УДК 532.5 + 517.9

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

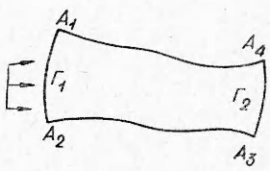
Г. В. Алексеев

(*Владивосток*)

Вопросы разрешимости начально-краевых задач для двумерных нестационарных уравнений Эйлера динамики идеальной жидкости изучались многими авторами. Обзор и соответствующие ссылки можно найти, например, в работах [1, 2]. Однако не исследовался вопрос об асимптотическом поведении решений уравнений Эйлера при $t \to \infty$.

Объясняется это, по-видимому, тем, что соответствующие краевые задачи для стационарных уравнений Эйлера не обладают свойством единственности решения. Кроме того, имеются примеры, когда стационарная краевая задача имеет континуум решений, как, например, задача с условием непротекания жидкости через границу области течения. Для получения каких-либо результатов об асимптотическом поведении при $t \to \infty$ решений нестационарных начально-краевых задач необходимо выделить класс, в котором соответствующая стационарная задача имеет единственное решение (или конечное число решений). Один такой класс был введен в работе [3]. Простейшим представителем этого класса является безвихревое движение. В данной работе приводятся достаточные условия, при которых решения двумерных уравнений Эйлера стремятся при $t \to \infty$ к потенциальному течению.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная односвязная область плоскости $x = (x_1, x_2)$ с кусочно-гладкой границей Γ. Для простоты предположим, что область Ω имеет вид криволинейного четырехугольника A_1, A_2, A_3, A_4 с гладкими сторонами A_jA_{j+1}, $1 \leqslant j \leqslant 4$, $A_5 = A_1$ (см. фигуру). Положим $\Gamma_0 = A_2A_3 \cup A_4A_1$, $\Gamma_1 = A_1A_2$, $\Gamma_2 = A_3A_4$, $\Gamma_3 = \bigcup_{j=1}^{4} A_j$, так что $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{3} \Gamma_i$. Через $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ будем обозначать вектор внутренней нормали к границе в точках $\Gamma \setminus \Gamma_3$. Пусть $I_T = \{t \in R \mid T \leqslant t < \infty\}$, где T — произвольное неотрицательное число. Границы A_jA_{j+1} и углы $\pi\beta_j$ при вершинах A_j будем считать удовлетворяющими условиям



I $\qquad A_jA_{j+1} \in C^{2+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$; $0 < \beta_j \leqslant 1/2$, $1 \leqslant j \leqslant 4$.

В области $\Omega \times I_0$ рассмотрим начально-краевую задачу для двумерных нестационарных уравнений Эйлера

$$\mathbf{v}' + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = \gamma(x, t), \quad \omega|_{\Gamma_1} = 0,$$

где $\mathbf{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$ — скорость; p — давление; $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ — завихренность. Обозначим сужения функции $\gamma(x, t)$ на Γ_i через $\gamma^{(i)}(x, t)$ $(i = 0, 1, 2)$ и предположим, что выполняются условия

II $\qquad \mathbf{v}_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$, $\omega_0|_{\Gamma_1} = 0$;

III $\qquad \gamma^{(0)} = 0$, $\gamma^{(1)} > 0$, $\gamma^{(2)} < 0$; $\int\limits_\Gamma \gamma(x, t)\, d\sigma = 0$, $t \geqslant 0$;

$$\gamma^{(i)} \in C^1(\Gamma_i \times I_0), \ i = 1, 2; \ \gamma(x, 0) = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, \ x \in \Gamma \setminus \Gamma_3,$$

где $\omega_0 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_0$; $d\sigma$ — элемент длины дуги границы Γ; $\overline{\Omega}$ — область Ω в момент $t = 0$. Кроме того, будем предполагать, что существует вектор $\widetilde{\mathbf{u}}(x, t) \in C^1(\overline{\Omega} \times I_0)$ такой, что $\widetilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = \gamma(x, t)$, $t \geqslant 0$, и $\gamma(x, t)$ равномерно стремится к функции $\gamma_\infty(x)$ при $t \to \infty$, причем сужения $\gamma_\infty^{(i)}(x)$ функции $\gamma_\infty(x)$ на Γ_i $(i = 0, 1, 2)$ удовлетворяют условиям

