РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2006, том 42, № 3

УДК 681.3

О ГИПОТЕЗЕ ЗАМЕНЫ ЗАДАЧИ УЗЛОВ ТЕОРИИ ПРОСАЧИВАНИЯ ЗАДАЧЕЙ СВЯЗЕЙ

В. А. Воробьев[1], **Н. В. Лаходынова**[2]

[1]*Поморский государственный университет, Архангельск*
E-mail: vva@sanet.ru
[2]*Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томск*
E-mail: lax@tomsk.su

Описан метод замены задачи узлов теории просачивания задачей связей. Высказана гипотеза о том, что корреляции, возникающие между состояниями элементов моделируемой решетки, не изменяют значений критических вероятностей просачивания, и дано ее частичное обоснование.

Введение. Теория просачивания (перколяции) исследует вопрос о существовании бесконечных связных подграфов (кластеров) в периодических графах с ненадежными узлами и связями. Наш интерес к ней обусловлен тем, что перколяционная модель оказалась полезной [1, 2] для оценки фундаментальных пределов надежности однородных сетей связи.

Перколяционная модель надежности однородных структур. Функционирование однородной вычислительной системы или неразрезной процессорной матрицы рассматривается как просачивание информации по структуре с ненадежными элементами. Если такое просачивание возможно сколь угодно далеко, система может функционировать. Если нет – система отказала, так как потеряла связность. Проблема пределов надежности свелась к следующему вопросу: при какой вероятности p исправного узла (или вероятности r исправной связи) в бесконечной однородной структуре заданного типа существует бесконечный исправный кластер? Ответ на этот вопрос является основной задачей теории просачивания [3, 4]. В работе [3] показано, что для бесконечных решеток существуют такие критические вероятности (пороги просачивания) p_H и r_H, что при $p \geq p_H$ (или при $r \geq r_H$) в них с вероятностью 1 существует бесконечный исправный кластер.

Общая задача просачивания состоит в поиске области просачивания, точнее, такой функции $f(p, r)$, что при $f(p, r) \geq 0$ исправный кластер существует, а при $f(p, r) < 0$ – отсутствует. Для наших целей достаточно остановиться на частных задачах: просачивание по узлам, когда $p < 1$ и $r = 1$, и просачивание по связям, когда $p = 1$, а $r < 1$. Эти задачи принято называть задачей узлов и задачей связей соответственно. Заметим, что большинство известных значений порогов просачивания определено экспериментально, методом статистического моделирования на ЭВМ.

Точные значения некоторых величин приведены в итоговой монографии [4]. Это следующие критические вероятности:

$$p_H\,(\text{Т}) = r_H\,(\text{К}) = 1/2 = 0{,}5,$$
$$r_H\,(\text{Т}) = 2\sin(\pi/18) \cong 0{,}347\ldots,$$
$$r_H\,(\text{Ш}) = 1 - 2\sin(\pi/18) \cong 0{,}653\ldots.$$

Из перечисленных точных значений только одно относится к задаче узлов. А между тем задача узлов является более общей. Известно [4], что к ней сводится задача связей: порог просачивания по связям на исходной решетке равен порогу просачивания по узлам на покрывающей решетке. Узлы покрывающей решетки соответствуют связям исходной, а связи покрывающей решетки соединяют узлы, если соответствующие связи исходной решетки инцидентны одному и тому же узлу. Некоторые соотношения между критическими вероятностями в [4] получены с помощью построения дуальных или включающих решеток, получаемых из исходной. Дуальная решетка использована и в данной работе.

Предлагается частичное обоснование способа перехода от задачи узлов к задаче связей – метода моделирующей решетки [1, 2]. В отличие от [3, 4] моделирующая решетка не обеспечивает независимости вероятностей p и r от состояния соседних узлов и связей. Поэтому полученные результаты верны, если верна сформулированная далее гипотеза моделирования.

