

3. Жигулев В. П. О возбуждении и развитии неустойчивостей в трехмерных пограничных слоях. Препринт № 3. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982.
4. Gustavsson L. H. Initial-value problem for boundary layer flows.— *Phys. Fluids*, 1979, vol. 22, p. 1602.
5. Salwen H., Gresh C. E. The continuous spectrum of the Orr — Sommerfeld equation. Pt 2. Eigenfunction expansions.— *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 104, p. 445.
6. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.
7. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1971.
8. Mack L. M. Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer.— In: *Methods in computational Physics*. Vol. 4, 1965.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: ГИИТТ, 1953.
10. Сидоренко Н. В., Тумин А. М. Гидродинамическая устойчивость течений в пограничном слое сжимаемого газа.— В кн.: *Механика неоднородных сред*. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961.

УДК 532.5 + 532.516

К УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ

В. А. Владимиров
(Новосибирск)

Исследованию устойчивости вращающихся течений посвящено большое количество работ. Значительный прогресс достигнут в понимании частного идеализированного случая — задачи об устойчивости течений идеальной жидкости с круговыми линиями тока (см., например, [1—7]). Изучение этой задачи позволило сделать вывод о существовании в закрученном потоке двух фундаментальных механизмов неустойчивости — «центробежного» и «сдвигового». Осознание этих механизмов послужило основой для моделирования целого ряда переходных явлений и турбулентности [2, 4, 7—12]. В то же время реальные течения часто лишь близки к круговым. Поэтому встает вопрос о влиянии небольших отличий от круговой геометрии на устойчивость потока. Изучение этого вопроса проводилось в [13—16]. В [13, 14] экспериментально и теоретически исследовалась задача устойчивости вращения жидкости внутри сосуда, имеющего форму эллиптического цилиндра с малым эксцентриситетом. Экспериментально обнаружена неустойчивость, приводящая к изгибам оси вращения. Для теоретического описания этой неустойчивости предложена модель, построенная методом Галеркина с использованием двух хорошо подобранных базисных функций. Существование неустойчивости в такой постановке, на первый взгляд, представляется удивительным, поскольку известно, что твердотельное вращение обладает большим запасом устойчивости [4]. Качественно близкая к [13, 14] задача об устойчивости линейного вихря в потенциальном потоке рассматривалась в [15, 16]. Ядро вихря считалось подверженным малой деформации так, что форма его поперечного сечения близка к эллипсу с малым эксцентриситетом. Вычисления, сделанные с помощью теории возмущений, также показали существование неустойчивости, связанной с изгибами оси вращения. Как в [13, 14], так и в [15, 16] теоретическое рассмотрение ограничено изучением устойчивости течений относительно возмущений частного вида в линейной постановке.

Задача [13, 14] об устойчивости течения жидкости внутри эллиптического цилиндра является простейшей среди большого класса задач, связанных с устойчивостью деформированного вращения жидкости, и заслуживает подробного изучения. В данной работе представлены результаты по устойчивости этого течения относительно возмущений общего вида. Используется теория возмущений по параметру ϵ , характеризующему малость деформации. Согласно проведенным вычислениям, рассмотренное течение уже в первом приближении по ϵ всегда неустойчиво относительно трехмерных возмущений с длинами волн $2\pi/k$ вдоль оси вращения. Соответствующие волновые числа k непрерывно заполняют счетное число отрезков ширины порядка ϵ . В середине каждого отрезка (точках k_0) инкремент нарастания возмущения максимален. Значения k_0 соответствуют условиям вырождения задачи нулевого приближения. Касаясь физической трактовки неустойчивости, отметим, что ее механизм аналогичен известным «резонансным взаимодействиям» [17] в усложненном случае, когда решения линейной задачи не являются плоскими волнами. Полученный результат можно интерпретировать как разрывность утверждения Хассельмана [18] о неустойчивости волны конечной амплитуды при существовании соответствующей «резонансной триады». Условия резонанса здесь принимают вид уже упомянутых условий вырождения. Роль «первичной»

волны, распадающейся на две «резонансные», играет деформация кругового потока эллиптическими стенками. Метод Галеркина в данной работе не применяется, а решаются полные линеаризованные уравнения движения. Поэтому изложенные результаты, в частности, обобщают [13, 14] для рассмотренного в этих работах типа возмущений. Здесь имеется качественное согласие с выводами [13, 14].

