

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ
В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
ФИЛЬТРАЦИИ**

С. Н. Багир-заде, Г. П. Гусейнов

(Баку)

Исследованию движения однородной жидкости в трещиновато-пористом пласте при нестационарной фильтрации посвящены работы [1-4].

В [3] исследовано движение однородной жидкости к центральной скважине из кругового трещиновато-пористого пласта бесконечной протяженности и сделан вывод о том, что кривая восстановления (понижения) забойного давления после остановки (пуска) скважины имеет «двухслойный» характер. Обоснованию такого изменения восстановления (понижения) забойного давления посвящена работа [4]. Однако как в [3], так и в [4] получены лишь приближенные формулы, описывающие этот процесс.

В данной работе даются точные решения задач о нестационарной фильтрации однородной жидкости к центральной скважине из круговых трещиновато-пористых пластов в двух характерных случаях: когда среда имеет непроницаемую внешнюю границу и когда среда является неограниченной по протяженности. Произведены численные расчеты, которые подтверждают вывод о том, что кривая восстановления (понижения) забойного давления имеет «двухслойный» характер изменения в случае, когда трещиновато-пористый пласт является неограниченным по протяженности. В случае замкнутого трещиновато-пористого пласта кривая понижения во времени забойного давления скважины всегда больше таковой для гранулярной среды.

При решении задач предполагается, что дебит скважины, совершенной по характеру и степени вскрытия, является постоянным в течение всего процесса разработки.

В соответствии с теорией движения однородной жидкости в трещиновато-пористой среде, предложенной в работах [1-3], решение поставленных задач сводится к интегрированию систем уравнений

$$\frac{\partial^2 \psi_2^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi_2^{(i)}}{\partial \xi} - (1 - \omega) \frac{\partial \psi_1^{(i)}}{\partial \tau} = \omega \frac{\partial \psi_2^{(i)}}{\partial \tau} \quad (1)$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial \psi_1^{(i)}}{\partial \tau} = \lambda (\psi_2^{(i)} - \psi_1^{(i)}) \quad (i = 1, 2)$$

при следующих начальном и граничных условиях:

$$\psi_1^{(i)}(\xi, 0) = \psi_2^{(i)}(\xi, 0) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

$$\left(\xi \frac{\partial \psi_2^{(i)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = -1 \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_2^{(2)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=R} = 0 \quad (4)$$

$$\psi_2^{(1)}(\infty, \tau) = 0 \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\psi_j^{(i)}(\xi, \tau) = 2\pi \frac{k_2 h}{q\mu} [p_0 - p_j^i(\xi, \tau)] \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\omega = \frac{m_2 \beta_2}{m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2}, \quad \tau = \frac{k_2 t}{\mu r_c^2 (m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2)} \quad (6)$$

$$\lambda = \alpha r_c^2 \frac{k_1}{k_2}, \quad \xi = \frac{r}{r_c}, \quad R = \frac{r_k}{r_c}$$

где α — параметр трещиновато-пористой среды, характеризующий обмен жидкостью между низкопроницаемыми блоками и трещинами, p_0 и $p(\xi, \tau)$ — начальное и текущее давления соответственно, q — постоянный дебит скважины, h — мощность пласта, m — пористость, k и β — коэффициенты проницаемости и упругоёмкости, μ — вязкость, t — время, r , r_c и r_k — текущий радиус, радиус скважины и радиус непроницаемой внешней границы пласта. Верхние индексы 1 и 2 в функциях давления соответствуют неограниченной по протяженности и замкнутой средам, а нижние — системам блоков и трещин среды.

Подвергая системы (1) и граничные условия (3) — (5) преобразованию Лапласа по времени, исключая затем из полученной системы функцию понижения давления в системе блоков, можно написать

$$\frac{d^2 \Psi_2^{(i)}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\Psi_2^{(i)}}{d\xi} - S_* \Psi_2^{(i)}(\xi, s) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

где

$$S_* = s[\omega(1-\omega)s + \lambda][\omega(1-\omega)s + \lambda]^{-1} \quad (8)$$

s — параметр преобразования Лапласа, а $\Psi(\xi, s)$ — лапласово изображение функции $\psi(\xi, \tau)$.