IV $$\gamma_\infty^{(0)} \equiv 0,\ \gamma_\infty^{(1)} \geqslant \varepsilon,\ \gamma_\infty^{(2)} \leqslant -\varepsilon,$$
$$\gamma_\infty^{(i)} \in C^1(\Gamma_i),\ i = 1, 2,$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Наряду с задачей (1.1) рассмотрим также соответствующую краевую задачу для стационарных уравнений Эйлера

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\Delta p,\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$
$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = \gamma_\infty(x),\ \omega|_{\Gamma_1} = 0. \tag{1.2}$$

Очевидно, что потенциальное течение $\mathbf{u}_\infty(x)$, определяемое формулами

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_\infty = 0,\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\infty = 0,\ \mathbf{u}_\infty\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = \gamma_\infty(x), \tag{1.3}$$

вместе с давлением $p_\infty(x) = \text{const} - \mathbf{u}_\infty^2(x)/2$ является решением задачи (1.2). Это решение единственно в классе функций, введенном в [3], для которых $\sup\limits_{x\in\Omega} |\omega(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in\Gamma_1} |\omega(x)|$.

Найдем условия, при которых решение нестационарной задачи (1.1) стремится при $t \to \infty$ к стационарному потенциальному течению $\mathbf{u}_\infty(x)$.

Для решения этой задачи укажем сначала условия, при которых любая траектория векторного поля $\mathbf{v}(x, t)$, начинающаяся при $t = 0$ в области Ω, покинет Ω через конечное время, а далее воспользуемся известным для решений задачи (1.1) свойством сохранения завихренности вдоль траекторий поля $\mathbf{v}$.

В дальнейшем рассмотрим только векторные поля, удовлетворяющие условию $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Следуя терминологии работы [4], любое такое векторное поле назовем потоком. Если в дополнение к условию $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ выполняется условие $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0$, то поле $\mathbf{v}$ назовем тангенциальным потоком. Отметим, что решение $\mathbf{v}(x, t)$ задачи (1.1) удобно рассматривать как сумму двух потоков: $\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{u}(x, t) + \mathbf{w}(x, t)$, где $\mathbf{u}$ — нестационарный потенциальный поток, определяемый формулами

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0,\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = \gamma(x, t), \tag{1.4}$$

а $\mathbf{w}$ — тангенциальный вихревой поток, являющийся при $t \geqslant 0$ решением краевой задачи

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \omega(x, t),\ \operatorname{div} \mathbf{w} = 0,\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = 0, \tag{1.5}$$

где $\omega(x, t) = \operatorname{rot} \mathbf{v}$. В силу сделанных предположений о функциях $\gamma(x, t)$ и $\gamma_\infty(x)$, очевидно, $\mathbf{u} \in C(\overline{\Omega} \times I_0)$, $\mathbf{u}_\infty \in C(\overline{\Omega})$, причем

$$\|\mathbf{u}(x, t) - \mathbf{u}_\infty(x)\|_{C(\overline{\Omega})} \to 0,\ t \to \infty. \tag{1.6}$$

Ниже под векторами $\mathbf{u}_\infty$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ будем понимать потоки, определяемые соответственно формулами (1.3)—(1.5).

2. Существование обобщенного решения. Докажем существование решения задачи (1.1) и укажем некоторые его свойства. Положим

$$Q = \Omega \times (0, T),\ \Sigma = \Gamma \times (0, T),\ \Sigma_i = \Gamma_i \times (0, T),\ i = 0, 1, 2,$$

где T — достаточно большое положительное число. Обозначим через V пространство тангенциальных потоков $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$; через $\mathbf{H}$ обозначим замыкание элементов пространства $\mathbf{V}$ в норме $H^0(\Omega)$. Введем также множество Φ «пробных» функций $\varphi(x, t) \in C^1(\bar{Q})$, равных нулю на Σ_2 и при $t = T$.

