

ЗАДАЧА О ПОРШНЕ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ
С РЫХЛЕНИЕМ

В. В. Башуров, Н. А. Скоркин

(Челябинск)

Рассматривается автомодельная задача о движении сферического поршня в среде с «сухим» трением и дифференциальной связью между первым инвариантом тензора напряжений и первым и вторым инвариантами тензора скоростей деформаций.

Для случая течения с ударной волной методом стационарной волны получены необходимые соотношения на сильном разрыве. Выяснено, что скорость поршня, а также соотношение между коэффициентами рыхления и сухого трения определяют гладкость течения.

В [1] описаны модели непрочных грунтов, в которых второй инвариант девиатора тензора напряжений T_2 связан с давлением соотношением

$$(1) \quad \sqrt{T_2} = \pm \kappa p$$

где κ — коэффициент сухого трения и знак выбирается в зависимости от знака второго инварианта девиатора тензора скоростей деформаций T_2 . Такие модели являются частными видами моделей пластических тел и называются моделями сред с сухим трением. Условие гиперболичности системы уравнений движения накладывают ограничения на возможные значения коэффициента сухого трения $|\kappa| < 3/4$.

Для определения давления необходимо ввести дополнительное соотношение, аналогичное соотношению $p_s = f(\rho)$ в гидродинамике. При движении грунта в отличие от движения жидкостей изменение давления может происходить не только за счет изменения плотности, но также за счет роста сдвиговых деформаций. Подобные модели предложены в [2-4]. В этих моделях приращение давления представляется в виде суммы двух слагаемых, первое из которых отвечает гидростатическому сжатию, а второе — изменению давления за счет изменения сдвиговых деформаций

$$(2) \quad dp = dp_h + dp_\alpha, \quad dp_h = F d\rho \\ dp_\alpha = F \rho q \Psi(p, \rho) \sqrt{T_2} dt$$

Функция рыхления $\Psi(p, \rho)$ должна удовлетворять ряду условий: 1) функция $\Psi(p, \rho)$ знакопостоянна; 2) система уравнений движения и уравнений состояния 1), 2) должна иметь действительные характеристики. Поскольку наличие действительных характеристик связано с существованием конечной скорости распространения малых возмущений в среде, которая равна

$$(3) \quad a^2 = F(1 \pm q\Psi(p, \rho)) \left(1 \pm \frac{4}{3} \kappa\right)$$

то функция рыхления должна удовлетворять неравенству

$$1 \pm q\Psi(p, \rho) > 0$$

Функция рыхления может быть выбрана многими способами.

В частности, она может быть представлена в двух видах

$$\begin{aligned}\Psi(p, \rho) &= \Psi_0 \equiv \text{const} \\ \Psi(p, \rho) &= 1 - \left(\rho^* + \frac{1}{F} p \right) \rho^{-1}, \quad \rho_0 > \rho^*\end{aligned}$$

Для выяснения влияния рыхления на вид ударной адиабаты, на профили скоростей и давлений, на качественную картину течения будем использовать произвольную форму записи функции $\Psi(p, \rho)$. Для иллюстрации результатов выберем функцию рыхления $\Psi(p, \rho)$ в виде $\Psi = \Psi_0$. Такой выбор функции $\Psi(p, \rho)$ не ограничивает полученных результатов, но значительно упрощает доказательства и вычисления. Те случаи, в которых характер функции рыхления влияет на выводы, будут оговорены особо.