1. Сформулируем задачу. Рассмотрим эллиптический цилиндр, уравнение поверхности которого в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеет вид

$$(1.1) \quad r = F(\theta) = (1 - \varepsilon \cos 2\theta)^{-1/2}.$$

Если a и b ($a > b$) — полуоси эллипса, лежащего в нормальном сечении цилиндра, то $\varepsilon = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$. Внутренность цилиндра заполняет идеальная несжимаемая жидкость, поле скорости которой $(U, V, 0)$

$$(1.2) \quad U = -\varepsilon r \sin 2\theta, \quad V = r(1 - \varepsilon \cos 2\theta).$$

В соответствующем поле завихренности отлична от нуля только z -компонента, величина которой постоянна. Все параметры приведены к безразмерной форме с помощью масштабов длины $R \equiv ab \sqrt{2/(a^2 + b^2)}$ и скорости ΩR . Величина 2Ω определена как завихренность основного течения. Поле скорости (1.2) является точным решением уравнений движения и удовлетворяет условию непротекания на (1.1).

Рассмотрим бесконечно малые трехмерные возмущения течения (1.2). Линеаризованные на поле (1.2) уравнения движения таковы:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} Lu + \frac{\partial U}{\partial r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} v - \frac{2}{r} Vv &= -\frac{\partial p}{\partial r}, \\ Lv + \frac{\partial V}{\partial r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} v + \frac{1}{r} (Uv + Vu) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ Lw &= -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Через u, v, w, p обозначены поля возмущений радиальной, угловой, осевой составляющих скорости и поле возмущений давления; $L = \partial/\partial t + U\partial/\partial r + (1/r)V\partial/\partial \theta$. Граничные условия для (1.3) состоят в обращении в нуль нормальной составляющей скорости на (1.1)

$$(1.4) \quad Fu - \frac{dF}{d\theta} v = 0 \quad \text{при } r = F(\theta)$$

и ограниченности решений при $r = 0$. Ввиду инвариантности уравнений и граничных условий относительно сдвигов вдоль осей z и t решение задачи ищем в виде

$$(1.5) \quad (p, u, v, w) = (p_a, u_a, v_a, w_a) e^{i(kz - \omega t)}.$$

Амплитуды p_a, u_a, v_a, w_a являются функциями только координат r и θ . Подставляя (1.5) в (1.3), (1.4), получаем задачу на отыскание собственных значений ω и соответствующих собственных функций. Если существует хотя бы одно возмущение с $\text{Im} \omega > 0$, то течение неустойчиво.

2. Задача определения собственных значений ω в сформулированной постановке очень сложна и будет решаться методом последовательных приближений с учетом малости величины ε . Вычисления будут проделаны для нулевого и первого приближений.

Предполагая решения аналитическими функциями ε , выпишем их и $F(\theta)$ при малых ε в виде рядов ($v = 0, 1, 2, \dots$):

$$(2.1) \quad (p_a, u_a, v_a, w_a, \omega, F) = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v (p_v, u_v, v_v, w_v, \omega_v, f_v).$$

Кроме того, положим $k = k_0 + \varepsilon k_1$. Последнее представление принято потому, что случаям неустойчивости будет соответствовать дискретный набор фиксированных значений k_0 . Величина k_1 позволит рассматривать значения k , близкие к k_0 . Подстановкой (2.1) в (1.3), (1.4) и приравнива-

нием членов при одинаковых степенях ε получим

$$(2.2) \quad L_0 u_\nu - 2v_\nu + \frac{\partial p_\nu}{\partial r} = G_{1\nu}, \quad L_0 v_\nu + 2u_\nu + \frac{1}{r} \frac{\partial p_\nu}{\partial \theta} = G_{2\nu},$$

$$L_0 w_\nu + ik_0 p_\nu = G_{3\nu}, \quad \frac{\partial u_\nu}{\partial r} + \frac{u_\nu}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\nu}{\partial \theta} + ik_0 w_\nu = G_{4\nu},$$