Определение 2.1. Поток $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ назовем обобщенным решением задачи (1.1), если $\mathbf{w} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V})$, $\mathbf{w}' \in L^2(0, T; \mathbf{H})$, $\operatorname{rot} \mathbf{w} \in L^\infty(Q)$, $\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x)$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется интегральное тождество

$$F(\mathbf{v}, \varphi) \equiv \int\limits_Q\int \operatorname{rot} \mathbf{v} \, (\varphi' + \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi) \, dx \, dt + \int\limits_\Omega \omega_0(x) \, \varphi(x, 0) \, dx = 0. \tag{2.1}$$

Существование решения задачи (1.1) можно доказать методом исчезающей вязкости. Для этого предположим сначала, что $\omega_0(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, и рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений Навье — Стокса, имеющую в переменных $\mathbf{v}$, ω вид

$$\omega' + \mathbf{v} \cdot \nabla\omega - \nu\Delta\omega = 0, \ \operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega, \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \omega|_{t=0} = \omega_0(x), \ \omega|_\Sigma = 0, \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Sigma = \gamma(x, t). \tag{2.2}$$

Рассуждая так же, как и в [1] в случае гладкой области, можно показать, что при каждом $\nu > 0$ задача (2.2) имеет единственное решение $\mathbf{v}_\nu \equiv \mathbf{u} + \mathbf{w}_\nu$, причем для функций $\mathbf{w}_\nu$, $\omega_\nu \equiv \operatorname{rot} \mathbf{w}_\nu$ выполняются оценки

$$\|\omega_\nu\|_{L^\infty(Q)} \leqslant M_0 = \|\omega_0(x)\|_{C(\bar{\Omega})}, \quad \|\mathbf{w}_\nu\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{V})} \leqslant M_1, \ \|\mathbf{w}'_\nu\|_{L^2(0,T;\mathbf{H})} \leqslant M_2, \quad \nu \int\limits_0^T \|\nabla\omega_\nu\|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \leqslant M_3. \tag{2.3}$$

Здесь постоянные M_j $(j = 0, \ldots, 3)$ не зависят от ν. В силу оценок (2.3) из семейств функций $\mathbf{w}_\nu$, ω_ν можно извлечь такие последовательности $\mathbf{w}_k \equiv \mathbf{w}_{\nu_k}$, $\omega_k \equiv \omega_{\nu_k}$, что при $\nu_k \to 0$ $(k \to \infty)$ $\mathbf{w}_k \to \mathbf{w}$ сильно в $L^2(Q)$, $\omega_k \to \omega$ слабо в $L^\infty(Q)$, причем $\mathbf{w} \in L^\infty(0, T; \mathbf{V})$, $\mathbf{w}' \in L^2(0, T; \mathbf{H})$, $\operatorname{rot} \mathbf{w} = \omega$.

Пусть $\sigma > 0$ — произвольное достаточно малое число. Обозначим через φ_σ функцию из класса $C^2(\bar{\Omega})$, равную нулю в σ — окрестности множества Γ_3 и единице вне 2σ — окрестности Γ_3. Умножим уравнение для ω_k на произведение $\varphi_\sigma\varphi$, где $\varphi \in \Phi$, и проинтегрируем полученное выражение по частям. Будем иметь

$$\int\int \omega_k [\varphi_\sigma\varphi' + \mathbf{v}_k \cdot \nabla(\varphi_\sigma\varphi)] \, dxdt + \int\limits_\Omega \omega_0(x) \, \varphi_\sigma(x) \, \varphi(x, 0) \, dx = \nu_k \int\limits_{\Sigma_0 \cup \Sigma_1}\int \frac{\partial\omega_k}{\partial n} \varphi_\sigma\varphi d\sigma dt + \nu_k \int\limits_Q\int \nabla\omega_k \cdot \nabla(\varphi_\sigma\varphi) \, dxdt. \tag{2.4}$$

Второе слагаемое в правой части (2.4) в силу последней оценки в (2.3) стремится к нулю при $\nu_k \to 0$. Стремление к нулю первого слагаемого при $\nu_k \to 0$ можно показать, используя лемму 4.1 работы [1], справедливую в регулярных точках границы Г. Переходя к пределу в (2.4) при $\nu_k \to 0$ $(k \to \infty)$, получим, что поток $\mathbf{v} \equiv \mathbf{u} + \mathbf{w}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$(2.5)\qquad F(\mathbf{v},\ \varphi_\sigma\varphi) \equiv \int\limits_Q\int \omega\,[\varphi_\sigma\varphi' + \mathbf{v}\cdot\nabla(\varphi_\sigma\varphi)]\,dxdt + \int\limits_\Omega \omega_0(x)\,\varphi_\sigma(x)\,\varphi(x,\ 0)\,dx = 0.$$