Общее решение уравнений (7) имеет вид [5, 6]

$$\Psi_2^{(i)}(\xi, s) = AI_0(\xi \sqrt{S_*}) + BK_0(\xi \sqrt{S_*}) \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

Здесь $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — функции Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента первого и второго рода соответственно.

Найдя постоянные интегрирования A и B из предварительно подвергнутых преобразованию Лапласа граничных условий (3) и (5) для бесконечного пласта и (3), (4) для замкнутого пласта, решения задач можно представить в виде

$$\Psi_2^{(1)}(\xi, s) = K_0(\xi \sqrt{S_*}) [s \sqrt{S_*} K_1(\sqrt{S_*})]^{-1} \quad (10)$$

$$\Psi_2^{(2)}(\xi, s) = \frac{1}{s \sqrt{S_*}} \frac{I_0(\xi \sqrt{S_*}) K_1(R \sqrt{S_*}) + I_1(R \sqrt{S_*}) K_0(\xi \sqrt{S_*})}{I_1(R \sqrt{S_*}) K_1(\sqrt{S_*}) - I_1(\sqrt{S_*}) K_1(R \sqrt{S_*})} \quad (11)$$

Пользуясь соотношением из [5]

$$s[\Psi_2^{(2)}(\xi, s)]_{s=s} = \frac{2}{R^2 - 1} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n U_n(\xi, R) \exp(-\beta_n^2 \tau) \quad (12)$$

где

$$U_n(\xi, R) = J_1(\beta_n R) \frac{J_1(\beta_n) Y_0(\beta_n \xi) - J_0(\beta_n \xi) Y_1(\beta_n)}{J_1^2(\beta_n R) - J_1^2(\beta_n)} \quad (13)$$

оригинал изображения (11), с использованием обобщенной теоремы умножения Эфроса [7], можно найти в виде

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(2)}(\xi, \tau) = & \frac{2\tau}{\omega(R^2 - 1)} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(\xi, R)}{\beta_n} \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta_n^2 \tau}{\omega}\right) \right] - \\ & - \int_0^{\tau/\omega} g(\tau, \theta) \left[\frac{2}{R^2 - 1} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n U_n(\xi, R) \exp(-\beta_n^2 \theta) \right] d\theta \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$g(\tau, \theta) = \begin{cases} \lambda \exp\left(-\lambda \frac{\tau - \omega\theta}{1 - \omega}\right) \int_0^{\theta} e^{-\lambda z} I_0\left[2\lambda \left(z \frac{\tau - \omega\theta}{1 - \omega}\right)^{1/2}\right] dz & \text{при } \theta < \frac{\tau}{\omega} \\ 0 & \text{при } \theta > \tau/\omega \end{cases} \quad (15)$$

β_n — корни уравнения

$$J_1(\beta_n R) Y_1(\beta_n) - J_1(\beta_n) Y_1(\beta_n R) = 0 \quad (16)$$

$J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1$) — функции Бесселя от действительного аргумента соответственно первого и второго рода порядка ν .

При $\xi = 1$, используя рекуррентную формулу [8]

$$J_1(x) Y_0(x) - J_0(x) Y_1(x) = 2/\pi x \quad (17)$$

выражение для понижения давления на стенке скважины, разрабатывающей трещиновато-пористый пласт при постоянном отборе жидкости, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)}(1, \tau) = & \frac{2\tau}{\omega(R^2 - 1)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(1, R)}{\beta_n^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta_n^2 \tau}{\omega}\right)\right] - \\ & - 2 \int_0^{\tau/\omega} g(\tau, \theta) \left[(R^2 - 1)^{-1} - \sum_{n=1}^{\infty} U_n(1, R) \exp(-\beta_n^2 \theta)\right] d\theta \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$U_n(1, R) = J_1(\beta_n R) [J_1^2(\beta_n R) - J_1^2(\beta_n)]^{-1} \quad (19)$$

Формуле (18) можно придать удобный для расчетов вид, если воспользоваться соответствующей формулой для гранулярной среды [5, 6]

