ПМТФ, № 5, 1967

ТЕЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ ПО КАНАЛУ В ЗОНЕ ВХОДА В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

А. Б. Ватажин, Е. К. Холщевникова

(*Москва*)

Вопросу о деформации плоского течения проводящей жидкости, протекающей по каналу $|x| < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant h = \mathrm{const}$ в зоне входа в магнитное поле $\mathbf{B} = (0, 0, B_*\eta(x))$, где $\eta(x)$ — единичная функция Хэвисайда ($\eta(x) = 0$ при $x < 0$ и $\eta(x) = 1$) при $x > 0$), посвящено значительное число работ. Очевидно, первой в этом направлении была статья Шерклифа [1,2], в которой определялся асимптотический (при $x \to \infty$) профиль возмущенной скорости при течении изотропно проводящей жидкости в канале с непроводящими стенками. Рассмотренное Шерклифом течение реализуется в магнитогидродинамических расходомерах. Полный расчет возмущенного течения изотропно проводящей жидкости в канале магнитогидродинамического генератора произведен в работе [3]. Асимптотические профили скорости в канале магнитогидродинамического генератора с идеально секционированными электродами при течении по нему анизотропно проводящей среды были найдены в статье [4]. В работе [5] приводятся общие формулы для расчета асимптотического профиля скорости по известному распределению в канале возмущающих сил. В статьях [6,7] для решения уравнения относительно функции тока возмущенного течения предполагается использовать функцию Грина. Наконец, при помощи функции Грина в статье [8] выписано решение для возмущенного течения анизотропно проводящей жидкости в канале со сплошными электродами и рассчитаны асимптотические профили скорости.

В настоящей работе определяется течение анизотропно проводящей жидкости в канале с идеально секционированными электродами. Решение строится при помощи метода Фурье. Полученные ряды, в которых медленно сходящуюся часть удается связать с асимптотическим профилем [4], вычисляемым из решения обыкновенного дифференциального уравнения, дают возможность быстро найти поле скоростей. Строится подробная картина деформации профиля скорости. Отмечаются некоторые общие свойства течения в зоне входа в магнитное поле, при помощи которых удается обнаружить ошибку в расчетах [8].

Рассмотрим течение несжимаемой ($\rho = \mathrm{const}$) жидкости по каналу $|x| < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ в поперечном магнитном поле $b(x) = \eta(x)$. Невозмущенное магнитным полем течение предполагается однородным: $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, $p = p_0 = \mathrm{const}$, а магнитные числа Рейнольдса — малыми. Такое течение описывается системой уравнений

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Nbj_y, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - Nbj_x \quad \left(N = \frac{\sigma B_*^2 h}{c^2 \rho U}\right) \tag{1}$$

$$j_x = \frac{1}{1+\beta^2 b^2}\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta b\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + ub\right) + vb\right], \qquad \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0$$

$$j_y = \frac{1}{1+\beta^2 b^2}\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta b\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - vb\right) - ub\right] \quad \left(\beta = \frac{e\tau B_*}{mc}\right) \tag{2}$$

В системе (1), (2) продольная и поперечная скорости u и v, давление p, магнитное поле b, координаты x и y, ток $\mathbf{j}$ и потенциал φ отнесены к средней по сечению скорости U, скоростному напору ρU^2, характерному полю B_*, высоте канала h и величинам $\sigma U B_* / c$ и $U B_* h / c$ соответственно. Скалярная проводимость σ и безразмерный параметр Холла β (e и m —

заряд и масса электрона, τ — среднее время между столкновениями электрона, c — скорость света в вакууме) предполагаются постоянными.

Если параметр магнитогидродинамического взаимодействия N мал, то решение системы (1), (2) общепринятым способом можно искать в виде следующих рядов:

$$u = 1 + Nu_1 + \ldots, \quad v = Nv_1 + N^2 v_2 + \ldots, \quad p = p_0 + Np_1 + \ldots$$
$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + N\mathbf{j}_1 + \ldots, \quad \varphi = \varphi_0 + N\varphi_1 + \ldots \tag{3}$$

Распределение электрического тока $\mathbf{j}_0$ и потенциала φ_0 в нулевом приближении находится из системы (2), в которой надо положить $v = 0$, $u = 1$. Известные решения такой системы перечислены в работах [9,10]. Возмущения (первого порядка малости) газодинамических параметров определяются из системы

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = bj_{y0}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y} = -bj_{x0}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$$
$$u_1 = v_1 = p_1 = 0 \qquad (x \to -\infty) \tag{4}$$

Для функции тока $\psi(x, y)$ из (4) без труда находится уравнение

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \int_{-\infty}^{x} j_{x0}\frac{db}{dx}dx \qquad \left(u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$
$$\psi(x, 0) = \psi(x, 1) = 0, \qquad |\psi(x, y)| < C = \text{const} \quad (x \to \infty) \tag{5}$$

Уравнение (5) было приведено Шерклифом [2].

