^3, a / L), и затем вычислить средние от штрихованных величин, предполагая, что все отклонение от средних складывается из отдельных движений вокруг каждого пузырька. Таким образом, взаимодействие между пузырьками заменяется взаимодействием со средним полем течения жидкости. Произвести оценку пределов применимости подобного приближения довольно затруднительно, однако очевидно существование достаточно малых a / l, l / L, при которых оно будет справедливо. Отметим также, что такое приближение аналогично использующемуся при вычислении коэффициента вязкости суспензий [3].

При рассмотрении движения пузырька можно выделить два предельных случая. Первый случай — случай малых чисел Рейнольдса, когда для описания движения пузырька можно использовать линейное приближение Стокса. Мы не будем здесь останавливаться на этом случае, отметим только, что результаты работы [1,2] могут быть справедливыми только для этого случая при некоторых дополнительных предположениях. Пренебрегая несферичностью пузырька, можно в этом случае, используя известные решения, получить уравнения для радиуса пузырька $a(t)$ и положения его центра $R_i(t)$.

Разберем другой предельный случай — случай больших чисел Рейнольдса, когда, вообще говоря, влияние пульсаций более существенно. Пульсации происходят достаточно быстро, так что действие вязких сил проявляется только за большое число колебаний. Условием применимости такого подхода является требование, чтобы $\omega a^2/\nu \gg 1$, где ω — частота пульсаций, ν — кинематическая вязкость, a — радиус пузырька. Так как обычно число Прандтля в жидкости $\eta c_p / \varkappa$ больше единицы, то это же условие обеспечивает малую передачу тепла от пузырька к жидкости ($\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, c_p — теплоемкость). Кроме того, будем предполагать, что скорость звука в жидкости между пузырьками достаточно велика, так что длина звуковых волн, вызываемых движением пузырьков, значительно больше как радиуса пузырьков, так и расстояния между ними. Таким образом, мы можем провести рассмотрение движения пузырька в рамках теории идеальной несжимаемой жидкости. Движение жидкости можно считать потенциальным, кроме того, будем пренебрегать изменением формы пузырька, удовлетворяя граничному условию для давления только в среднем.

Таким образом, имеем уравнения

$$\triangle\varphi = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = F(t) \tag{2.1}$$

граничными условиями

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| = U_i, \qquad p = P \quad \text{при } \mathbf{r}\to\infty \tag{2.2}$$

(мы пишем здесь U_i, P вместо $\bar{u}_i$, $\bar{p}$, имея в виду, что они могут отличаться на малые в нашем приближении величины).

Удобно перейти к системе координат, движущейся со скоростью U_i. При этом мы можем пренебрегать зависимостью P, U_i от x_i из-за того, что движение жидкости, вызываемое движением пузырька, быстро затухает при удалении от него (величинами порядка a / L мы пренебрегаем), так что пространственные координаты входят в P, U_i как параметры.

В новой системе координат уравнения (2.1) запишутся в виде

$$\triangle\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = F(t) - \frac{\partial U_i}{\partial t} x_i \tag{2.3}$$

Легко, однако, видеть, что граничное условие (2.2) для p не может быть удовлетворено при любом стремлении $x_i \to \infty$ из-за наличия фиктивного «поля тяжести» $\partial U_i / \partial t$. Поэтому будем считать, что это условие удовлетворяется на «уровне» центра пузырька при бесконечном от него удалении (так что $(\partial U_i / \partial t) x_i = 0$). Таким образом, P как раз равняется «гидростатическому давлению» на «уровне» пузырька. Это предположение является справедливым, когда $a \ll l \ll L$, так как фактически нет необходимости слишком далеко уходить от пузырька (градиент «гидростатического» давления мал).