Задачи просачивания по узлам и связям. Пусть в каждом узле плоского периодического графа $G(X,V)$ задана случайная величина $\xi_l \in A = \{0,1\}$. Положим, что узел l черный, если $\xi_l = 0$, и белый, если $\xi_l = 1$. В задаче узлов каждый узел считается черным с вероятностью p и белым с вероятностью $1-p$. Все связи черные. Требуется найти критическую вероятность

$$p_H\,(G) = \inf\{p\colon \theta(p) > 0\},$$

где $\theta(p)$ – вероятность того, что узел является частью бесконечного связного подмножества черных узлов – черного кластера.

В задаче связей узлы считаются черными с вероятностью 1, связи – черными с вероятностью r, белыми с вероятностью $1-r$ и критическая вероятность просачивания по связям есть

$$r_H\,(G) = \inf\{r\colon \theta(r) > 0\},$$

где $\theta(r)$ – вероятность того, что некоторый узел является частью бесконечного черного кластера.

С множеством конфигураций узлов $Y = A^{|X|}$ на графе G можно связать вероятностное пространство $\langle Y, F, P_p\rangle$, где F – σ-алгебра на Y, а P_p – вероятностная мера на F, такая что

$$P_p(\xi_l = 0) = p, \qquad P_p(\xi_l = 1) = 1 - p.$$

Вероятностное пространство $\langle U, \Phi, P_r\rangle$ для задачи связей можно определить, считая случайную величину ξ_l заданной для каждой связи графа G;

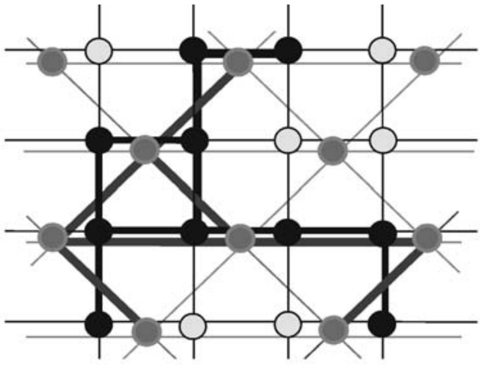

Рис. 1. Моделирование просачивания по узлам в решетке К просачиванием по связям в Т′

U – множество конфигураций связей; Φ – σ-алгебра на U; P_r – вероятностная мера на Φ, $P_r(\xi_l = 0) = r$, $P_r(\xi_l = 1) = 1 - r$.

Прежде всего нам потребуется теорема 1 из теории просачивания. Она доказана в [3, 4] для плоских периодических графов, вложенных в R^2, но никто не подвергает сомнению ее справедливость и для трехмерных периодических графов.

Теорема 1. Для плоских периодических графов, вложенных в R^2, критические вероятности $p_H(G)$ и $r_H(G)$ существуют.

В дальнейшем $G \in \{\text{Т}, \text{К}, \text{К}^*, \text{Ш}\}$, где К^* – сопряженная квадратная решетка со связями по диагоналям. Для конкретного типа решетки будем писать $Y(\text{К})$, $U(\text{Т})$ и т. д.

Моделирующие решетки. В работах [1, 2] предложен метод моделирующих решеток, позволяющий перейти от задачи узлов к задаче связей. Для задачи узлов на решетке К строится моделирующая решетка Т′, как показано на рис. 1, аналогично для решетки Ш можно построить моделирующую решетку К′ (рис. 2). Связь моделирующей решетки соответствует двум узлам исходной решетки. Будем считать связь черной, если соответствующие ей узлы черные, в противном случае связь считается белой. Установленное таким образом соответствие между множеством конфигураций узлов исход-

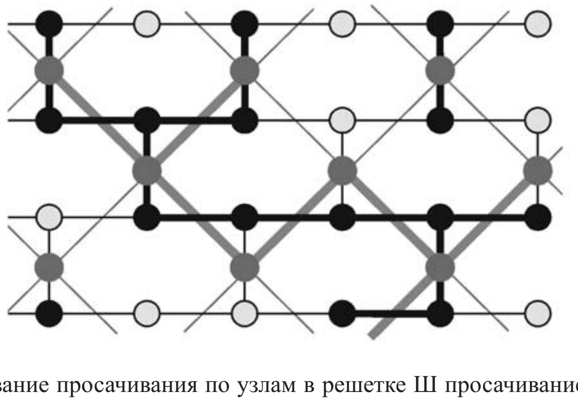

Рис. 2. Моделирование просачивания по узлам в решетке Ш просачиванием по связям в решетке К′