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)}(1, \tau) = & \frac{0.5 + 2\tau}{R^2 - 1} + \frac{(4 \ln R - 3) R^4 + 2R^2 + 1}{4(R^2 - 1)^2} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{-2} U_n(1, R) \exp(-\beta_n^2 \tau) \end{aligned} \quad (20)$$

Ввиду того что в начальный момент времени ($\tau = 0$) понижение давления на забое скважины должно равняться нулю, из (20) можно составить равенство,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{-2} U_n(1, R) = \frac{0.25}{1 - R^2} - \frac{(4 \ln R - 3) R^4 + 2R^2 + 1}{8(R^2 - 1)^2} \quad (21)$$

С учетом соотношения (21) формула (18) переписется в виде

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)}(1, \tau) = & \frac{0.25 + 2\tau/\omega}{R^2 - 1} + \frac{(4 \ln R - 3) R^4 + 2R^2 + 1}{8(R^2 - 1)^2} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{-2} U_n(1, R) \exp(-\beta_n^2 \tau/\omega) - \\ & - 2 \int_0^{\tau/\omega} g(\tau, \theta) \left[\frac{1}{R^2 - 1} - \sum_{n=1}^{\infty} U_n(1, R) \exp(-\beta_n^2 \theta)\right] d\theta \end{aligned} \quad (22)$$

Полученная формула (22), являясь точным решением задачи для замкнутого пласта, позволяет для любого момента времени вычислить величину

ну понижения забойного давления скважины, эксплуатирующей месторождение с трещиновато-пористым типом коллекторов при постоянном отборе жидкости.

Можно показать, что при $\omega = 1$ слагаемое, содержащее $g(\tau, \theta)$, обращается в нуль и формула (22) приобретает вид (20). Объяснением этому служит тот факт, что при этом значении параметра трещинной емкости ω исходная система уравнений (1) также переходит в уравнение пьезопроводности для гранулярной среды.

Переходя как и прежде от изображения к оригиналу, точное решение задачи для бесконечного трещиновато-пористого пласта можно найти в виде

$$\begin{aligned} \psi_2^{(1)}(1, \tau) = & \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \exp(-u^2\tau/\omega)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} \frac{du}{u^3} - \\ & - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\tau/\omega} g(\tau, \theta) d\theta \int_0^{\infty} \frac{\exp(-u^2\theta)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} \frac{du}{u} \end{aligned} \quad (23)$$

Если в (10) считать параметр преобразования s достаточно большим, то можно пренебречь величиной λ в выражении для S_{*1} и формула понижения забойного давления при малых значениях времени примет вид

$$\psi_2^{(1)}(1, \tau) \approx \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1 - \exp(-u^2\tau/\omega)}{J_1^2(u) + Y_1^2(u)} \frac{du}{u^3} \quad (24)$$

Выражение (24) отличается от точной формулы для гранулярной среды лишь множителем ω^{-1} при показателе экспоненты.

Следует отметить, что в работе [3] получены асимптотические решения рассматриваемых задач, пригодные при достаточно больших значениях времени. При этом в формулах (10) и (11) авторами были использованы приближенные выражения функций Бесселя от мнимого аргумента, что облегчило переход к оригиналу. Эти решения имеют вид [3]

$$\psi_2^{(1)}(1, \tau) \approx 0.5 \left\{ \ln \tau + 0.809 + Ei \left[\frac{-\lambda\tau}{\omega(1-\omega)} \right] - Ei \left(\frac{-\lambda\tau}{1-\omega} \right) \right\} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)}(1, \tau) \approx & \frac{2}{R^2 - 1} \left\{ \frac{1}{4} + \tau + \frac{(1-\omega)^2}{\lambda} \left[1 - \exp \left(\frac{-\lambda\tau}{\omega(1-\omega)} \right) \right] \right\} + \\ & + 0.25(R^2 - 1)^{-2} [(4 \ln R - 3)R^4 + 2R^2 + 1] \end{aligned} \quad (26)$$

$Ei(-x)$ — интегрально-показательная функция [9].