Итак, граничные условия на бесконечности имеют вид

$$\varphi \to 0 \quad \text{при } x_i \to \infty, \qquad p \to P \quad \text{при } x_i \to \infty, \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} x_i = 0 \tag{2.4}$$

Используя эти условия, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = -\frac{1}{\rho} p - \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} x_i \right) + \frac{1}{\rho} P \tag{2.5}$$

На поверхности пузырька, который предполагается сферическим, задана нормальная скорость

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = (\dot{a} + \dot{R}_i n_i) \tag{2.6}$$

где $\dot{R}_i$ — декартовы компоненты скорости центра пузырька, n_i — компоненты единичного вектора (начало координат в центре пузырька). Искомый потенциал скоростей φ, удовлетворяющий условиям (2.4), (2.6), дается выражением (см., например, [3])

$$\varphi = -\frac{\dot{a} a^2}{r} - \frac{a^3}{2} \frac{\dot{R}_i x_i}{r^3} \tag{2.7}$$

При помощи выражения (2.7) нельзя удовлетворить граничному условию: давление жидкости $p = p(a)$ при $r = a$, где $p(a)$ — давление газа внутри пузырька (движением газа мы пренебрегаем). Однако, пренебрегая несферичностью пузырька, можно потребовать выполнения этого условия в среднем на поверхности сферы

$$p(a) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p |_{r=a} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi \tag{2.8}$$

Отметим, что пузырек газа предполагается существующим заранее и не рассматривается процесс его образования (что, например, имеет место при кипении), и давление газа $p(a)$ внутри пузырька вычисляется с помощью соответствующей адиабаты.

Вычисляя интеграл, стоящий в правой части (2.8), с помощью (2.5), (2.7) получим

$$p(a) = P + \frac{\rho}{a} \frac{d}{dt} (\dot{a} a^2) - \frac{\rho}{2} \left(\dot{a}^2 + \frac{1}{2} \dot{R}_i^2 \right) \tag{2.9}$$

Кроме этого уравнения, мы должны еще использовать уравнения движения пузырька как целого, с учетом всех действующих на него гидродинамических сил

$$M \frac{d\dot{R}_i}{dt} = F_i - M \frac{\partial U_i}{dt} \tag{2.10}$$

Здесь M — масса пузырька, предполагаемая постоянной (как уже отмечалось, процессы испарения и конденсации не рассматриваются). Полная сила $\mathbf{F}$, действующая на пузырек, равняется

$$F_i = -a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p n_i \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi = \frac{4\pi a^3}{3} \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} - \frac{d}{dt} \frac{2\pi a^3}{3} \dot{R}_i + \frac{4\pi a^2}{4} \dot{R}_i \dot{a} \tag{2.11}$$

(здесь использованы уравнения (2.5) и (2.7)). Таким образом, уравнения движения пузырька имеют вид

$$M\frac{d\dot{R}_i}{dt}=\frac{4\pi a^3\rho}{3}\frac{\partial U_i}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{2\pi a^3}{3}\dot{R}_i+\frac{4\pi a^2}{3}\dot{R}_i\dot{a}-M\frac{\partial U_i}{\partial t} \tag{2.12}$$

Отметим, что в полученных уравнениях для $\dot{R}_i$ и $\dot{a}$ можно произвести учет диссипации за счет вязкости посредством формулы для диссипации кинетической энергии в жидкости [3]

$$\dot{E}=-\frac{\eta}{2}\int\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2dV$$

(здесь $\dot{E}$ — диссипативная функция), используя выражение (2.7) для потенциала скоростей.

Уравнения (2.9) и (2.12) определяют изменение велечин $a(t)$ и $R(t)$, характеризующих движения пузырька. Удобнее, однако, пользоваться вместо уравнения (2.9) выражением для изменения кинетической энергии жидкости, которое легче всего получить непосредственно, не пользуясь (2.12) и (2.9)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{r\geqslant a}(\nabla\varphi)^2dV=-\oint\limits_{r=a}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2\right][\dot{a}+\dot{R}_kn_k]\,dS$$

Используя выражение (2.7) и определение $p(a)$ и F_i, получим

$$\frac{d}{dt}\rho\left(2\pi\dot{a}^2a^3+\frac{\pi a^3}{3}\dot{R}_k{}^2\right)=4\pi a^2\dot{a}\,[p(a)-P]-\dot{R}_kF_k+\frac{4\pi a^3}{3}\rho\frac{\partial U_k}{dt}\dot{R}_k$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\left(2\pi\dot{a}^2a^3+\frac{\pi a^3}{3}\dot{R}_k{}^2\right)+\frac{1}{2}M\dot{R}_k{}^2\right]=4\pi a^2\dot{a}\,[p(a)-P]+$$
$$+\frac{4\pi a^3}{3}\rho\frac{\partial U_k}{\partial t}\dot{R}_k+M\frac{\partial U_k}{\partial t}\dot{R}_k \tag{2.13}$$

Это уравнение можно использовать вместо (2.9).