Если $b(x) = \eta(x)$, то интеграл в правой части уравнения (5) равен $j_{x0}(0, y)$ при $x > 0$ и нулю при $x < 0$ и

$$\Delta\psi = 0 \quad (x < 0), \qquad \Delta\psi = j_{x0}(0, y) \quad (x > 0) \tag{6}$$

Решение (6) ищем в виде рядов

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^{\circ}(x) \sin k\pi y \quad (x < 0), \qquad \psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{\circ\circ}(x) \sin k\pi y \quad (x > 0)$$

Коэффициенты ψ_k° и $\psi_k^{\circ\circ}$, согласно (6), удовлетворяют уравнениям

$$\psi_k^{\circ\prime\prime} - k^2\pi^2\psi_k^{\circ} = 0 \; (x < 0), \qquad \psi_k^{\circ\circ\prime\prime} - k^2\pi^2\psi_k^{\circ\circ} = f_k \; (x > 0)$$
$$\psi_k^{\circ}(0) = \psi_k^{\circ\circ}(0), \; \psi_k^{\circ\prime}(0) = \psi_k^{\circ\circ\prime}(0) \tag{7}$$

$$\left(j_{x0}(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin k\pi y, \quad f_k = 2\int_0^1 j_{x0}(0, y) \sin k\pi y \, dy\right) \tag{8}$$

Граничные условия в точке $x = 0$ получены из условия непрерывности скоростей u и v при $x = 0$. На бесконечности ($|x| \to \infty$) функции ψ_k° и $\psi_k^{\circ\circ}$ должны быть ограничены.

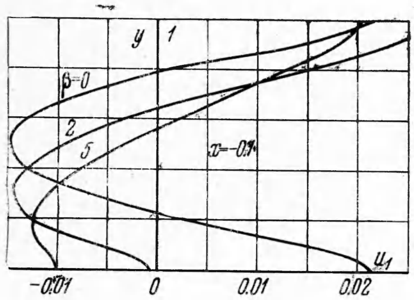
После решения (7) находим

$$x < 0 \qquad\qquad\qquad x > 0 \tag{9}$$

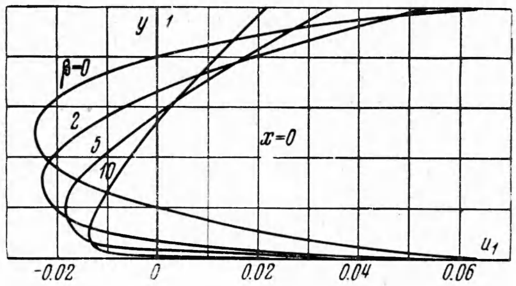
$$\psi = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2k^2\pi^2} e^{k\pi x} \sin k\pi y, \qquad \psi = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2k^2\pi^2} (2 - e^{-k\pi x}) \sin k\pi y$$

$$u_1 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2k\pi} e^{k\pi x} \cos k\pi y, \qquad u_1 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2k\pi} (2 - e^{-k\pi x}) \cos k\pi y$$

Обратим внимание, что для расчета поля скоростей при $b(x) = \eta(x)$ необходимо знать только величину $j_{x0}(0, y)$. Это объясняется тем, что вследствие консервативности электромагнитной силы слева и справа от сечения $x = 0$ вихрь скорости $\omega = \partial v_1 / \partial x - \partial u_1 / \partial y$ равен нулю при $x < 0$ и сохраняется вдоль линий тока (в нулевом приближении совпадающих с прямыми $y = \text{const}$) при $x > 0$. Изменение же вихря на линии $y = \text{const}$ в сечении $x = 0$ равно $-j_{x0}(0, y)$. Таким образом, распределе-



Фиг. 1



Фиг. 2

ние вихря во всем канале (а следовательно, и поле скоростей) становятся известными, если задан осевой ток $j_{x0}(0, y)$. Математически это отражено в уравнении (6).