Уравнения движения и уравнения состояния в сферической системе координат принимают вид

$$\begin{aligned}(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^r}{\partial r} + \frac{2(\sigma^r - \sigma^\theta)}{\rho r} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u\rho}{r} &= 0 \\ \sqrt{T_2} &= \frac{\sigma^r - \sigma^\theta}{2} = \pm \kappa p, \quad p \geq 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial r} &= F \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + q \Psi(p, \rho) \rho \left| \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right| \right) \\ \sqrt{T_2} &= \left| \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right|\end{aligned}$$

Уравнения движения сыпучей среды с уравнением состояния (4) должны быть дополнены соотношениями на фронте ударной волны. Если интегралы сохранения массы и импульса сразу дают два необходимых соотношения, то из-за неголономности уравнения (2) третье уравнение на фронте волны может быть получено при рассмотрении структуры плоской стационарной волны, распространяющейся по сыпучей вязкой среде, в предположении, что внутри переходного слоя, имитирующего ударную волну, сохраняются прежние уравнения состояния. Подобными методами структура ударных волн для иных уравнений состояния грунта рассмотрена в [5,6].

Уравнения движения плоского одномерного течения вязкой сыпучей среды имеют в лагранжевых координатах вид

$$\begin{aligned}(5) \quad \frac{\partial V}{\partial t} &= V_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = V_0 \frac{\partial (\sigma^x + S)}{\partial x} \\ \sigma^x &= -p + \sqrt{T_2}, \quad p = -1/3 (\sigma^x + 2\sigma^y) \\ \sqrt{T_2} &= \frac{\sigma^x - \sigma^y}{2} = \kappa p \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{F}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + q \Psi(p, \rho) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| V_0 \right) \\ S &= -v \frac{V_0}{V} \frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}$$

Здесь V — удельный объем, ρ — плотность, u — скорость, σ^x и σ^y — напряжения, p — давление.

Рассматривая стационарное течение, отвечающее движению ударной волны со скоростью c по покоящейся среде с $\rho = \rho_0$ и $p_0 = 0$, вводя пере-

менную $w = x - ct$, преобразуем систему (5) к виду

$$(6) \quad \begin{aligned} -c \frac{dV}{dw} &= V_0 \frac{du}{dw} \\ -c \frac{du}{dw} &= -V_0 \left(1 - \frac{4}{3} \kappa\right) \frac{dp}{dw} - V_0 \frac{dS}{dw} \\ -c \frac{dp}{dw} - \frac{F}{V^2} \left(c \frac{dV}{dw} - q \Psi(p, \rho) c \beta \frac{dV}{dw}\right) \\ \beta &= \text{sign} \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

Пусть $M = V_0^{-1}c$ — поток вещества через произвольную плоскость. Интегрируя первые два уравнения в (6), получим

$$MV + u = MV_0 - c, \quad Mu - (1 - \frac{4}{3}\kappa)p - S = -Mc$$

Третье соотношение представляет собой дифференциальное уравнение

$$(7) \quad \frac{dp}{dV} = -\frac{F}{V^2} (1 - q\beta\Psi(p, \rho))$$

Интегрирование этого уравнения дает третье соотношение, аналогичное соотношению Гюгонио для изотермических газов и связывающее давление и удельный объем во фронте волны, $p = f(V)$. Вид функции $f(V)$ существенно зависит от вида функции рыхления $\Psi(p, \rho)$. Интегрирование уравнения (7) ведется с учетом знака производной $\partial V / \partial t$ во фронте волны. Для $\Psi = \Psi_0$ можно показать, что величина V монотонно убывает, $\beta = -1$, и уравнение (7) принимает вид

$$(8) \quad \frac{dp}{dV} = -\frac{F}{V^2} (1 + q\Psi_0)$$

Можно показать, что для функции рыхления $\Psi(p, \rho) = 1 - (\rho^* + F^{-1}p)\rho^{-1}$ вывод о монотонности плотности во фронте волны справедлив. Вид соотношения (8) не зависит от вида введенной вязкости S .

