

УДК 532.62; 536.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В ТОНКОЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ ПАУЭЛЛА — ЭЙРИНГА НА НЕСТАЦИОНАРНО РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ЧЕБЫШЕВА

М. М. Хайдер, А. М. Меджахед*

Колледж наук Исламского университета Аль-Имама Мохаммеда Ибн Сауда,
Рийяд, Саудовская Аравия

* Университет г. Бенха, 13518 Бенха, Египет

E-mails: mohamedmbd@yahoo.com, ah-mg-sh@yahoo.com

Проведен анализ нестационарного двумерного течения и теплообмена в пленке ламинарной жидкости Пауэлла — Эйринга на горизонтальной растягивающейся поверхности при наличии тепловыделения. Нестационарные уравнения пограничного слоя приводятся к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью метода конечных разностей Чебышева найдено численное решение полученных нелинейных дифференциальных уравнений. Проведено сравнение результатов численных расчетов с известными результатами для предельных случаев течений. Исследовано влияние определяющих параметров на поля скорости и температуры.

Ключевые слова: жидкость Пауэлла — Эйринга, течение тонкой пленки, нестационарно растягивающаяся пластина, тепловыделение, метод конечных разностей Чебышева.

Введение. Течение и теплообмен в тонкой пленке жидкости на растягивающейся пластине используются в машиностроении и различных технологических процессах (конструирование теплообменников и оборудования для проведения химических реакций, нанесение покрытий на провода и волокна, полимеризация и охлаждение испарением, производство продуктов питания, а также в реакторах с псевдооживленным слоем).

Многие металлургические процессы, такие как волочение, отжиг и обдирка волокон, основаны на протягивании их через покоящуюся жидкость. Интерес к исследованию течения и теплообмена на растягивающейся поверхности, выходящей из разреза, обусловлен использованием этих процессов в промышленности. В частности, при экструзии полимерной пластины из матрицы пластина иногда растягивается. Свойства конечного продукта зависят от скорости охлаждения и скорости растяжения при протягивании такой пластины через систему охлаждения. В работе [1], по-видимому, впервые аналитически получены характеристики процесса теплообмена в стационарном двумерном полубесконечном слое жидкости, увлекаемом пластиной, которая движется со скоростью, линейно зависящей от расстояния от некоторой неподвижной точки. В [2] исследованы различные характеристики процесса теплообмена, происходящего в бесконечной жидкой среде, окружающей

растягивающуюся пластину. В [3] рассмотрена гидродинамическая задача о течении слоя жидкости конечной толщины на нестационарно растягивающейся пластине со скоростью, закон изменения которой позволяет построить автомодельное решение, удовлетворяющее как полным уравнениям Навье — Стокса, так и уравнениям пограничного слоя. Осесимметричное течение жидкости, вызванное движением нестационарно растягивающейся пластины, изучено в [4]. Для вязких жидкостей гидродинамическая задача о течении Ванга [3] была исследована в [5], для жидкостей со степенным законом — в [6], для жидкостей второго класса — в [7], для вязких жидкостей в пористой среде — в [8]. Нестационарное течение и теплообмен в тонкой пленке вязкой жидкости на горячей горизонтальной растягивающейся поверхности проанализированы в работе [9]. В [10, 11] исследовано влияние вязкой диссипации и неоднородного источника тепла на магнитогидродинамическое течение пленки жидкости, покрывающей нестационарно растягивающуюся поверхность. В [12] изучено влияние переменной вязкости и теплопроводности на течение и теплообмен в тонкой пленке электропроводной жидкости со степенным законом на нестационарно растягивающейся пластине при наличии поперечного магнитного поля.

До настоящего времени исследованию двумерного течения жидкости Пауэлла — Эйринга уделялось недостаточно внимания, несмотря на то что эта модель жидкости имеет ряд преимуществ по сравнению с другими моделями неньютоновских жидкостей. Во-первых, модель Пауэлла — Эйринга основана на кинетической теории жидкостей, а не на эмпирическом соотношении. Во-вторых, она аналогична модели ньютоновской жидкости для низких и высоких скоростей сдвига. Течение жидкости Пауэлла — Эйринга изучалось также в работах [13–16]. В [17] с использованием модели Пауэлла — Эйринга численно исследовано течение на клине. Течение и теплообмен в жидкости Пауэлла — Эйринга на непрерывно движущейся поверхности с учетом скорости свободного потока исследованы в [18].