При $\omega = 1$ или же $\lambda \rightarrow \infty$ эти решения переходят к соответствующим формулам для гранулярных сред [5, 6]

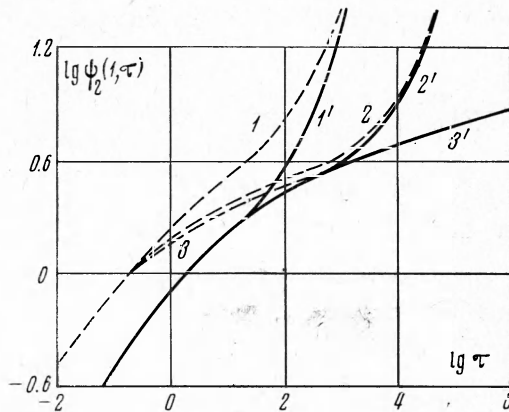
$$\psi_2^{(1)}(1, \tau)|_{\omega=1} \approx 0.5 \ln \tau + 0.4045 \quad (27)$$

$$\psi_2^{(2)}(1, \tau)|_{\omega=1} \approx \frac{0.5 + 2\tau}{R^2 - 1} + \frac{(4 \ln R - 3)R^4 + 2R^2 + 1}{4(R^2 - 1)^2} \quad (28)$$

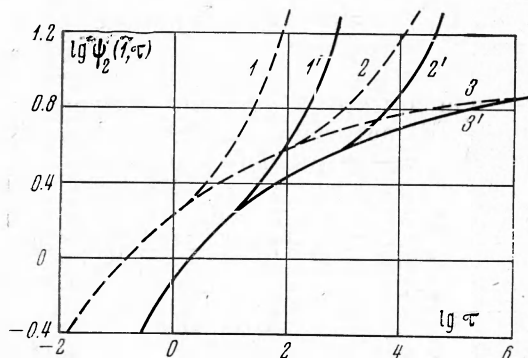
Формулы (20), (24), (27) и (28), выражающие зависимость понижения забойного давления от времени для гранулярных сред, широко известны в нефтяной подземной гидродинамике и протабулированы в достаточно большом диапазоне изменения времени [5, 6]. Такие зависимости построены сплошными линиями 1' и 2' на фиг. 1 и 2 для различных месторождений, непроницаемые внешние контуры которых равны 10 и 50 единицам безразмерного радиуса R . Пунктирные линии 1 и 2 этих фигур соответствуют месторождениям с трещиновато-пористыми типами коллекторов при

тех же значениях радиуса R . Расчеты произведены по формулам (22) и (26) при $\omega = 0.1$ для обеих фигур и $\lambda = 5 \cdot 10^{-3}$ и $5 \cdot 10^{-6}$ соответственно для фиг. 1 и 2.

Кривые 3 и $3'$, являясь огибающими вышеуказанных кривых, описывают временное изменение понижения забойного давления для скважин в неограниченных по протяженности месторождениях соответственно с трещиновато-пористыми и гранулярными типами коллекторов. Участки этих кривых после ответвления рассчитывались по формулам (23) и (25),



Фиг. 1



Фиг. 2

причем до начала ответвления точные формулы (22) и (23), соответствующие замкнутому и бесконечному пластам, хорошо согласуются между собой.

Результаты вычислений при различных значениях параметров ω и λ для бесконечного пласта в полулогарифмических координатах приведены на фиг. 3 и 4. Кривые $3'$ этих фигур соответствуют таковым на фиг. 1 и 2. Кривые 4 и 5 отличаются принятым значением параметра ω , равного 0.1 и 0.01 соответственно. Различие же фиг. 3 и 4 заключается в значении параметра λ , равного $5 \cdot 10^{-3}$ и $5 \cdot 10^{-6}$ соответственно.

Кривые 4 и 5 (фиг. 3 и 4) подтверждают двухслойность характера изменения кривых понижения забойных давлений в скважинах в трещиновато-пористом пласте при фиксированных значениях параметров ω и λ .

Заметим, что на начальном прямолинейном участке кривых 4 и 5 (фиг. 3 и 4) наблюдается согласованность точной и асимптотической формул (23) и (25).