Структура ударной волны определяется решением уравнения

$$\begin{aligned} M^2(V_0 - V) - (1 - \frac{4}{3}\kappa)p - S &= 0 \\ M^2(V_0 - V) - \left(1 - \frac{4}{3}\kappa\right)f(V) + v \frac{c}{V} \frac{dV}{dw} &= 0 \end{aligned}$$

При $w \rightarrow \pm \infty$ $dV/dw \rightarrow 0$ и соотношение, связывающее скорость ударной волны с удельной плотностью за фронтом волны, принимает вид

$$(9) \quad M^2(V_0 - V) = (1 - \frac{4}{3}\kappa)f(V)$$

Для выбранной функции $\Psi(p, \rho) = \Psi_0$ и $F = \text{const}$ функция $f(V)$ имеет вид

$$(10) \quad f(V) = F \left(1 + q\Psi_0\right) \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right)$$

Производная $f'' > 0$ и уравнение (9) имеет два корня при условии, что

$$\begin{aligned} M^2 &> \frac{F}{V_0^2} (1 + q\Psi_0) \left(1 - \frac{4}{3}\kappa\right) = \frac{a_0^2}{V_0^2} \\ M^2 &< \frac{F}{V_1^2} (1 + q\Psi_0) \left(1 - \frac{4}{3}\kappa\right) = \frac{a_1^2}{V_1^2} \\ c^2 &> a_0^2, \quad c^2 < a_1^2 \end{aligned}$$

Индекс 1 относится к состоянию за фронтом волны. Таким образом, ударная волна должна двигаться относительно вещества перед фронтом.

со сверхзвуковой скоростью, а относительно вещества за фронтом — с дозвуковой.

Для $\Psi(p, \rho) = 1 - (\rho^* + F^{-1}p) \rho^{-1}$ интегрирование уравнения (7) дает

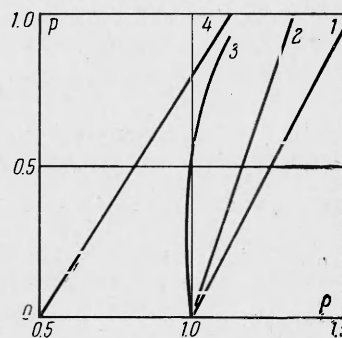
$$(11) \quad p = F \left[(\rho - \rho^*) - \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^q (\rho_0 - \rho^*) \right]$$

При $q = 0$ это соотношение, как и соотношение (10), дает условие $p = F(\rho - \rho_0)$ для нерыхлящихся сред; при $q \neq 0$ для больших сжатий уравнение (11) принимает форму

$$p = F(\rho - \rho^*)$$

Для этой функции рыхления также справедлив вывод о соотношении между скоростью ударной волны и скоростями звука до и после скачка сделанный для $\Psi(p, \rho) = \Psi_0$.

На фиг. 1 приведены кривые $p = f(\rho)$ для нерыхлящейся среды (1), для среды с функцией рыхления $\Psi = \Psi_0$ (2) и для среды с функцией рыхления $\Psi(p, \rho) = (1 - (\rho^* + p/F) \rho^{-1})$ (3). Прямая 4 соответствует уравнению $p = F(\rho - \rho^*)$.



Фиг. 1

Рассмотрим задачу о движении сферического поршня в сыпучей среде, описываемой уравнениями состояния

$$\frac{dp}{dt} = F \left(\frac{\partial p}{\partial t} - q \rho \Psi(p, \rho) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \right)$$

$$\frac{\sigma^r - \sigma^\theta}{2} = \kappa p, \quad \kappa < 0$$

Поршень начинает свое движение из центра координат и движется с постоянной скоростью u_p . Невозмущенная среда характеризуется плотностью $\rho = \rho_0$, давлением $p = 0$, скоростью $u = 0$. Анализ определяющих параметров показывает, что движение поршня автомодельно.