В задаче об одном пузырьке как a, так и R_i являются функциями только от времени t, так как U_k и P не зависят от x_i, поэтому не возникает вопроса о том, что надо понимать под дифференцированием по времени в формулах (2.12), (2.13).

Однако для построения уравнений среднего движения нужно учитывать зависимость средних величин от x_i. Естественно считать, что производные по времени в (2.12), (2.13) берутся вдоль траекторий отдельных пузырьков. Выбор величин P, U остается пока неопределенным с точностью до некоторых малых величин.

3. Таким образом, каждый пузырек и сопровождающее его «внутреннее» движение жидкости полностью описывается величинами a и R_i. Произведем теперь замыкание системы уравнений (1.6), (1.7), (1.9), используя выражение (2.7) для потенциала штрихованных скоростей (вернее, сумму таких потенциалов для каждого пузырька). Будем считать, что число Рейнольдса для среднего движения так же велико, и соответствующие диссипативные члены в уравнениях будем опускать. Для простоты будем считать, что имеются пузырьки только одного сорта, а не набор различных сортов (обобщение тривиально — вместо одного члена появляются суммы или интегралы по пузырькам различных сортов).

Прежде всего вычислим $\bar{\rho}$ через p, a и число пузырьков в единице объема n. Будем считать, что давления не слишком велики, так что можно использовать акустическое приближение для плотности жидкости

$$\rho^0 \approx \rho^0(p_0) + \left.\frac{\partial \rho^0}{\partial p}\right|_{p=p_0}(p - p_0)$$

подставляя это выражение в определение $\bar{\rho}$, получим

$$\bar{\rho} = \left(1 - \frac{4\pi a^3 n}{3}\right)\rho^0(p_0) + \left.\frac{\partial \rho^0}{\partial p}\right|_{p_0}(\bar{p} - p_0) + \left.\frac{\partial \rho^0}{\partial p}\right|_{p_0}\frac{4\pi a^3 n}{3}(p_0 - p(a)) + nM$$

или

$$\bar{\rho} = \left(1 - \frac{4\pi a^3 n}{3}\right)\rho^0(\bar{p}) + \left.\frac{\partial \rho^0}{\partial p}\right|_{p_0}\frac{4\pi a^3 n}{3}(\bar{p} - p(a)) + nM \qquad (3.1)$$

Это уравнение в некотором смысле эквивалентно уравнению состояния; при этом в нем, вообще говоря, наиболее существенным является первый член.

Кроме уравнения неразрывности (1.6), следует еще написать уравнение неразрывности для пузырьков

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}[(\bar{u}_i + \dot{R}_i)\, n] = 0 \qquad (3.2)$$

выражающее закон сохранения их числа.

В уравнениях Эйлера нам нужно вычислить среднее от произведения $\overline{\rho v_i' v_k'}$, причем $\overline{\rho v_i'} = 0$. Покажем, что можно при вычислении этого среднего считать, что поле скоростей v_i' складывается из поля скоростей вокруг каждого пузырька, находящегося в объеме V. Действительно, скорость в некоторой точке равняется, согласно принятому приближению,

$$v_i = U_i + v_{1i} \qquad \left(v_{1i} = \sum_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}\right)$$

Здесь φ_s — потенциал скоростей, вызываемый движением s-го пузырька, находящегося в объеме V (фактически мы должны разбить жидкость «на ящики» размером l^3 с пузырьком в центре и считать $\varphi_s \neq 0$ только внутри s-го ящика). Тогда

$$\overline{\rho u_i} = \bar{\rho} U_i + I_i \qquad \left(I_i = \frac{1}{V}\int_V \rho v_{1i}\, dV\right)$$

Здесь I_i — дополнительный средний импульс, связанный с движением пузырьков относительно жидкости. Вычисляя среднее, получим

$$\overline{\rho v_i v_k} = \bar{\rho} U_i U_k + \overline{\rho v_{1i}} U_k + \overline{\rho v_{1k}} U_i + \overline{\rho v_{1i} v_{1k}} =$$

$$= \bar{\rho} U_i \left(U_k + \frac{I_k}{\bar{\rho}}\right) + I_i U_k + \overline{\rho v_{1i} v_{1k}} =$$

$$= \overline{\rho u_i}\, \bar{u}_k + \overline{\rho v_{1i} v_{1k}} - \frac{I_i I_k}{\bar{\rho}} = \overline{\rho u_i}\, \bar{u}_k + \overline{\rho v_{1i} v_{1k}} + O(a^3 n)^2$$