ной решетки и множеством конфигураций связей моделирующей решетки позволяет рассмотреть вероятностные пространства, индуцированные на моделирующих решетках. Для квадратной решетки P_p на $F(\text{К})$ индуцирует вероятностную меру P'_p на $\Phi(\text{Т}')$, так что $p'_r = p_p^2$. По построению каждому черному кластеру в решетке К соответствует черный кластер в решетке $\text{Т}'$, просачиванию в К – просачивание в $\text{Т}'$. При этом $r(\text{Т}') = p^2(\text{К})$ и $p(\text{Т}') = r(\text{К}) = 1$.

По построению величины $r_H(\text{Т}')$ и $r_H(\text{К}')$ существуют, поскольку существуют $p_H(\text{К})$ и $p_H(\text{Ш})$.

При критическом просачивании в $\text{Т}'$ имеет место критическое просачивание в К, и наоборот, при этом

$$p_H(\text{К}) = [r_H(\text{Т}')]^{1/2}. \tag{1}$$

Аналогично для решетки Ш

$$p_H(\text{Ш}) = [r_H(\text{К}')]^{1/2}. \tag{2}$$

В отличие от классических задач просачивания, вероятность окраски связей на моделирующих решетках зависит от окраски соседей. Если на решетке $\text{Т}'$ одна из связей (например, горизонтальная) черная, то четыре соседние будут черными уже с вероятностью p, а не p^2, как в независимом случае. Аналогично черный узел в решетке Ш влияет на окраску двух связей моделирующей решетки $\text{К}'$.

Гипотеза моделирования. Содержательно гипотеза моделирования

$$r_H(\text{Т}') = r_H(\text{Т}), \qquad r_H(\text{К}') = r_H(\text{К})$$

состоит в том, что в данном конкретном случае корреляции между состояниями узлов и связей в моделирующих решетках не влияют на величину порогов просачивания.

Непосредственным следствием этой гипотезы и выражений (1) и (2) являются значения для критических вероятностей $p_H(\text{К})$ и $p_H(\text{Ш})$, подтвержденные экспериментально:

$$p_H(\text{К}) = \sqrt{2\sin(\pi/18)} = 0{,}589... \cong 0{,}59,$$

$$p_H(\text{Ш}) = 1/\sqrt{2} = 0{,}707... \cong 0{,}7.$$

Кроме того, для К и сопряженной квадратной решетки К^* известно [4], что

$$p_H(\text{К}) + p_H(\text{К}^*) = 1.$$

Отсюда и из гипотезы моделирования следует

$$p_H(\text{К}^*) = 1 - [2\sin(\pi/18)]^{1/2} = 0{,}411... \cong 0{,}41,$$

что также подтверждено экспериментально.

Рассматривая совокупность вышеприведенных значений критических вероятностей для решеток Ш, К, Т и К*, можно записать следующую эмпирическую формулу:

$$[p_H(k)]^2 = r_H(k+2), \tag{3}$$

где k – число ближайших соседей одного узла. Отсюда следует

$$r_H(\text{К}^*) = [p_H(\text{Т})]^2 = (1/2)^2 = 1/4 = 0{,}25,$$

что подтверждено экспериментально.

Это наблюдение свидетельствует о возможном существовании некоторого моделирующего соответствия между решетками Т и К*, к сожалению, пока не определенного, но все найденные значения хорошо согласуются с экспериментами [1, 2].

К обоснованию гипотезы моделирования. Дадим частичное обоснование гипотезы моделирования. Далее сформулируем две леммы, которым эквивалентна наша гипотеза. В обоснование леммы 1 приведем некоторые правдоподобные рассуждения. Лемма 2 будет оставлена без обоснования.