Вводя автомодельные переменные

$$\lambda = rt^{-1} \left(\left(1 - \frac{4}{3} \kappa \right) F \right)^{-1/2}, \quad U = u \left(\left(1 - \frac{4}{3} \kappa \right) F \right)^{-1/2}$$

$$R = \rho \rho_0^{-1}, \quad P = p \rho_0^{-1} F^{-1}, \quad \alpha = 4\kappa \left(1 - \frac{4}{3} \kappa \right), \quad -\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 0$$

и преобразуя исходные уравнения движения и состояния, получим

$$(12) \quad \frac{dU}{d\lambda} (U - \lambda) + \frac{1}{R} \frac{dP}{d\lambda} = \frac{\alpha P}{R\lambda}, \quad \frac{dR}{d\lambda} (U - \lambda) + R \frac{dU}{d\lambda} = -\frac{2UR}{\lambda}$$

$$\frac{dP}{d\lambda} (U - \lambda) + R(1 + q\Psi(P, R)) \frac{dU}{d\lambda} = -(2 - q\Psi(P, R)) \frac{UR}{\lambda}$$

Граничные условия для системы (12), соответствующие постоянной скорости поршня при $\lambda = u_p \left(\left(1 - \frac{4}{3} \kappa \right) F \right)^{-1/2}$ и покою на бесконечности, имеют вид: $U = \lambda$ на поршне, $U \rightarrow 0$, $P \rightarrow 0$, $R \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Разрешая систему (12) относительно производных $dU/d\lambda$, $dP/d\lambda$, $dR/d\lambda$,

получим

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{dU}{d\lambda} &= \frac{\Delta_1}{(U-\lambda)\Delta}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = \frac{\Delta_2}{(U-\lambda)\Delta}, \quad \frac{dR}{d\lambda} = \frac{\Delta_3}{(U-\lambda)\Delta} \\ \Delta_1 &= (U-\lambda) [(U-\lambda) \alpha PR^{-1} + U (2 - q\Psi(P, R))] \lambda^{-1} \\ \Delta_2 &= -(U-\lambda) [(U-\lambda) UR (2 - q\Psi(P, R)) + \alpha P (1 + \\ &\quad + q\Psi(P, R))] \lambda^{-1} \\ \Delta_3 &= -[2(U-\lambda)^2 UR - 3URq\Psi(P, R) + (U-\lambda) \alpha P] \lambda^{-1} \\ \Delta &= (U-\lambda)^2 - (1 + q\Psi(P, R)) \end{aligned}$$

Безразмерная скорость распространения малых возмущений согласно формуле (3) определяется выражением

$$a^2 = R (1 \pm q\Psi(P, R))$$

К уравнениям (12) необходимо присоединить условия на сильном разрыве. В автомодельных переменных эти условия принимают вид

$$(14) \quad R(U-\lambda) = -\lambda, \quad P + RU(U-\lambda) = 0, \quad P = f(R)$$

Для выбранных ранее функций рыхления третье соотношение в (14) принимает вид соответственно

$$(15) \quad P = (R-1)(1 + \Psi_0)$$

$$(16) \quad P = (R - R^*) - \left(\frac{1}{R}\right)^q (1 - R^*), \quad R^* = \rho^* \rho_0^{-1}$$

Система алгебраических уравнений для определения особых точек системы (12) имеет вид

$$(17) \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0, \quad (U-\lambda)\Delta = 0$$

Условие $U-\lambda=0$ дает особые точки, определяемые системой

$$U = \lambda, \quad UR\Psi(P, R) = 0$$

Пусть $U \neq \lambda$. В этом случае, умножая первое уравнение на $-\alpha P$, второе на $U-\lambda$ и складывая их, получим третье уравнение из (17). Аналогично получаем, что четвертое уравнение в (17) является следствием первых двух. Таким образом, для $U \neq \lambda$ система для определения особых точек принимает вид