Покажем, что поток $\mathbf{v}$ удовлетворяет интегральному тождеству (2.1). Для этого достаточно показать, что тождество (2.5) остается справедливым, если в нем положить $\sigma = 0$. Рассмотрим разность

$$(2.6)\qquad F(\mathbf{v},\ \varphi_\sigma\varphi) - F(\mathbf{v},\ \varphi) \equiv \int\limits_Q\int \omega\,(\varphi_\sigma - 1)(\varphi' + \mathbf{v}\cdot\nabla\varphi)\,dxdt + \int\limits_\Omega \omega_0(x)(\varphi_\sigma - 1)\,\varphi(x,\ 0)\,dx + \int\limits_Q\int \omega\varphi\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi_\sigma dxdt = 0.$$

Первые два слагаемых в (2.6) стремятся, очевидно, к нулю при $\sigma \to 0$. Рассмотрим последнее слагаемое в правой части (2.6). Учитывая, что $|\nabla\varphi_\sigma| = 0(\sigma^{-1})$, и применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\left|\int\limits_Q\int \omega\varphi\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi_\sigma dxdt\right| = \left|\int\limits_0^T\int\limits_{U_{2\sigma}} \omega\varphi\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi_\sigma dxdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int\limits_0^T\int\limits_{U_{2\sigma}} (\omega\mathbf{v})^2\,dx\right]^{1/2}\left[\int\limits_0^T\int\limits_{U_{2\sigma}} \varphi^2(\nabla\varphi_\sigma)^2\,dxdt\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\int\limits_0^T\int\limits_{U_{2\sigma}} (\omega\mathbf{v})^2\,dxdt,$$

где $U_{2\sigma} \equiv U_{2\sigma}(\Gamma_3)$ — 2σ — окрестность Γ_3. В силу свойств функций $\mathbf{w}$, ω из этого неравенства следует, что последнее слагаемое в (2.6) стремится к нулю при $\sigma \to 0$. Это означает, что $\mathbf{v}$ удовлетворяет интегральному тождеству (2.1) для любой функции $\varphi \in \Phi$ и, следовательно, является обобщенным решением задачи (1.1) в смысле определения 2.1.

Итак, существование решения задачи (1.1) доказано для гладкой функции $\omega_0(x)$. В общем случае, когда $\mathbf{v}_0(x) \in C^1(\bar\Omega)$ и, следовательно, $\omega_0(x) \in C(\bar\Omega)$, существование решения задачи (1.1) доказывается с помощью приближения функции $\omega_0(x)$ последовательностью достаточно гладких функций и последующего предельного перехода.

Установим теперь некоторые свойства обобщенного решения. Прежде всего в силу $\mathrm{rot}\,\mathbf{w} \in L^\infty(Q)$ и условия I можно показать, используя результаты [5], что $\nabla\mathbf{w} \in L^\infty(0,\ T;\ L^q(\Omega))$, где $q > 2$ — произвольное число. Из уравнений Эйлера так же, как и в [1], получаем, что $\mathbf{w}' \in L^q(Q)$ и, следовательно, в силу теорем вложения $\mathbf{w} \in C^\theta(\bar Q)$, где $\theta < 1$ — произвольное положительное число.

Кроме того, согласно [5], поток $\mathbf{v} \in \mathbf{u} + \mathbf{w}$ удовлетворяет в окрестности $U(x_0,\ t_0)$ каждой точки $(x_0,\ t_0) \in \bar Q$ квазиусловию Липшица

$$(2.7)\qquad |\mathbf{v}(x,\ t) - \mathbf{v}(y,\ t)| \leqslant K_0|x - y|(1 + |\ln|x - y||),$$

где $(x,\ t)$, $(y,\ t) \in U(x_0,\ t_0)$ — произвольные точки; K_0 — постоянная, не зависящая от x, y, t. Условие (2.7), как известно, обеспечивает однозначную разрешимость в некоторой окрестности точки $(x,\ t)$ задачи

$$(2.8)\qquad y' = \mathbf{v}(y,\ \tau),\ \ y|_{\tau=t} = x,$$

решения $y = y(x,\ t,\ \tau)$ которой будем называть траекториями потока $\mathbf{v}$.