Примем теперь, что символ «$'$» обозначает атрибуты моделирующей решетки: $G' \in \{\text{К}', \text{Ш}', \text{Т}'\}; U'; \Phi'$ и т. п. При этом, когда речь пойдет об исходной решетке G и моделирующей G', будем иметь в виду соответствие $\text{К} \to \text{Т}$ и $\text{Ш} \to \text{К}$. Когда же речь пойдет о решетках G и G' одного типа в соответствии $\text{Т} \to \text{Т}'$, $\text{К} \to \text{К}'$, то этот факт будет отмечен специально.

Для обоснования наших предположений понадобится следующая теорема из теории просачивания.

Теорема 2. Если $p < p_H$ $(r < r_H)$, то вероятность существования в плоской решетке G бесконечного черного кластера равна 0. Если $p \geq p_H$ $(r \geq r_H)$, то с вероятностью 1 в G есть точно один бесконечный черный кластер и нет бесконечного белого кластера.

Это утверждение доказано [4] для задачи связей на решетке К и не подвергается сомнению для любой плоской решетки с независимой раскраской узлов или связей. Следующее рассуждение распространяет справедливость рассматриваемого утверждения на моделирующие решетки G'.

Для решетки G с независимой раскраской связей или узлов событие

$$\{A = \text{существует бесконечный черный кластер}\}$$

является перестановочным, так как замена любого конечного числа черных связей или узлов белыми не может нарушить связность бесконечного черного кластера, поэтому (см., например, [5]) либо $p(A) = 0$, либо $p(A) = 1$. Вероятностная мера P_p на $F(G)$ инвариантна относительно автоморфизмов G в силу того, что случайные величины ξ_l независимы. Поскольку мера P'_r на $\Phi(G')$, где G' – моделирующая решетка для G, индуцирована мерой P_p, то P'_r обладает всеми свойствами P_p, в том числе и свойством инвариантности. Поэтому утверждение о существовании с вероятностью 1 бесконечного черного пути слева направо в G' равносильно утверждению о существовании бесконечного черного пути в G' сверху вниз и, следовательно, эквивалентно утверждению о существовании с вероятностью 1 единственного бесконечного черного кластера в G' (эти пути в плоской решетке обязательно пересекутся).

Введем в рассмотрение решетку $G'_{д}$, дуальную G'. Поскольку рассматриваемые решетки являются плоскими топологическими графами, это возможно [4]. Узлы $G'_{д}$ соответствуют центрам граней G'. Связь в $G'_{д}$ соединяет два узла, если и только если две соответствующие грани имеют общее ребро. Таким образом, каждой связи G' соответствует пересекающая ее связь в $G'_{д}$. Легко убедиться, что $К_{д} = К$, $Т_{д} = Ш$, $Ш_{д} = Т$. Теперь очевидно, что если $Т'$ моделирует К, то $Т'_{д} = Ш$ моделирует К с аналогичным соответствием узлов и связей. Далее $G' \in \{Т', К', Ш'\}$.

Введем другой способ раскраски связей на G'. Черным связям, как и ранее, соответствуют два черных узла исходной решетки, белым связям – два белых узла. Связи, соответствующие двум узлам разного цвета, окрашиваются в серый цвет. Ясно, что новый способ окраски никак не влияет на вероятность появления бесконечного черного кластера и на величину $r_H(G')$. С другой стороны, появилась возможность рассматривать не только черные, но и черно-серые кластеры. Кроме того, белые кластеры на G' имеют теперь те же свойства, что и черные, иными словами, белый цвет симметричен черному.

Обозначим произвольный цвет литерой «ц», черный – «ч», белый – «б», серый – «с», причем если «ц» принимает значение «чс», то это означает, что черные и серые связи не различаются, т. е. считаются одинаково окрашенными. Аналогично понимаются символы «бч», «бс». Пусть $r(\text{ц}, G')$ – вероятность связи цвета «ц» в решетке G'. Тогда очевидно, что

$$r(\text{б}, G') + r(\text{ч}, G') + r(\text{с}, G') = 1,$$

$$r(\text{чс}, G') = r(\text{ч}, G') + r(\text{с}, G')$$

и т. д.