$$\begin{aligned} (U-\lambda)^2 - 1 - q\Psi(P, R) &= 0 \\ \alpha(U-\lambda)P + UR(2 - q\Psi(P, R)) &= 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим поведение интегральных кривых системы в окрестности особой точки $U=0, P=0, R=1, \lambda=\lambda_C = (1 + q\Psi(0, 1))^{1/2}$. Согласно [7] рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений, полученных из системы (12). Обозначая $S = R-1, \delta = \lambda - \lambda_C$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= -AU + \alpha\lambda_C P, \quad \frac{dP}{d\tau} = -\lambda_C AU + \alpha\lambda_C^2 P \\ \frac{dS}{d\tau} &= -\frac{A}{\lambda_C^2} U + \alpha P, \quad \frac{d\delta}{d\tau} = 2\lambda_C^2 U - \lambda_C BS - 2\lambda_C^2 \delta - \lambda_C DP \\ A &= 2 - q\Psi(0, 1), \quad B = -q \frac{\partial\Psi(0, 1)}{\partial R}, \quad D = -q \frac{\partial\Psi(0, 1)}{\partial P} \end{aligned}$$

Первые два уравнения могут быть решены независимо от остальных

$$U = C_1 + C_2 \exp(\xi\tau), \quad P = C_1 \frac{A}{\alpha\lambda_C} + C_2 \lambda_C \exp(\xi\tau)$$

где ξ — корень характеристического уравнения $\xi^2 + (A - \alpha\lambda_C^2)\xi = 0$, $\xi = \alpha\lambda_C^2 - A$. Для рассмотрения тех траекторий, которые входят в особую точку, положим $C_1 = 0$. Так как $\xi < 0$, то траектории входят в особую точку при $\tau \rightarrow \infty$.

Подставляя полученные выражения для U и P в оставшиеся уравнения, интегрируя их и отбрасывая те решения, которые не проходят через особую точку, получим (для $\xi + 2\lambda_C^2 \neq 0$)

$$\begin{aligned} U &= C_2 \exp(\xi\tau), \quad P = C_2 \lambda_C \exp(\xi\tau), \quad S = C_2 \lambda_C^{-1} \exp(\xi\tau) \\ \delta &= C_2 (\xi + 2\lambda_C^2)^{-1} ((2 - D)\lambda_C^2 - B) \exp(\xi\tau) + C_4 \exp \times \\ &\times (-2\lambda_C^2 \tau) \end{aligned}$$

Характер интегральных кривых зависит от знака величины $\xi + 2\lambda_C^2$. Пусть $\xi + 2\lambda_C^2 < 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \exp(\xi\tau) &= C_2^{-1} U \\ \delta &= ((2 - D)\lambda_C^2 - B)(\xi + 2\lambda_C^2)^{-1} U + C_4 (UC_2^{-1})^{-2\lambda_C^2/\xi} \end{aligned}$$

Так как $2\lambda_C^2 + \xi < 0$, то при $C_4 \neq 0$ $(d\delta/dU)|_{u \rightarrow 0} \rightarrow \infty$. Это означает, что все траектории, за исключением одной, входят в особую точку с нулевым наклоном. Решение при $C_4 = 0$ определяет вторую сепаратрису, входящую в особую точку с наклоном

$$\frac{d\delta}{dU} = \frac{(2 - D)\lambda_C^2 - B}{\xi + 2\lambda_C^2}$$

Такое поведение траекторий в окрестности особой точки λ_C характерно и для сыпучих сред без рыхления [8]. Значения $C_2 > 0$ дают те траектории, на которых $U > 0$, $P > 0$, $R > 0$, т. е. соответствуют физически реализуемым состояниям.

Покажем, что траектории, являющиеся продолжением этих решений в окрестности особой точки $\lambda = \lambda_C$, физически реализуемы, т. е. вдоль них $U > 0$, $P > 0$, $R > 0$ до пересечения с прямой $U = \lambda$. Таким образом, будет доказано утверждение, что движение поршня в сыпучей среде с рыхлением может происходить без образования ударных волн и слабых разрывов.