Таким образом, можно считать приближенно $v_i' \approx v_{1i}$. В результате получим, пользуясь приближением несжимаемой жидкости,

$$\overline{\rho v_i' v_k'} = n\rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty} \left(\frac{d\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) r^2\, dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi + nM \dot{R}_k \dot{R}_i =$$

$$= nM \dot{R}_k \dot{R}_i + 4\pi\rho n \int_a^{\infty} \left\{\frac{\dot{a}^2 a^4}{r^4}\overline{n_i n_k} - \frac{3\dot{a} a^5}{r^5}\left(\dot{R}_l \overline{n_l n_i n_k} - \dot{R}_k \bar{n}_i - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \dot{R}_i \bar{n}_k\right) + \frac{a^6}{r^6}\left[\frac{9}{4}\dot{R}_j \dot{R}_l \overline{n_l n_j n_i n_k} - \frac{3}{4}\left(\dot{R}_l \dot{R}_i \overline{n_l n_k} + \dot{R}_l \dot{R}_k \overline{n_l n_i}\right) + \frac{1}{4}\dot{R}_i \dot{R}_k\right]\right\} r^2\, dr \qquad (3.3)$$

(мы здесь пренебрегаем малыми перекрестными членами вида $\partial\varphi_s/\partial x_i \times \times \partial\varphi_\sigma/\partial x_j$ и распространяем область интегрирования на все пространство, что можно сделать, не меняя порядка точности нашего приближения). Учитывая известные выражения для средних от произведений компонент единичного вектора, получим окончательно (3.4)

$$\overline{\rho v_i' v_k'} = \prod_{ik} = nM\dot{R}_k\dot{R}_i + \frac{4}{3}\pi a^3 n\rho^0(p_0)\left(\dot{a}^2 + \frac{3}{20}\dot{R}_l^2\right)\delta_{ik} + \frac{1}{15}\pi a^3 n\rho^0(p_0)\dot{R}_i\dot{R}_k$$

Таким образом, уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{\partial\overline{\rho u_i}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{\rho u_i}\bar{u}_k + \frac{4\pi a^3 n}{3}\rho^0(p_0)\left(\dot{a}^2 + \frac{3}{20}\dot{R}_l^2\right)\delta_{ik} + \right.$$
$$\left. + \left(nM + \frac{\pi}{15}a^3 n\rho^0(p_0)\right)\dot{R}_i\dot{R}_k\right] \qquad (3.5)$$

Уравнения (3.1), (3.2), (3.3), (1.6), (2.12), (2.13) и четыре уравнения, определяющие $\dot{R}_i$ и $\dot{a}$, образуют замкнутую систему уравнений для четырнадцати величин $\bar{\rho}$, n, $\bar{u}_i$, $\bar{p}$, a, R_i, $\dot{a}$, $\dot{R}_i$.

При адиабатических процессах уравнение энергии является следствием уравнений Эйлера и уравнения неразрывности. В рассматриваемом случае при использовании адиабаты для плотности жидкости и для газа внутри пузырьков полученная система уравнений также является замкнутой и нет необходимости в использовании уравнения энергии; однако из-за приближенного характера полученных уравнений может случиться, что закон сохранения энергии нарушается и поэтому требуется специальная проверка этого обстоятельства.

Вычислим изменение энергии для системы, описывающейся уравнениями (3.1)—(3.3), (1.6), (2.12), (2.13). Чтобы не усложнять выкладок, сделаем некоторые упрощения. Пренебрегая массой пузырьков и сжимаемостью жидкости в их объеме, примем, что средняя плотность

$$\bar{\rho} = \rho^0(\bar{p}) - \rho^0(p_0)\frac{4\pi a^3 n}{3}$$

Положим $U_i = \bar{u}_i$. Заметим, что в силу уравнения (3.2) уравнение (2.13) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}n(E + \varepsilon(a)) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\dot{R}_i + \bar{u}_i)n(E + \varepsilon(a)) -$$
$$- P\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{4\pi a^3 n}{3} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{u}_i + \dot{R}_i)\frac{4\pi a^3 n}{3}\right] - \frac{4\pi a^3 n}{3}\frac{\partial P}{\partial x_i}R_i \qquad (3.6)$$