Следовательно, через каждую точку $(x, t) \in \overline{Q}$ проходит единственная траектория потока $\mathbf{v}$. Используя результаты теории динамических систем, можно показать, что каждая траектория потока $\mathbf{v}$ начинается на $\overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Omega}_0$ и заканчивается на $\overline{\Sigma}_2 \cup \overline{\Omega}_T$. Здесь через Ω_0 и Ω_T обозначены нижнее и верхнее основания цилиндра Q. Можно показать, что функция $y(x, t, \tau)$ непрерывна (по Гельдеру) по x, t и непрерывно дифференцируема по τ всюду в $\overline{Q} \times [0, T]$.

Введем для каждой точки $(x, t) \in \overline{Q}$ функции $\tau_0(x, t)$ и $y_0(x, t)$, представляющие собой время и место входа траектории $y(x, t, \tau)$ в область Ω. Рассуждая так же, как и в [1] при доказательстве лемм 6.1, 6.2, можно показать, что τ_0, $y_0 \in C(\overline{Q})$ и функция $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ имеет представление

$$\omega(x, t) = \begin{cases} 0, & \tau_0(x, t) > 0; \\ \omega_0(y_0(x, t)), & \tau_0(x, t) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Из (2.9) и условий II, в частности, следует, что $\omega(x, t) \in C(\overline{Q})$. В результате приходим к теореме.

Т е о р е м а 2.1. Пусть выполняются условия I—III. Тогда существует обобщенное решение $\mathbf{v}(x, t)$ задачи (1.1), причем $\mathbf{v} \in C^\theta(\overline{Q})$, $0 < \theta < 1$, а функция $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ непрерывна в $\overline{Q}$ и имеет представление (2.9).

Замечание 2.1. Если предположить, что начальные и граничные функции являются достаточно гладкими, то, используя (2.9) и методы работы [1], можно показать, что обобщенное решение на самом деле классическое и единственное.

Введем обозначение

$$\|\omega_0(x)\|_{C(\overline{\Omega})} = \lambda.$$

В дальнейшем число λ будем считать параметром, изменяющимся в пределах $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

3. Асимптотические свойства траекторий. Изучим асимптотические свойства решений задачи (2.8), определяющих траектории $y(x, t, \tau)$ потока $\mathbf{v}$. Из результатов п. 1 и 2 следует, что $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, где $\mathbf{u}$ является решением задачи (1.4), а $\mathbf{w} \in C^\theta(\overline{Q})$, причем

$$\|\mathbf{w}\|_{C^\theta(\overline{Q})} \leqslant K_1\lambda. \tag{3.1}$$

Здесь K_1 — некоторая постоянная, зависящая от θ.

Условимся о следующей терминологии. Если в некоторый момент времени $\tau_1 \geqslant 0$ $y_1 = y(x, t, \tau_1) \in \overline{\Gamma}_1$ (или $\overline{\Gamma}_2$), то будем говорить, что траектория $y(x, t, \tau)$ в момент τ_1 входит в область Ω (соответственно выходит из Ω), а точку (y_1, τ_1) назовем точкой входа (точкой выхода) данной траектории по отношению к области Ω. Если во все моменты времени $\tau \geqslant t$ траектория $y(x, t, \tau)$ целиком содержится в области $\Omega \cup \Gamma_0$, то такую траекторию будем называть асимптотической в Ω.