Выберем функцию рыхления в виде $\Psi(P, R) = \Psi_0$. В этом случае, так как $dU/d\lambda < 0$, $dP/d\lambda < 0$ в окрестности особой точки $\lambda = \lambda_C$, то $\Delta < 0$ и знаки производных $dU/d\lambda$ и $dP/d\lambda$ определяются знаками Δ_1 и Δ_2 . Если $U > 0$, $P > 0$, то $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$ и, следовательно, вдоль всей траектории $dU/d\lambda < 0$, $dP/d\lambda < 0$. Это означает, что величины скорости и давления монотонно возрастают от фронта возмущения к поршню. Покажем, что $R > 0$. В окрестности особой точки $dR/d\lambda < 0$, $R > 0$ и, следовательно, если R обращается в нуль в точке $\lambda = \lambda^*$, то $(dR/d\lambda)|_{\lambda=\lambda^*} > 0$. Но из (13) следует, что

$$dR/d\lambda = -\alpha P/\lambda^* \Delta < 0$$

т. е. R не обращается в нуль.

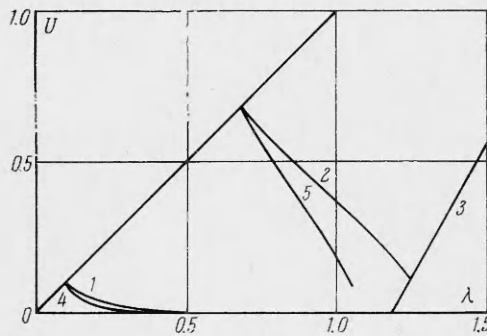
Профиль R существенно немонотонен. Это следует из того, что $dR/d\lambda < 0$ в окрестности особой точки, а при движении к поршню $dR/d\lambda \rightarrow +\infty$.

Вывод о существовании непрерывных решений, монотонности профилей U и P , о немонотонности профиля R справедлив и для функции рыхления вида $\Psi = 1 - (\rho^* + p/F)\rho^{-1}$ и $\Psi = 1 - \rho^*\rho^{-1}$.

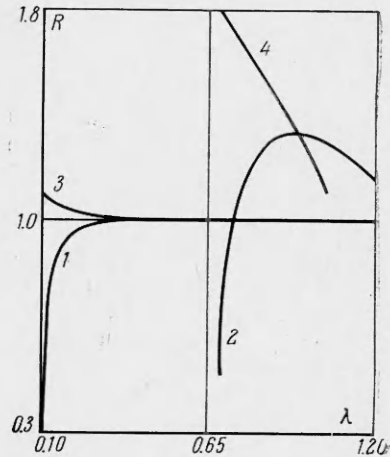
Решение, входящее в особую точку с наклоном $((2 - D)\lambda_C^2 - B) \cdot (\xi + 2\lambda_C^2)^{-1}$ соответствует режиму течения со слабым разрывом, рас-

пространяющимся впереди поршня, и определяет при пересечении с прямой $U = \lambda$ значение предельной скорости поршня U_p^* , до которой возможен режим непрерывного течения. При $U_p > U_p^*$ единственной физически реализуемой траекторией является траектория, связывающая точку $U = \lambda$ с некоторой точкой на ударной волне.

Покажем, что вдоль таких траекторий $\Delta < 0$ и, следовательно, профили U и P монотонно возрастают при движении от ударной волны к



Фиг. 2



Фиг. 3

поршню. Определитель Δ представляет собой на поршне разность двух скоростей: скорости ударной волны относительно среды за фронтом и скорости звука за фронтом $1 + q\Psi(0, 1)$. Ранее показано, что эта разность отрицательна. Величины Δ_1 и Δ_2 положительны, и, следовательно аналогично случаю непрерывного течения, профили U и P монотонны.