Скорость течения $u_1(\infty, y) = u_1^+(y)$ при $x \to \infty$, согласно (9), выражается формулой

$$u_1^+(y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{k\pi} \cos k\pi y \tag{10}$$

Но из (8) имеем

$$\int_0^y j_{x0}(0, y)\, dy = u_1^+(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{k\pi} \tag{11}$$

Учитывая, что средняя по сечению канала скорость u_1^+ равна нулю, из (11) получаем

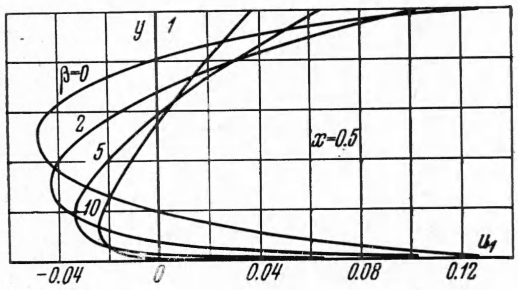
$$u_1^+(y) = \int_0^y j_{x0}(0, y)\, dy - \int_0^1 \left(\int_0^y j_{x0}(0, y)\, dy \right) dy \tag{12}$$

Таким образом, асимптотический профиль скорости определяется при помощи элементарного интегрирования. Найденную функцию $u_1^+(y)$ можно затем использовать для ускорения вычислений, так как она (см. (10)) заменяет медленно сходящуюся часть в формуле (9).

Заметим, что, согласно (12), $u_1^+(0) = u_1^+(1)$, если средний по сечению $x = 0$ ток j_{x0} равен нулю. Это условие всегда выполняется, если стенки канала при $x < 0$ непроводящие и $j_{x0} \to 0$ при $x \to -\infty$. Поэтому график асимптотической скорости, приведенный в работе [3], из которого следует, что $u_1^+(0) \neq u_1^+(1)$ (хотя выполняется указанное выше условие), является ошибочным.

Можно также показать, что для канала с непроводящими стенками величина $u_1^+(0) = u_1^+(1) = u_{1w}^+$ равна $q = Q(\sigma B_*^2 h^2 U^2 / c^2)^{-1}$, где Q — джоулева диссипация в канале, подсчитанная по распределению токов в нулевом приближении.

Отметим также, что, как следует из формул (9), осевая скорость в сечении $x = 0$ в два раза меньше скорости при $x \to \infty$.



Фиг. 3

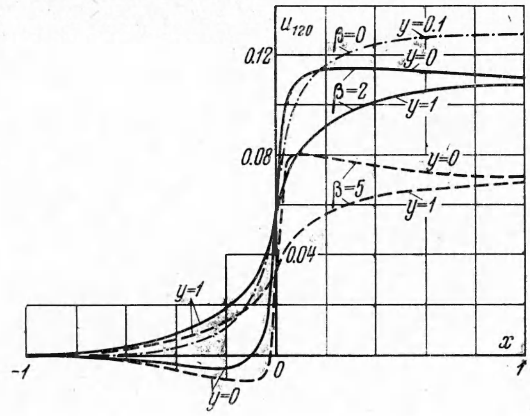
Рассмотрим течение анизотропно проводящей жидкости в канале, стенки которого — идеально секционированные электроды при $x > 0$, на которых выполняется условие $j_y = -(1 - K) = \mathrm{const}$, и непроводящие при $x < 0$. Величина $K \leqslant 1$ представляет собой параметр нагрузки.

Распределение электрических токов в таком канале при $b(x) = \eta(x)$ найдено в работе [11]. Величина $j_{x0}(0, y)$ представляется формулой

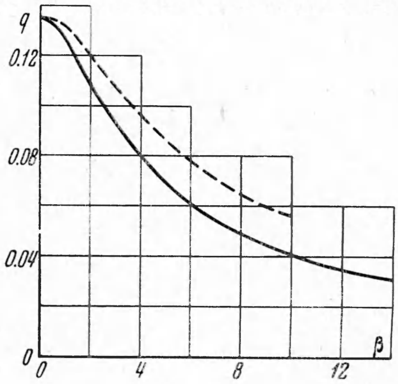
$$j_{x0}(0, y) = \frac{K}{\beta}\left[1 - \frac{2}{(4+\beta^2)^{1/2}}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}\right)^{1-2\nu}\right]$$

$$\nu = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\beta} \quad (0 < \nu < 0.5), \qquad j_{x0}(0, y) = \frac{K}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2} \quad (\beta = 0) \tag{13}$$

При $K = 0$ решение соответствует режиму короткого замыкания, при $K = 1$ — режиму холостого хода, при котором распределение электрического тока становится таким же, как в канале с непроводящими стенками.



Фиг. 4



Фиг. 5

Соответствующие указанному распределению тока коэффициенты Фурье (8) находились в результате численного интегрирования.

Приведем некоторые результаты расчетов для случая $K = 1$. Профили скорости в сечении $x = -0.1$ для различных β показаны на фиг. 1. При $\beta \neq 0$ течение перестает быть симметричным относительно оси $y = 1/2$. Производные $\partial u_1 / \partial y$ на стенках равны нулю. Это связано с тем, что вихрь скорости ω равен нулю при $x < 0$, а на стенках $\omega = -\partial u_1 / \partial y$.