Рассмотрим в Ω автономную систему

$$x' = \mathbf{u}_\infty(x). \tag{3.2}$$

Решения системы (3.2) называются, как известно, линиями тока векторного поля $\mathbf{u}_\infty(x)$ в области Ω. Используя условия IV, можно показать, что во всех точках $\overline{\Omega}$ $\mathbf{u}_\infty \neq 0$ [3]. Отсюда легко вывести, что через каждую точку $x \in \overline{\Omega}$ проходит единственная линия тока, причем каждая линия тока входит в Ω через участок $\overline{\Gamma}_1$ и выходит из Ω через $\overline{\Gamma}_2$. Поскольку линии тока совпадают с траекториями потока $\mathbf{u}_\infty$, этот факт означает, что в области Ω не существует асимптотических траекторий потока $\mathbf{u}_\infty$. Аналогичный факт имеет место для нестационарного потока $\mathbf{v}(x, t)$.

Обозначим через t_0 то значение времени t, начиная с которого выполняется соотношение

$$|\gamma(x, t) - \gamma_\infty(x)| \leqslant \varepsilon/2, \ \mathbf{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \ t \geqslant t_0,$$

где ε — то же самое, что и в IV. Такое значение t_0 существует в силу равномерной сходимости γ к γ_∞. Для любого множества D через $U_\delta(D)$ будем обозначать δ окрестность множества D относительно $\overline{\Omega}$, т. е. множество точек $x \in \overline{\Omega}$, удовлетворяющих условию $\mathrm{dist}\,(x, D) < \delta$. Положим $\Omega_\delta = \Omega \setminus U_\delta(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

Лемма 3.1. Существуют такие числа $\delta = \delta(\varepsilon)$ и $s = s(\varepsilon)$, что в области $U_\delta(\Gamma_i)$ не существует асимптотических траекторий потока $\mathbf{v}$ при $\lambda \in [0, 1]$, причем любая траектория с начальной точкой в $U_\delta(\Gamma_i) \times I_{t_0}$ выходит из $U_\delta(\Gamma_i)$ $(i = 1, 2)$ за промежуток времени $\Delta t \leqslant s$.

Доказательство. Рассмотрим сначала участок Γ_2. Предположим для простоты, что Γ_2 является отрезком оси x_2, область Ω лежит в полуплоскости $x_1 < 0$ и в некоторой окрестности угловых точек A_3 и A_4 непроницаемые участки границы Γ являются отрезками прямых. Если это не так, то сначала необходимо отобразить некоторую окрестность Γ_2 относительно Ω на область с границей указанного типа (например, с помощью конформного отображения) и далее провести аналогичные рассмотрения.

Согласно введенному предположению и в силу (1.4), (1.5) имеем $w_1|_{\Gamma_2} = 0$, $u_1|_{\Gamma_2} = -\gamma(x, t)$. Из свойств потока $\mathbf{u}$ и соотношения (3.1) следует, что найдется такая окрестность $U_\delta(\Gamma_2)$, что при $(x, t) \in U_\delta(\Gamma_2) \times I_{t_0}$ $|w_1(x, t)| \leqslant \varepsilon/8$, $u_1(x, t) \geqslant \varepsilon/4$ и, следовательно, $v_1(x, t) = u_1(x, t) + w_1(x, t) \geqslant \varepsilon/8$ при всех $\lambda \in [0, 1]$. Положим $s = 8\,\delta/\varepsilon$. Тогда, очевидно, любая траектория с начальной точкой в $U_\delta(\Gamma_2) \times I_{t_0}$ выйдет из $U_\delta(\Gamma_2)$, а следовательно, и из Ω через время $\Delta t \leqslant s$. Это, в частности, означает, что в области $U_\delta(\Gamma_2)$ не существует асимптотических траекторий потока $\mathbf{v}$.

Подобным же образом рассматривается участок Γ_1, только вместо потока $\mathbf{v}$ здесь удобнее рассматривать поток $-\mathbf{v}$. Лемма доказана.

Замечание 3.1. Из доказательства леммы заметим, что любая траектория потока $\mathbf{v}$, выходящая из $U_\delta(\Gamma_1)$, входит в Ω_δ, а любая траектория, выходящая из $U_\delta(\Gamma_2)$, выходит и из Ω.