Рассмотрим поведение профиля плотности. Из (14) следует, что на ударной волне

$$\lambda = \sqrt{Rf(R)/(R-1)}, \quad U = \sqrt{(R-1)f(R)/R}$$

$$\Delta_3 = -\frac{1}{R} [(2-\alpha)f(R) - 3q\Psi(P, R)(R-1)R]$$

Для $q\Psi(P, R) = \Psi_0$ и $f(R) = (1 + \Psi_0)(R - 1)$ получим

$$\Delta_3 = -\frac{R-1}{R} [(2-\alpha)(1 + \Psi_0) - 3\Psi_0 R]$$

При $R > R^* = \frac{1}{3}(2 - \alpha)(1 + \Psi_0)\Psi_0^{-1}$ за фронтом ударной волны плотность начинает падать. Для ударных волн достаточно большой интенсивности процесс рыхления настолько существен, что приводит к падению плотности непосредственно за фронтом ударной волны. Оценим нижнюю границу изменения R^* . Подставляя предельные значения параметров α и Ψ_0 ($\alpha_0 = 0, \Psi_0 = 1$), получим что в этом случае $R^* > \frac{4}{3}$.

Для функции рыхления вида $1 - (\rho^* + p/F)\rho^{-1}$ можно показать, что за фронтом ударной волны плотность всегда возрастает, т. е. на фронте ударной волны $\Delta_3 < 0$.

На фиг. 2 приведены профили скорости U (кривые 1 и 2), ударной адиабаты (кривая 3) для случая непрерывного и ударного режимов с функцией рыхления $\Psi = \Psi_0 = 0.4$ и значением $\alpha = -1.2$. На этой фигуре

приведены профили скорости (кривые 4 и 5) для тех же значений U_p и α в среде без рыхления ($\Psi_0 = 0$).

На фиг. 3 приведены характерные профили плотности с $\Psi_0 = 0.4$ $\alpha = -1.2$ (кривые 1 и 2), а также соответствующие плотности для среды без рыхления (кривые 3 и 4).

На фиг. 4 кривая 1 соответствует изменению давления в зависимости от плотности в движущейся частице вещества с рыхлением, кривая 2 — изменению давления с плотностью в среде без рыхления.

Рассмотрим случай $\xi + 2\lambda c^2 > 0$. Решение системы уравнений в окрестности особой точки $\lambda = \lambda_c$ определяет $\delta(U)$ в виде

$$\delta = ((2 - D)\lambda c^2 - B)(\xi + 2\lambda c^2)^{-1}U + C_4(UC_2^{-1})^{-2\lambda c^2/\xi}$$

$$\frac{d\delta}{dU} = ((2 - D)\lambda c^2 - B)(\xi + 2\lambda c^2)^{-1} - \frac{2\lambda c^2}{\xi} C_4 C_2^{-2\lambda c^2/\xi} U^{-(2\lambda c^2 + \xi)/\xi}$$

Так как $2\lambda c^2 + \xi > 0$, то при $C_2 \neq 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_c} \frac{d\delta}{dU} = ((2 - D)\lambda c^2 - B)(\xi + 2\lambda c^2)^{-1}$$

Для функции рыхления $\Psi(P, R) = \Psi_0 \lim d\delta / dU > 0$. Это означает, что почти все траектории входят в особую точку с положительным наклоном $2\lambda c^2 (\xi + 2\lambda c^2)^{-1}$, и, следовательно, движение среды не может происходить без ударной волны. Для функций рыхления других видов вопрос о возможности безударного течения должен решаться в этом случае каждый раз заново.

Характер течения в этом случае качественно не отличается от рассмотренного ударного режима течения.

Поступила 12 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Вахрамеев Ю. С. Некоторые соотношения подобия для движения сыпучей уплотняющейся среды. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
2. Николаевский В. Н. О связи объемных и сдвиговых пластических деформаций и ударных волн в мягких грунтах. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 3.
3. Николаевский В. Н. Монохроматические волны в упругой среде с локальным проявлением сухого трения. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
4. Механический эффект подземного взрыва. М., «Недра», 1971.
5. Начепский Я. А. О структуре ударных волн в упруго-пластических средах. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
6. Быковцев Г. И., Кретова Л. Д. О распространении ударных волн в упруго-пластических средах. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
7. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
8. Башуров В. В. Задача о сферическом поршне в сжимаемой среде с «сухим» трением. ПМТФ, 1973, № 1.