где $L_0 \equiv -i\omega_0 + \partial/\partial\theta$. При $\nu = 0$ для всех l ($l = 1, 2, 3, 4$) правые части $G_{l0} = 0$. В уравнениях первого приближения ($\nu = 1$) функции G_{11} содержат линейно функции нулевого приближения и величину ω_1 . Например,

$$G_{11} \equiv i\omega_1 u_0 + \left(r \frac{\partial u_0}{\partial r} + u_0 \right) \sin 2\theta + \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \cos 2\theta.$$

Граничные условия (1.4) для нулевого и первого приближений ($\nu = 0; 1$) дают

$$(2.3) \quad u_0(1, \theta) = 0, \quad u_1(1, \theta) = \frac{df_1(0)}{d\psi} v_0(1, \theta) - f_1(\theta) \frac{\partial u_0}{\partial r}(1, \theta).$$

Выписанные условия обычным образом «снесены» с реальной границы (1.1) на близкую к ней окружность $r = 1$. Второе граничное условие состоит в ограниченности решений любого приближения при $r = 0$.

3. Рассмотрим задачу (2.2), (2.3) нулевого приближения. Ее решения представляют собой широко известные инерционные волны в твердотельно вращающейся жидкости [4, 19] для частного случая резервуара — кругового цилиндра. Для гармоник, пропорциональной $e^{im\theta}$, (2.2), (2.3) дают

$$(3.1) \quad p_0 = \alpha J_m(\eta_m r) e^{im\theta}.$$

Здесь α — произвольная комплексная постоянная; J_m — функция Бесселя индекса m ; $\eta_m^2 \equiv k_0^2 \Delta_m / \sigma_m^2$; $\sigma_m \equiv m - \omega_0$; $\Delta_m \equiv 4 - \sigma_m^2$. Величины ω_0 и k_0 связаны дисперсионным соотношением

$$(3.2) \quad \sigma_m \eta_m dJ_m(\eta_m) / d\eta_m + 2mJ_m(\eta_m) = 0.$$

Известно [19, 4], что спектр ω_0 чисто веществен и $m - 2 < \omega_0 < m + 2$.

4. Для задачи (2.2), (2.3) первого приближения вид решений и значения ω_1 могут быть получены при помощи несложных, но громоздких вычислений. Смысл их сводится к определению поправок к инерционным волнам (3.1), обусловленных отличиями геометрии от круговой. Наиболее сложным элементом этих вычислений является решение неоднородных уравнений (2.2). Аналогичная техника для другой задачи применялась, например, в [15]. Отметим, что аналитические выкладки существенно упрощаются, если воспользоваться уравнением для возмущений давления, полученным из (1.3) в [13]. Не останавливаясь на вычислениях, изложим результаты.

Основной результат сформулируем в виде нескольких утверждений. Для нулевого приближения в форме гармоник (3.1) с любым m величина ω_1 всегда действительна. Это соответствует устойчивости в первом приближении. Неустойчивость имеет место только в случаях вырождения, когда возмущение нулевого приближения, характеризующееся частотой ω_0 и волновым числом k_0 , имеет вид суперпозиции двух мод с различными m (m_1 и m_2) такими, что $m_1 - m_2 = \pm 2$. Однако такие возмущения могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. В последнем случае неустойчивость дают интервалы волновых чисел $|k_1| < k_{\max}$. При этом инкремент нарастания максимален в точках $k = k_0$ и монотонно убывает с удалением к концам интервала, обращаясь в нуль при $k = k_0 \pm \varepsilon k_{\max}$. Наиболее опасными оказываются возмущения, в которых моды m_1 и m_2 имеют внутри потока (при $0 < r < 1$) одинаковое количество нулей радиальной компоненты скорости. Все такие возмущения дают неустойчивость, и скорости их нарастания примерно одинаковы.