Теперь можно поставить задачу просачивания по связям любого цвета «ц» и искать критические вероятности $r_H(\text{ц}, G')$. Из симметрии черного и белого цветов следует

$$r_H(\text{б}, G') = r_H(\text{ч}, G') = r_H(G'), \tag{4}$$

причем $r_H(G')$ есть тот самый порог просачивания по связям, который мы использовали выше при моделировании решетки G. Для прочих вероятностей $r(\text{ц}, G')$ этого сказать нельзя, поскольку появление иных окрасок подчиняется другому правилу.

Лемма 1. $r_H(G') + r_H(G'_{д}) \geq 1.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Факт существования с вероятностью 1 бесконечного черного кластера будем обозначать символом «Ч», серого – «С», черно-серого – «ЧС», отрицание этих событий – «\Ч», «\С», «\ЧС» соответственно. Аналогично будем понимать символы «ЧБ», «Б», «БС», «\ЧБ», «\Б», «\БС».

Раскрасим связи дуальной решетки $G'_{д}$ в альтернативный цвет, а именно белой связи в G' будет соответствовать пересекающая ее черная связь в $G'_{д}$, черной – белая, серой – серая. При такой раскраске всякой конфигурации, содержащей бесконечное черное связное подмножество в G', соответствует конфигурация, содержащая бесконечное белое сечение в $G'_{д}$. И если в G' совокупность конфигураций, содержащих бесконечный черный кластер, имела вероятность 1, то в $G'_{\text{д}}$ с вероятностью 1 будет существовать бесконечное белое сечение. Отсюда следует общеизвестный факт теории просачивания

$$r_H(G') + r_H(G'_{\text{д}}) = 1.$$

Используя введенные обозначения и особенность серого цвета, который сам себе альтернатива, можно записать систему импликаций:

$$\text{Ч} \to \backslash\text{ЧС}_{\text{д}}, \quad \text{ЧС} \to \backslash\text{Ч}_{\text{д}}, \quad \backslash\text{Ч} \to \text{ЧС}_{\text{д}}, \quad \backslash\text{ЧС} \to \text{Ч}_{\text{д}}, \quad \backslash\text{ЧС} \to \text{ЧС}_{\text{д}}. \quad (5)$$

Здесь индекс «д» отмечает событие в дуальной решетке, символ «$\to$» означает «влечет».

Пусть $r(\text{ч}, G') \geq r_H(\text{ч}, G')$, т. е. в G' имеет место событие Ч, и согласно (5) в $G'_{\text{д}}$ имеем событие $\backslash\text{ЧС}_{\text{д}}$. Из этого следует, что

$$1 - r(\text{ч}, G') = r(\text{бс}, G') = r(\text{чс}, G'_{\text{д}}) < r_H(\text{чс}, G'_{\text{д}}),$$

откуда выводим

$$r_H(\text{чс}, G'_{\text{д}}) + r(\text{ч}, G') > 1.$$

Заменяя $r(\text{ч}, G')$ меньшей величиной $r_H(\text{ч}, G')$ и учитывая (4), имеем

$$r_H(\text{чс}, G'_{\text{д}}) + r_H(G') \geq 1.$$

Точно так же из $r(\text{б}, G') \geq r_H(\text{б}, G') = r_H(G')$ следует

$$r_H(\text{бс}, G'_{\text{д}}) + r_H(G') \geq 1.$$

Наоборот, пусть $r(\text{ч}, G') < r_H(\text{ч}, G')$, тогда в G' имеем $\backslash$Ч, а в $G'_{\text{д}}$ – событие $\text{ЧС}_{\text{д}}$, и тогда

$$1 - r(\text{ч}, G') = r(\text{бс}, G') = r(\text{чс}, G'_{\text{д}}) \geq r_H(\text{чс}, G'_{\text{д}}),$$