где E — кинетическая энергия жидкости, связанная с движением пузырька, $\varepsilon(a)$ — внутренняя энергия газа в пузырьке; кроме того, здесь предполагалось, что дифференцирование в (2.13) производится вдоль траектории пузырька, и принято

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} \approx \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}$$

Пренебрегая сжимаемостью жидкости в объеме пузырьков и используя (3.4) получим для полной средней энергии

$$\overline{\rho\frac{v^2}{2} + \rho\varepsilon} = \frac{\bar{\rho}U_i}{2} + \overline{\rho U_i v_{1i}} + \frac{\overline{\rho v_{1i}^2}}{2} + \overline{\rho\varepsilon} =$$
$$= \frac{\bar{\rho}\bar{u}^2}{2} + \frac{\overline{\rho v_{1i}^2}}{2} - \frac{1}{2\bar{\rho}}I_i^2 + n\varepsilon(a) + \bar{\rho}\varepsilon^0(\bar{p}) \approx \bar{\rho}\frac{\bar{u}^2}{2} + En + n\varepsilon(a) + \bar{\rho}\varepsilon^0(\bar{p})$$

Здесь $\varepsilon^0(p)$ — внутренняя энергии единицы массы жидкости.

Производная по времени от полной средней энергии E^+ равняется

$$\frac{\partial E^+}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\overline{\rho u^2}}{2} + En + n\varepsilon(a) + \bar{\rho}\varepsilon^0(\bar{p})\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{\rho}\bar{u}_i\frac{\bar{u}_k{}^2}{2} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\dot{R}_i + \bar{u}_i)\, n\,(E + \varepsilon(a)) - \bar{u}_i\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} -$$

$$- P\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{4\pi a^3 n}{3} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{u}_i + \dot{R}_i)\frac{4\pi a^3 n}{3}\right] - \frac{\pi 4 a^3 n}{3}\dot{R}_i\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \varepsilon^0(\bar{p})\frac{\partial \overline{\rho u_i}}{\partial x_i} + \bar{\rho}\frac{\bar{p}}{\rho^0(\bar{p})}\frac{\partial \rho^0(\bar{p})}{\partial t}$$

Приведем это выражение к виду, сходному с обычным уравнением энергии для жидкости; для этого к правой части прибавим и вычтем величину $\bar{\rho}\bar{u}_i\partial\varepsilon^0(\bar{p})/\partial x_i$, после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial E^+}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\rho u_i}\left(\frac{\bar{u}_k{}^2}{2} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \varepsilon^0(\bar{p})\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\dot{R}_i + \bar{u}_i)\, n\,(\varepsilon(a) + E) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{4\pi a^3 n}{3}\dot{R}_i P\right) + \bar{p}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \bar{u}_i\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} - P\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{4\pi a^3 n}{3} + \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{u}_i\frac{4\pi a^3 n}{3}\right] +$$

$$+ \frac{\overline{\rho p}}{\rho^{02}(\bar{p})}\left[\frac{\partial \rho^0(\bar{p})}{\partial t} + u_i\frac{\partial \rho^0(\bar{p})}{\partial x_i}\right]$$

Для того чтобы показать, что недивергентные члены, нарушающие закон сохранения энергии, малы, вычтем из полученного выражения величину

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\left[\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\rho u_i}\right] = 0$$

В результате имеем

$$\frac{\partial E^+}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_i - P\frac{4\pi a^3 n}{3}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \bar{p}\left[\frac{\bar{\rho}}{\rho^{02}(\bar{p})} - \frac{1}{\bar{\rho}}\right]\frac{d\rho^0(\bar{p})}{dt} +$$

$$+ \bar{p}\left[\frac{\rho^0(p_0)}{\bar{\rho}} - 1\right]\frac{d}{dt}\frac{4\pi a^3 n}{3} + (\bar{p} - P)\frac{d}{dt}\frac{4\pi a^3 n}{3} - \bar{u}_i\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}$$

$$\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

Здесь через Φ_i обозначен вектор потока энергии, стоящий под знаком дивергенции, и используется акустическое приближение для плотности жидкости.