Поясним сделанные утверждения. «Опасные» возмущения в нулевом приближении таковы:

$$(4.1) \quad p_0(r, \theta) = \alpha J_{n+1}(\eta r) e^{i(n+1)\theta} + \bar{\alpha} J_{n-1}(\bar{\eta} r) e^{i(n-1)\theta}.$$

Таблица 1

Точки пересечения	n				Точки пересечения	n			
	0	1	2	3		0	1	2	3
(1; 1)	1,579 0	2,326 0,038	3,035 0,044	3,731 0,042	(1; 3)	2,630 -0,435	3,614 -0,331	4,468 -0,274	5,266 -0,238
(2; 2)	3,286 0	4,125 0,014	4,916 0,019	5,679 0,020	(3; 1)	2,630 0,435	3,556 0,361	4,390 0,314	5,182 0,281
(3; 3)	5,061 0	5,928 0,007	6,753 0,010	7,551 0,012	(2; 3)	4,046 -0,165	4,929 -0,128	5,754 -0,106	6,546 -0,091
(1; 2)	2,203 -0,292	3,075 -0,197	3,858 -0,154	4,605 -0,129	(3; 2)	4,046 0,165	4,912 0,147	5,729 0,134	6,516 0,123
(2; 1)	2,203 0,292	3,034 0,241	3,805 0,210	4,550 0,186					

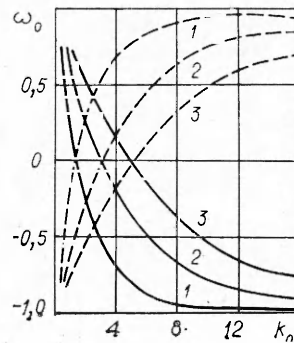
Здесь α и $\bar{\alpha}$ — произвольные комплексные постоянные; $\eta \equiv \eta_{n+1}$; $\bar{\eta} \equiv \eta_{n-1}$; n — произвольное целое число. Черта над буквами обозначает независимые величины, а не комплексное сопряжение. Удобство таких обозначений заключается в симметрии формул. Дисперсионные соотношения для гармоник в (4.1) записываются в виде

$$(4.2) \quad \sigma \eta J_n(\eta) - (n+1) \bar{\sigma} J_{n+1}(\eta) = 0, \quad \bar{\sigma} \eta J_n(\bar{\eta}) - (n-1) \sigma J_{n-1}(\bar{\eta}) = 0,$$

где $\sigma \equiv \sigma_{n+1}$; $\bar{\sigma} \equiv \sigma_{n-1}$. В силу вырождения рассматриваются точки пересечения кривых (4.2) на плоскости k_0, ω_0 . Пересекающиеся семейства (4.2) сосредоточены на полосе $n-1 < \omega_0 < n+1$. Вид этих семейств для случая $n=0$ приведен на фигуре. Сплошные линии соответствуют гармонике $n+1$, штриховые — гармонике $n-1$. На фигуре приведены только по три первых из счетного набора гармоник, номера кривых соответствуют числу нулей функции $u_0(r)$ на $0 < r \leq 1$. Каждую точку пересечения обозначим парой целых чисел $(q; s)$, соответствующих номерам пересекающихся кривых. Точки с $q=s$ назовем главными точками пересечения, с $q \neq s$ — боковыми точками пересечения. В случае $n=0$ (см. фигуру) кривые симметричны относительно оси $\omega_0 = 0$ и главные точки пересечения находятся на этой оси. При $n \neq 0$ картины ветвей дисперсионных кривых, лежащих в полосе $-1 < \omega_0 - n < 1$, качественно похожи на изображенные на фигуре, если на оси ординат вместо ω_0 откладывать $\omega_0 - n$. Однако симметрии кривых относительно оси $\omega_0 = n$ нет, и главные точки пересечения не попадают на эту ось. В то же время они оказываются близкими к ней. Сводка координат точек пересечения для $n=0, 1, 2, 3$ дана в табл. 1, причем в каждой клетке верхнее число дает значение k_0 , нижнее — значение $(\omega_0 - n)$.