Профили $u_1(0, y)$ и $u_1(0.5, y)$ представлены соответственно на фиг. 2 и 3. Как указывалось ранее, $u_1(0, y) = 0.5\, u_1^+(y)$, где $u_1^+(y)$ — асимптотический профиль скорости. При $x > 0$ производная $\partial u_1 / \partial y$ на нижней стенке обращается в бесконечность. Это объясняется тем, что $\omega(x, 0) = -j_{x0}(0, 0) = +\infty$ при $x > 0$. Так как $\omega(x, 1) = -j_{x0}(0, 1) \neq \infty$ при $\beta \neq 0$, то производная $\partial u_1 / \partial y$ на верхней стенке конечна. С увеличением параметра Холла возмущения скорости по абсолютной величине уменьшаются. На фиг. 4 показано распределение скорости вдоль верхней и нижней стенок. При $x \approx 1$ величина u_1 практически не отличается от своего асимптотического значения u_1^+. Заметим, однако, что с увеличением параметра Холла β выход на асимптотические значения замедляется.

Так как на стенках $j_y = 0$ (при $K = 1$), то, согласно первому уравнению (4), имеем $p_1 = -u_1$ при $y = 0$ и $y = 1$. Таким образом, потери давления в канале равны $p_1(\infty) = -u_1^+(0) = -u_{1w}^+$. Величина u_{1w}^+, как указывалось выше, равна безразмерной джоулевой диссипации q. Зависимость $q(\beta)$ представлена на фиг. 5. Здесь же пунктиром показана функция $q(\beta)$, определенная в работе [12], в которой, в отличие от [11], электрическое поле в канале с непроводящими стенками рассчитывалось при помощи метода Фурье. Расхождение кривых, по всей видимости, объясняется недостаточной точностью вычислений в работе [12]. (В [12] задача сведена к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, которая заменялась конечной системой одного и того же порядка для всех β. В то же время известно, что, как правило, с увеличением β сходимость различных приближенных методов ухудшается.)

Если $K \neq 1$, то на стенках $p_1 = -u_1$ при $x < 0$ и $p_1 = -u_1 - (1 - K)\, x$ при $x > 0$. В области асимптотического течения $p_1^+ = -u_1^+(0) - (1 - K)\, x$. Величина $u_1^+(0)$ в этой формуле меньше приведенной на фиг. 5 в K раз.

Поступила 31 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff T. A. Edge effects in electromagnetic flowmeters. T. Nucl. Energy, 1956, vol 3, p. 305.
2. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. Изд. «Мир», 1965.
3. Sutton G. W., Carlson A. W. End effects in inviscid flow in a magnetohydrodynamic channel. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, pt. 1, p. 121.
4. Ватажин А. Б. О деформации профиля скорости в неоднородном магнитном поле. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
5. Ватажин А. Б. Определение параметров дозвукового течения в канале за зоной осевой неоднородности слабых возмущающих сил и источников тепла. ПММ, 1967, № 3.
6. Dragos L. Sur l'infuence des extrémités des electrodes sur l'écoulement Magnétohydrodynamique dans les canaux. C. r. Acad. sci., A, 1966, t. 263, p. 352—355.
7. Dragos L. Sur l'influence des extrémités des électrodes sur l'écoulement magnetohydrodynamique dans les canaux. C. r. Acad. sci., A, 1966, t. 263, p. 328—331.
8. Nguyen-Ngoc-Tran. La premiére approximation pour les écoulements dans les tuyéres magnetohydrodynamiques avec effets d'extrémités et de conductivite électrique non uniforme, anisotrope. C. r. Acad. sci., A, 1966, t. 263, p. 639—642.
9. Ватажин А. Б., Регирер. С. А. Дополнение в кн. Дж. Шерклифа «Теория электромагнитного измерения расхода» (Изд. «Мир», 1965). «Электрические поля в каналах магнитогидродинамических устройств».
10. Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах и трубах. Изд. АН СССР, ВИНИТИ, Итоги Науки, Серия Механика, Гидромеханика, 1964, 1966.
11. Sutton G. W. End losses in magnetohydrodynamic channels with tensor conductivity and segmented electrodes. J. Appl. Phys., 1963, vol. 34, No. 2, p. 396—403. (Русск. перев.: Информ. бюлл. Прямое преобразование тепловой энергии в электрическую. АН СССР, ВИНИТИ, 1964, вып. 2 (19)).
12. Pericart J., Montardy A. Contribution a l'étude des effets d'extrémité dans les generateurs MHD. Rev. gen. électr., 1965, t. 74, No. 11, p. 863—872.