а при $r(\text{ч}, G') = r_H(\text{ч}, G')$ имеем

$$r_H(\text{чс}, G'_{\text{д}}) + r_H(\text{ч}, G') \leq 1.$$

Итак, пара импликаций $\text{Ч} \to \backslash\text{ЧС}_{\text{д}}$, $\backslash\text{Ч} \to \text{ЧС}_{\text{д}}$ влечет равенство

$$r_H(\text{чс}, G'_{\text{д}}) + r_H(\text{ч}, G') = 1. \quad (6)$$

Точно так же пара импликаций $\text{ЧС} \to \backslash\text{Ч}_{\text{д}}$ и $\backslash\text{ЧС} \to \text{Ч}_{\text{д}}$ влечет равенство

$$r_H(\text{чс}, G') + r_H(\text{ч}, G'_{\text{д}}) = 1. \quad (7)$$

Наконец, импликация $\backslash\text{ЧС} \to \text{ЧС}_{\text{д}}$ равносильна утверждению «ЧС не влечет $\backslash\text{ЧС}_{\text{д}}$» и, следовательно, дает только неравенство

$$r_H(\text{чс}, G') + r_H(\text{чс}, G'_{\text{д}}) \leq 1. \quad (8)$$

Суммируя (6) и (7), вычитая (8) и учитывая (4), имеем

$$r_H(G') + r_H(G'_{\text{д}}) \geq 1. \tag{9}$$

Лемма доказана, если допустима правдоподобная замена отношения «>» отношением «≥».

Лемма 2. Для решеток G' и G одного типа

$$r_H(G') \leq r_H(G), \tag{10}$$

$$r_H(G'_{\text{д}}) \leq r_H(G_{\text{д}}). \tag{11}$$

Если лемма 2 верна, то для подтверждения гипотезы остается учесть, что [4]

$$r_H(G) + r_H(G_{\text{д}}) = 1. \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что неравенства (9)–(11) и равенство (12) выполняются одновременно только при условии

$$r_H(G') = r_H(G) \quad \text{и} \quad r_H(G'_{\text{д}}) = r_H(G_{\text{д}}).$$

Заключение. В некоторых случаях задачу узлов теории просачивания можно заменить задачей связей. Найдены моделирующие решетки для задачи узлов на квадратной и шестиугольной решетках и сформулирована гипотеза моделирования.

Таблица содержит итоговые точные (аналитические) значения порогов просачивания для всех решеток, рассмотренных выше. Звездочкой отмечены четыре порога просачивания, полученные ранее [4] точными методами. Четыре новых значения определены в данной работе и верны при условии справедливости гипотезы моделирования.

Мы показали один из возможных путей проверки гипотезы моделирования. Тот факт, что на этом пути нам так и не удалось найти достаточно строгие доказательства, свидетельствует или против такого подхода, или против нашей гипотезы, но это уже не является областью научных интересов авторов.

Точные значения порогов просачивания для некоторых решеток

Решетка	Степень узла	Просачивание по узлам	Просачивание по связям
Ш	3	p_H (Ш) $= 1/\sqrt{2} = 0{,}707...$	$1 - 2\sin(\pi/18) = 0{,}653...^*$
К	4	p_H (К) $= \sqrt{2\sin(\pi/18)} = 0{,}589...$	$1/2 = 0{,}5^*$
Т	6	$1/2 = 0{,}5^*$	$2\sin(\pi/18) = 0{,}347...^*$
К*	8	$1 - \sqrt{2\sin(\pi/18)} = 0{,}411...$	$(1/2)^2 = 1/4 = 0{,}25$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Воробьев В. А., Лаходынова Н. В.** Пределы надежности однородных структур // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика.1989. № 3. С. 110.

2. **Лаходынова Н. В.** О порогах просачивания в однородных структурах // Автометрия. 2003. **39**, № 3. С. 35.

3. **Hammersley J. M.** Percolation processes: lower bounds for critical probability // Ann. Math. Statist. 1957. **28**. P. 790.

4. **Кестен Х.** Теория просачивания для математиков. М.: Мир, 1986.

5. **Боровков А. А.** Теория вероятностей. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 27 сентября 2005 г.