Вычисления величины ω_1 в точках вырождения (ω_0, k_0) дают

$$(4.3) \quad \omega_1 = -\frac{1}{2} k_0 k_1 (c + \bar{c}) \pm \left\{ \omega_{\text{max}}^2 + \left[\frac{1}{2} k_0 k_1 (c - \bar{c}) \right]^2 \right\}^{1/2},$$



где $c \equiv g/\bar{f}$; $\bar{c} \equiv \bar{g}/\bar{f}$; $\omega_{\max}^2 \equiv h\bar{h}/f\bar{f}$; через $f, \bar{f}, g, \bar{g}, h, \bar{h}$ обозначены различные вещественные функции величин ω_0, k_0, n :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} f &\equiv \left\{ -\frac{4}{\sigma^2} [k^2 + (n+1)^2] + \frac{2}{\sigma} (n+1) \right\} J_{n+1}, \\ \bar{f} &\equiv \left\{ -\frac{4}{\bar{\sigma}^2} [k^2 + (n-1)^2] + \frac{2}{\bar{\sigma}} (n-1) \right\} \bar{J}_{n-1}, \\ h &\equiv \frac{\pi}{2} l \eta \bar{S}_n [-\bar{\sigma} \eta \bar{N}_n + \sigma (n-1) \bar{N}_{n-1}] + \frac{\bar{\sigma}}{4} J_{n+1} H, \\ \bar{h} &\equiv -\frac{\pi}{2} l \bar{\eta} S_n [-\sigma \eta N_n + \bar{\sigma} (n+1) N_{n+1}] - \frac{\sigma}{4} \bar{J}_{n-1} \bar{H}, \\ H &\equiv -\eta^2 + \frac{1}{\sigma} [\bar{\mu} \bar{\sigma} - \bar{\mu} (n+1)] + \frac{n(n+1)}{\Delta} [\bar{\Delta} - 2(\sigma + \bar{\sigma})] - \frac{\bar{\mu} \bar{\sigma} n}{\sigma(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2)} \times \\ &\quad \times \left[\sigma^2 + \bar{\sigma}^2 - 2(n^2 - 1) \frac{\sigma \bar{\sigma}}{\eta^2} \right], \\ \bar{H} &\equiv -\bar{\eta}^2 + \frac{1}{\bar{\sigma}} [\bar{\mu} \bar{\sigma} - \bar{\mu} (n-1)] - \frac{n(n-1)}{\bar{\Delta}} [\bar{\Delta} + 2(\sigma + \bar{\sigma})] - \\ &\quad - \frac{\bar{\mu} \bar{\sigma} n}{\bar{\sigma}(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2)} \left[\sigma^2 + \bar{\sigma}^2 - 2(n^2 - 1) \frac{\sigma \bar{\sigma}}{\eta^2} \right], \\ S_n &\equiv \int_0^r J_{n+1}(\eta t) J_n(\bar{\eta} t) t^2 dt, \quad \bar{S}_n \equiv \int_0^r J_{n-1}(\bar{\eta} t) J_n(\eta t) t^2 dt, \\ g &\equiv -\frac{\Delta}{\sigma} \left[1 + \left(\frac{n+1}{k_0} \right)^2 \right] J_{n+1}, \quad \bar{g} \equiv -\frac{\bar{\Delta}}{\bar{\sigma}} \left[1 + \left(\frac{n-1}{k_0} \right)^2 \right] \bar{J}_{n-1}. \end{aligned}$$

Приняты обозначения: $\sigma \equiv \sigma_{n+1}$; $\bar{\sigma} \equiv \sigma_{n-1}$; $\bar{\Delta} \equiv \Delta_{n-1}$; $\Delta \equiv \Delta_{n+1}$; $\eta \equiv \eta_{n+1}$; $\bar{\eta} \equiv \eta_{n-1}$; $\bar{\mu} \equiv \bar{\sigma} - 2$; $\mu \equiv \sigma + 2$; $l \equiv 4k_0^2(\omega_0 - n)/\sigma^2 \bar{\sigma}^2$. Для функций Бесселя J_m и Неймана N_m принято $J_m \equiv J_m(\eta)$, $\bar{J}_m \equiv J_m(\bar{\eta})$; $N_m \equiv N_m(\eta)$, $\bar{N}_m \equiv N_m(\bar{\eta})$.

Из (4.3) видно, что неустойчивость ($\text{Im} \omega_1 > 0$) может иметь место, если

$$\omega_{\max}^2 < - \left[\frac{1}{2} k_0 k_1 (c - \bar{c}) \right]^2.$$

Наибольший прирост роста $\omega_1 = \omega_{\max}$ достигается при $k_1 = 0$, причем неустойчивым оказывается целый интервал волновых чисел:

$$|k_1| < k_{\max} \equiv \left| \frac{2\omega_{\max}}{k_0(c - \bar{c})} \right|.$$

При $|k_1| = k_{\max}$ имеем отсутствие роста $\text{Im} \omega_1 = 0$.