Выясним теперь поведение траекторий потока $\mathbf{v}$ вне окрестностей участков Γ_1 и Γ_2. Предварительно изучим свойства траекторий потенциального потока u, определяемых системой уравнений

$$z' = \mathbf{u}(z, t). \tag{3.3}$$

Условие (1.6) означает, что система (3.3) относится к классу так называемых асимптотически автономных систем, свойства решений которых близки к свойствам решений автономной системы (3.2) [6, 7]. В частности, можно показать, что в области Ω не существует асимптотических траекторий потока $\mathbf{u}$ и все траектории потока $\mathbf{u}$, начинающиеся при $t = 0$ на $\overline{\Omega}$, покинут $\overline{\Omega}$ за конечное время t_∞.

Действительно, для потока $\mathbf{u}_\infty$ такое время существует и конечно. Обозначим его через τ_∞. Положим $K_2 = \|\nabla \mathbf{u}_\infty\|_{C(\overline{\Omega}_{\delta/2})}$, $\varkappa = \delta/4\tau_\infty \times \exp(2K_2\tau_\infty)$, и пусть $t_1 \geqslant t_0$ — то значение времени, начиная с которого, $\|\mathbf{u}(x, t) - \mathbf{u}_\infty(x)\|_{C(\overline{\Omega})} < \varkappa$. Возьмем в области $\overline{\Omega}_\delta$ произвольную точку x_1 и обозначим через $x = x(x_1, t_1, \tau)$ и $z = z(x_1, t_1, \tau)$ решения систем (3.2), (3.3), удовлетворяющие начальному условию

$$x|_{\tau=t_1} = z|_{\tau=t_1} = x_1.$$

Разность $z - x$ является, очевидно, решением задачи

$$\frac{d}{dt}(z-x) = \mathbf{u}(z, t) - \mathbf{u}_\infty(z) + \mathbf{u}_\infty(z) - \mathbf{u}_\infty(x), \tag{3.4}$$

$$(z-x)|_{\tau=t_1} = 0.$$

Умножая (3.4) скалярно на $y - z$ и предполагая, что $x, z \in \bar{\Omega}_{\delta/2}$, получаем

$$\frac{d}{dt}|z-x| \leqslant 2K_2|z-x| + 2\varkappa.$$

Отсюда, применяя лемму Гронуолла, выводим, что в момент t_2 выхода траектории $x(x_1, t_1, \tau)$ из $\bar{\Omega}_{\delta/2}$ имеем

$$|z(x_1, t_1, t_2) - x(x_1, t_1, t_2)| < \delta/2,$$

и, следовательно, $z(x_1, t_1, t_2) \in U_\delta(\Gamma_2)$. Поскольку x_1 — произвольная точка, то, применяя лемму 3.1, справедливую, очевидно, и для потока $\mathbf{u}$, приходим к искомому результату. В качестве времени t_∞ можно взять величину $t_1 + \tau_\infty + 2s$. Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

Л е м м а 3.2. Существует такое число t_∞, что любая траектория потока $\mathbf{u}$ с начальной точкой в $\bar{\Omega} \times I_0$ выходит из Ω за промежуток времени $\Delta t \leqslant t_\infty$.

Используя лемму 3.2, получим аналогичные результаты для потока $\mathbf{v}$. Именно, положим $K_3 = \sup\limits_{0 \leqslant t < \infty} \|\nabla \mathbf{u}\|_{C(\bar{\Omega}_{\delta/2})}$, $\lambda_0 = \delta/4K_1 t_\infty \exp(2K_3 t_\infty)$. Тогда, рассуждая так же, как и при доказательстве утверждения леммы 3.2, приходим к следующему результату.

Л е м м а 3.3. Существуют такие числа $\lambda_0 > 0$ и S, что при всех $\lambda \in [0, \lambda_0]$ любая траектория потока $\mathbf{v}$ с начальной точкой в $\bar{\Omega}_\delta \times I_{t_0}$ выходит из $\bar{\Omega}_\delta$ в область $U_\delta(\Gamma_2)$ за промежуток времени $\Delta t \leqslant S$.

Положим $T_\infty = t_0 + 2s + S$. Тогда из лемм 3.1, 3.3 очевидным образом вытекает теорема.