Легко видеть, что в выражении (3.5) члены, не стоящие под знаком дивергенции, являются малыми в принятом приближении; в них либо учитывается сжимаемость жидкости в объеме пузырьков, либо они содержат множитель $(a^3/l^3)^2$ или $(\bar{u}/c)^4$, где c — скорость звука в жидкости. Член $\bar{u}_i\partial\Pi_{ik}/\partial x_k$ также мал, так как содержит, как легко показать, кроме множителя a^3/l^3, еще и величину L в знаменателе. Поэтому можно, пользуясь неоднозначностью P, определить эту величину таким образом, чтобы недивергентные члены обращались в нуль, что приводит к отличию P от $\bar{p}$ на малые величины порядка a^3/l^3, u^2/c^2 и a/L, которыми можно пренебречь.

Таким образом, дифференцирование (2.12) и (2.13) вдоль траекторий пузырьков и специальный выбор P, U_i приводит к закону сохранения энергии, и вместо уравнения (2.13) можно использовать уравнение

(3.5) без членов, стоящих вне знака дивергенциии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{\rho}\frac{\bar{u}_k^2}{2} + \varepsilon(\bar{p})\bar{\rho} + nE + n\varepsilon(a)\right] = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{\rho u_i}\left(\frac{\bar{u}_k^2}{2} + \varepsilon^0(\bar{p}) + \frac{p}{\bar{\rho}}\right) + \right.$$

$$\left. + (\dot{R}_i + \bar{u}_i)\, n\,(\varepsilon(a) + E) + \frac{4\pi a^3 n}{3}\dot{R}_i\bar{p}\right] \qquad (3.7)$$

Выпишем теперь всю полученную систему уравнений, описывающих «среднее» движение жидкости, содержащей пузырьки газа, в принятом приближении

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\rho u_i} = 0, \qquad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\dot{R}_i + \bar{u}_i)n = 0$$

$$\frac{\partial\overline{\rho u_i}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho u_i}\bar{u}_k + \bar{p}\delta_{ik}) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{4\pi a^3 n}{3}\rho^0(p_0)\left(\dot{a}^2 + \frac{3}{20}\dot{R}_l^2\right)\delta_{ik} + \frac{\pi}{15}a^3 n\rho^0(p_0)\dot{R}_i\dot{R}_k\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\overline{\rho u_k}^2}{2} + n(E + \varepsilon(a)) + \bar{\rho}\varepsilon^0(\bar{p})\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{\rho u_i}\left(\frac{\bar{u}_k^2}{2} + \varepsilon^0(\bar{p}) + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right) + (\dot{R}_i + \bar{u}_i)\,n\,(E + \varepsilon(a)) + \frac{4\pi a^3 n}{3}\dot{R}_i\bar{p}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\pi a^3}{3}\dot{R}_i\right) + (\dot{R}_k + \bar{u}_k)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{2\pi a^3}{3}\dot{R}_i\right) = -\frac{4\pi a^3}{3\rho^0(p_0)}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{4\pi a^2}{3}\dot{R}_i\dot{a}$$

$$\bar{\rho} = \left(1 - \frac{4\pi a^3 n}{3}\right)\rho^0(p_0) + \left.\frac{\partial\rho^0}{\partial p}\right|_{p_0}(\bar{p} - p_0)$$

$$E = \rho^0(p_0)\left(2\pi\dot{a}^2 a^3 + \frac{\pi a^3}{3}\dot{R}_k^2\right)$$

$$\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial t} + (\dot{R}_i + \bar{u}_i)\frac{\partial a}{\partial x_i}, \qquad \dot{R}_i = \frac{\partial R_i}{\partial t} + (\dot{R}_k + \bar{u}_k)\frac{\partial R_i}{\partial x_k}$$

Мы здесь пренебрегли массой пузырьков газа и использовали акустическое приближение для плотности жидкости.

Пользуясь этими уравнениями, можно рассматривать различные задачи о крупномасштабных движениях. К числу таких задач можно отнести задачу о распространении малых возмущений, отражение от границы раздела жидкости, содержащей пузырьки и не содержащей их, и т. д.

В заключение автор считает своим долгом поблагодарить М. А. Лаврентьева, Л. В. Овсянникова и С. С. Григоряна за полезные дискуссии.

Поступила 24 VIII 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Zwick S. Behaviour of small permanent gas bubbles in a liquid. J. Math. and Phys., 1958, v. XXXVII, № 3.
2. Zwick S. Behaviour of small permanent gas bubbles in a liquid. J. Math. and Phys., 1959, v. XXXVII, № 4.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, 1954.