Важным частным случаем, требующим специального рассмотрения, является $n = 0$. Геометрически этот случай соответствует изгибам оси вращения. Неустойчивость такого сорта легко регистрируема в эксперименте, только она и наблюдалась до сих пор [13, 14]. Для $n = 0$ выражения (4.4) существенно упрощаются и позволяют вычислить ω_1 на боковых точках пересечения. На главных точках пересечения $\omega_0 = 0$ и (4.4) оказываются неприменимыми, поскольку на одном из промежуточных этапов вычислений использовано условие $\omega_0 \neq 0$. Отдельное рассмотрение случая $n = 0$, $\omega_0 = 0$ дает

$$\omega_1 = \pm \frac{3i}{8(2k_0^2 + 1)} \left[(3k_0^2 + 1)^2 - 16k_1^2 (k_0^2 + 1)^2 / k_0^2 \right]^{1/2}.$$

Корень с $\text{Im} \omega_1 > 0$ существует при условии

$$(4.5) \quad k_1^2 < k_{\max}^2 = \frac{k_0^2 (3k_0^2 + 1)}{16(k_0^2 + 1)^2}.$$

Таблица 2

Точки пересечения	n					Точки пересечения	n				
	0	0	1	2	3		0	0	1	2	3
(1; 1)	0,531	0,958	0,531	0,522	0,519	(1; 3)	0,006	0,024	0,028	0,040	0,048
(2; 2)	0,554	2,325	0,551	0,543	0,536	(3; 1)	0,006	0,024	0,015	0,011	0,035
(3; 3)	0,559	3,701	0,557	0,551	0,546	(2; 3)	0,005	0,025	0,045	0,074	0,094
(1; 2)	0,012	0,035	0,065	0,102	0,121	(3; 2)	0,005	0,025	0,029	0,053	0,066
(2; 1)	0,012	0,035	0,039	0,052	0,075						

При $k_1 = 0$ этот корень соответствует наибольшему росту:

$$(4.6) \quad \omega_{\max} = \frac{3i}{8} \frac{3k_n^2 + 1}{2k_c^2 + 1}.$$

В первых двух столбцах табл. 2 приведены значения $-i\omega_{\max}$, k_{\max} для $n = 0$ во всех точках пересечения, присутствующих на фигуре. Видно, что все точки пересечения дают неустойчивость, но для боковых точек величины $-i\omega_{\max}$, k_{\max} на один — два порядка меньше, чем для главных. Похожая ситуация имеет место и для $n = 1, 2, 3$. Соответствующие значения $-i\omega_{\max}$ даны в остальных столбцах табл. 2. Рассмотрение отрицательных n не дает ничего нового, так как результаты для $n = n_0$ и $n = -n_0$ совпадают с точностью до замены ω_0 на $-\omega_0$. Выводы для $|n| > 3$, по-видимому, аналогичны.

Таким образом, общим является вывод о доминирующей роли неустойчивостей, соответствующих главным точкам пересечения дисперсионных кривых. При $n = 0$ эти неустойчивости приводят к изгибам оси вращения и являются невращающимися ($\omega_0 = 0$). Только этот тип неустойчивости и наблюдался до сих пор в экспериментах [13, 14]. Неустойчивости с $n \neq 0$ приводят к деформации линий тока без поворотов оси вращения и являются вращающимися ($\omega_0 \approx n$). Их экспериментальная регистрация представляла бы интерес. Подчеркнем здесь, что инкременты нарастания для возмущений с $n = 0$ и $n \neq 0$ практически одинаковы.

Сравнивая полученные аналитические результаты с известными ранее, отметим, что частный случай $n = 0$ исследовался в [13, 14] с помощью метода Галеркина. Рассматривались только неустойчивости, соответствующие, по нашей терминологии, главным точкам пересечения. Точное совпадение изложенных результатов с [13, 14] имеется только для координат этих точек, в то время как инкременты нарастания (4.6) и ширины неустойчивых зон (4.5) несколько другие. Поскольку метод Галеркина, использование которого связано с дополнительными предположениями, выше не применялся, результаты данной работы, в частности, обобщают [13, 14].