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполняются условия (1.6), (3.1). Тогда найдутся такие числа λ_0 и T_∞, что при всех $\lambda \in [0, \lambda_0]$ в области Ω не существует асимптотических траекторий потока $\mathbf{v}$, причем любая траектория потока $\mathbf{v}$, начинающаяся при $t = 0$ на $\bar{\Omega}$, выходит из Ω в момент $t \leqslant T_\infty$.

Из теорем 2.1, 3.1 очевидным образом вытекает основная теорема.

Т е о р е м а 3.2. Пусть выполняются условия I—IV. Тогда существуют такие числа $\lambda_0 > 0$ и T_∞, что при всех $\lambda \in [0, \lambda_0]$ и $t \geqslant T_\infty$ $\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv 0$ и, следовательно, $\mathbf{v}(x, t) \equiv \mathbf{u}(x, t)$.

Теорема 3.2 имеет два очевидных следствия.

Следствие 1. (Теорема об установлении). В условиях теоремы 3.2 решение задачи (1.1) при всех $\lambda \in [0, \lambda_0]$ равномерно стремится при $t \to \infty$ к потенциальному потоку $\mathbf{u}_\infty(x)$ как единственному решению соответствующей стационарной задачи (1.2). Кроме того, если $\gamma(x, t) \equiv \gamma_\infty(x)$ при $t \geqslant T_\infty$, то решение задачи (1.1) устанавливается к решению задачи (1.2) за конечное время T_∞.

Следствие 2. (Теорема об асимптотической устойчивости потенциального потока). В условиях теоремы 3.2 потенциальный поток $\mathbf{u}_\infty(x)$ является асимптотически устойчивым относительно малых возмущений, потенциальных на входе области.

Автор выражает благодарность А. В. Кажихову за ценные замечания при обсуждении результатов работы.

Поступила 26 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев Г. В.** О разрешимости неоднородной краевой задачи для двумерных нестационарных уравнений динамики идеальной жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 24. Новосибирск, 1976.
2. **Алексеев Г. В.** Об исчезающей вязкости в двумерных стационарных задачах гидродинамики несжимаемой жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 10. Новосибирск, 1972.
3. Алексеев Г. В. О единственности и гладкости плоских вихревых течений идеальной жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 15. Новосибирск, 1973.
4. **Kato T.** On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation.— «Archive for Rational Mechanics and Analysis», 1967, vol. 25, N 3, p. 188—200.
5. **Wigley N.** Mixed boundary value problems.— «Mathematische Zeitschrift», 1970, Bd 115, N 1, S. 33—52.
6. **Markus L.** Asymptotically autonomous differential systems.— In: Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations. Vol. III. Princeton, 1956.
7. **Yoshizawa T.** Asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations.— In: Contributions to differential equations. Vol. 1. N. Y., Interscience, 1963.

УДК 541.24 : 532.5

ОБ УГЛАХ НАКЛОНА ГРАНИЦЫ В ДВИЖУЩИХСЯ ЖИДКИХ СЛОЯХ

О. В. Воинов

(*Москва*)

Рассматриваются ползущие течения в тонких слоях вязкой жидкости с учетом капиллярных сил и находятся решения, описывающие углы наклона границы.

Краевой угол жидкости на твердой поверхности в статическом состоянии выражается через удельные поверхностные энергии. При движении жидкости краевой угол (динамический) отличается от статического. Впереди жидкой массы, растекающейся по твердой поверхности, может наблюдаться очень тонкая «первичная» пленка [1, 2]. Имеются указания на то, что величина динамического краевого угла зависит от вязких сил [3].

1. Установившееся течение жидкого слоя по сухой поверхности и краевые углы. Внутри тонкого жидкого слоя на плоской твердой поверхности давление p отличается от давления p_0 в газе на величину капиллярного перепада $p = p_0 - \sigma\partial^2 h/\partial x^2$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения; x — координата вдоль слоя; h — толщина слоя).

Уравнение движения слоя при малых числах Рейнольдса под действием капиллярных сил можно записать при помощи гидродинамической теории смазки

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sigma}{3\mu} h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) = -\frac{\partial h}{\partial t}.$$

В работе [4] исследованы нестационарные решения этого уравнения в линейном приближении. Рассмотрим стационарные решения в нелинейной постановке. Для стационарной волны

$$h = h(x - vt)$$