Из анализа кривых всех приведенных фигур можно сделать

следующие выводы относительно движения жидкости к центральной скважине в трещиновато-пористых пластах при нестационарной фильтрации:

1) понижение забойного давления скважины в трещиновато-пористом пласте больше или равно таковому для гранулярного при одинаковом значении времени;

2) уменьшение параметра трещинной емкости ω понижает забойное давление, и по мере роста времени эксплуатации это понижение становится равным понижению давления в случае гранулярной среды, когда обе среды являются не ограниченными по протяженности. При этом на время выравнивания существенное влияние оказывает величина параметра λ , характеризующего степень затрудненности обмена жидкости между системами блоков и трещин среды (кривые 3, 4 и 5);

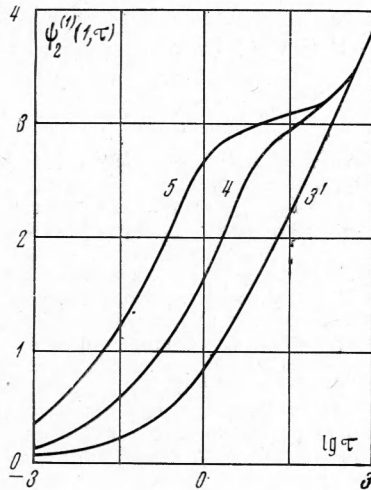
3) зависимость от времени понижения забойного давления скважины в бесконечном пласте отличается от таковой для гранулярной на вели-

чину

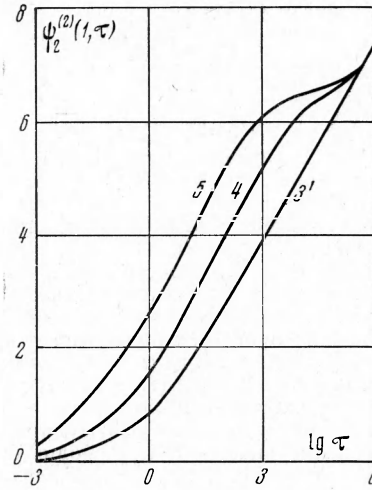
$$\psi_2^{(1)}(1, \tau) - \psi_2^{(1)}(1, \tau)|_{\omega=1} = 0.5Ei\left[\frac{-\lambda\tau}{\omega(1-\omega)}\right] - 0.5Ei\left(\frac{-\lambda\tau}{1-\omega}\right) \quad (29)$$

которая обращается в нуль с увеличением времени разработки. В случае же замкнутого пласта имеет место соотношение

$$\psi_2^{(2)}(1, \tau) - \psi_2^{(2)}(1, \tau)|_{\omega=1} = \frac{2(1-\omega)^2}{\lambda(R^2-1)} \left[1 - \exp\left(\frac{-\lambda\tau}{\omega(1-\omega)}\right)\right] \quad (30)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

которое в отличие от предыдущего обращается в постоянную

$$2(1-\omega)^2 \lambda^{-1} (R^2-1)^{-1}$$

при тех значениях времени, когда

$$\exp\left(\frac{-\lambda\tau}{\omega(1-\omega)}\right) = 0$$

В заключение отметим, что значения функций, входящих в расчетные формулы, были взяты из [9-11].

Поступила 16 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
2. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
3. Warren J. E., Root P. J. The behavior of naturally fractured reservoirs. Soc. Petrol. Engrs. Journal, 1963, vol. 3, No. 3.
4. Kazemi H., Seth M. S., Thomas G. W. The interpretation of interference tests in naturally fractured reservoirs with uniform fractured distribution. Soc. Petrol. Engrs. Journal., 1969, vol. 9, No. 4.
5. Van Everdingen A. F., Hurst W. The application of the laplace transformation to flow problems in reservoirs. J. Petrol. Techn., 1949, vol. 1, No. 2.
6. Кристеа Н. Подземная гидравлика, т. 1. М., Гостоптехиздат, 1961.
7. Лаврентьев М. А., Шабат В. В. Методы теории функций и комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. 1. М.
9. Таблицы интегральной показательной функции. М., Изд-во АН СССР, 1954.
10. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. М., Физматгиз, 1962.
11. Карамзина Л. Н., Чистова Э. А. Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них. М., Изд-во АН СССР, 1958.