Автор признателен Л. Я. Рыбаку за проведение численных расчетов.

Поступила 14 VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961.
3. Howard L. N., Gupta A. S. On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows.— J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, N 3.
4. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
5. Владимиров В. А. Устойчивость течения типа смерча.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 37. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1978.
6. Владимиров В. А. Устойчивость течений идеальной жидкости с круговыми линиями тока.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 42. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.

7. Владимиров В. А., Тарасов В. Ф. Об упругости закрученных потоков.— ДАН СССР, 1980, т. 253, № 3.
8. Prandtl L. Einfluss stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz.—In: Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen, Teil 2. Berlin: Springer-Verlag, 1961.
9. Bradshaw P. The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, N 1.
10. Владимиров В. А., Луговцов Б. А., Тарасов В. Ф. Подавление турбулентности в течениях с концентрированными вихрями.— ПМТФ, 1980, № 5.
11. Zeldovich Y. B. On the fraction of fluids between rotating cylinders.— Proc. Roy. Soc. Lond., 1981, A., vol. 374, p. 299.
12. Новожилков В. В. О расчете турбулентного течения между двумя соосными вращающимися цилиндрами.— ДАН СССР, 1981, т. 258, № 6.
13. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В. и др. Экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости движения жидкости внутри эллиптического цилиндра.— Изв. АН СССР. ФАО, 1975, т. 11, № 10.
14. Гледзер Е. Б., Обухов А. М., Пономарев В. М. Об устойчивости движения жидкости в сосудах эллиптического сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
15. Tsai Chon-Yin, Widnall S. E. The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field.— J. Fluid Mech., 1976, vol. 73, N 4.
16. Widnall S. E., Tsai Chon-Yin. The instability of the thin vortex ring of constant vorticity.— Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., 1977, vol. 287, N 1344.
17. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1980.
18. Hasselman K. A criterion for nonlinear wave stability.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, N 4.
19. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1954, т. 18, № 1.

УДК 532.5.031

ПОДВОДНЫЙ ВЗРЫВ КОЛЬЦЕВОГО ЗАРЯДА ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. К. Кедринский, В. Т. Кузавов

(Новосибирск)

Изучению эффектов, сопровождающих подводные взрывы сосредоточенных зарядов вблизи свободной поверхности, посвящен ряд работ, в которых исследованы процесс образования направленных выбросов — султанов [1—4], развитие кавитации и структура волнового поля [5, 6]. В [4] показано, что в зависимости от глубины взрыва имеют место различные типы султанов: полный цилиндрический вертикальный выброс — стенки открытой каверны, образовавшейся при разгерметизации взрывной полости (последующее замыкание ее приводит к развитию осевого струйного течения), несколько сплошных вертикальных и радиальных султанов. В результате анализа процесса формирования одного из видов вертикальных выбросов при подводных взрывах крупных зарядов весом около 100 кг и более на глубинах в несколько десятков метров в [4] высказано предположение, что механика их развития связана с особенностями течения, возникающего при пульсации тороидальной полости с продуктами детонации.

Тор образуется при всплывании в тяжелой жидкости и деформации первоначально сферической взрывной полости с максимальным радиусом порядка 10 м. Последовательность такой трансформации определяется развитием вертикально вверх кумулятивного течения в нижней части схлопывающейся полости в процессе ее первой пульсации и нарушением односвязности области при замыкании вершины кумулятивной струи на верхнюю часть полости.

Процесс формирования вертикальных султанов указанного типа был экспериментально промоделирован на взрывах кольцевых зарядов (в основном из детонационного шнура (ДШ)) для широкого диапазона значений их радиусов a_0 (от нескольких сантиметров до нескольких метров), энергий и глубин взрыва. Естественно, при этом возникают дополнительные эффекты, связанные с излучением ударной волны, которая имеет форму, близкую к тороидальной, распространяется во внешнюю относительно кольца область и фокусируется в зоне его оси. Так как скорость детонационной волны D во взрывчатом веществе ДШ примерно в 5 раз превосходит скорость фронта I слабой ударной волны в воде, последняя сходится в области Z , несколько смещенной относительно оси кольца Z ; форма этой