Многочлены Чебышева широко использовались при численном решении краевых задач [19] и задач вычислительной гидроаэродинамики [20, 21]. В сингулярных задачах Штурма — Лиувилля полиномы Чебышева являются собственными функциями. Существование быстрого фурье-преобразования для многочленов Чебышева позволяет быстро вычислить матрично-векторные произведения, поэтому они используются чаще, чем другие семейства ортогональных многочленов [22–24]. Одно из преимуществ применения многочленов Чебышева как функций разложения состоит в том, что они хорошо аппроксимируют гладкие функции, в случае если эти функции бесконечно дифференцируемы. Данный метод используется при решении эллиптических уравнений второго и четвертого порядка [25], интегродифференциальных уравнений [26], а также для получения численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений [27] и уравнений в частных производных [28].

В настоящей работе метод конечных разностей Чебышева (МКРЧ) высокой точности применяется для численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При использовании этого метода требуется дискретизация расчетной области, а также применение метода конечных элементов, чтобы обеспечить выполнение дифференциального уравнения и граничных условий в узлах сетки. В результате получается конечно-разностная схема на неравномерной сетке.

Целью данной работы является изучение с использованием МКРЧ влияния свойств жидкости и тепловыделения на течение и теплообмен в тонкой пленке жидкости Пауэлла — Эйринга на нестационарно растягивающейся пластине.

1. Формулировка задачи. Рассмотрим нестационарное двумерное ламинарное течение в пограничном слое неньютоновской жидкости Пауэлла — Эйринга на растягивающейся пластине, погруженной в несжимаемую жидкость. Ось x направлена вдоль плоскости

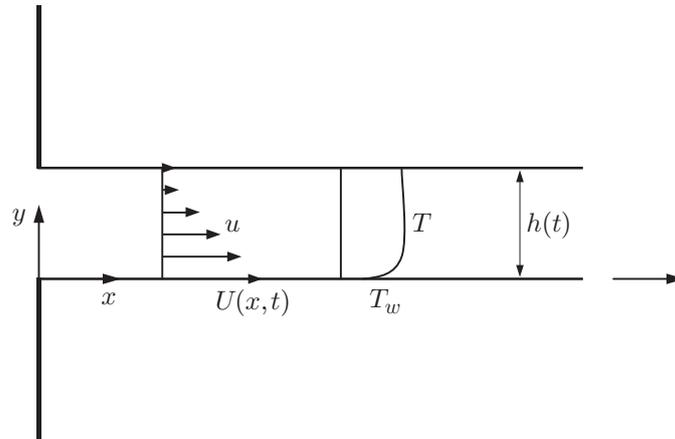


Рис. 1. Схема задачи

пластины, а ось y — по нормали к плоскости. Сплошная поверхность, ориентированная вдоль оси x ($y = 0$), движется в своей плоскости со скоростью $U(x, t)$ при температуре $T_w(x, t)$ (рис. 1). Тонкая пленка жидкости постоянной толщины $h(t)$ находится на горизонтальной поверхности. Выражение для тензора напряжений в жидкости Пауэлла — Эйринга имеет вид [14]

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\tilde{\beta}} \operatorname{sh}^{-1} \left(\frac{1}{C} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

где μ — вязкость; $\tilde{\beta}$, C — характеристики модели Пауэлла — Эйринга.

Используя стандартные аппроксимации пограничного слоя, запишем уравнения сохранения массы, импульса и энергии в пограничном слое

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\varkappa}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q'''}{\rho c_p}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u , v — компоненты скорости в направлениях x и y соответственно; ρ — плотность жидкости; T — температура жидкости; t — время; \varkappa — теплопроводность; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; q''' — скорость тепловыделения.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u &= U, \quad v = 0, \quad T = T_w, \\ y = h: \quad u &= 0, \quad T = T_\infty, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = \frac{\partial h}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2)$$

где U — скорость поверхности растягивающейся пластины; T_w — температура поверхности; T_∞ — температура свободного потока. Течение вызвано растяжением упругой поверхности при $y = 0$, т. е. сплошная пластина движется в направлении x со скоростью

$$U = bx/(1 - at),$$

где a , b — положительные константы, c^{-1} . Следует отметить, что задача корректна только при $at < 1$. Выделение или поглощение тепла q''' моделируется уравнением [29]

$$q''' = \frac{\varkappa \operatorname{Re}_x}{x^2} [a^*(T_w - T_\infty) e^{-\eta} + b^*(T - T_\infty)], \quad (3)$$

где $Re_x = \rho U x / \mu$ — локальное число Рейнольдса; первый член представляет собой зависимость выделения или поглощения тепла от пространственных координат, последний — зависимость выделения или поглощения тепла от температуры; a^* — параметр источника (стока) тепла, зависящий от температуры; b^* — параметр источника (стока) тепла, зависящий от пространственных координат. Заметим, что при $a^* > 0$, $b^* > 0$ имеет место тепловыделение, при $a^* < 0$, $b^* < 0$ — поглощение тепла.

Введем следующие безразмерные координаты:

$$\eta = \left(\frac{b}{\mu/\rho}\right)^{1/2} (1-at)^{-1/2} y, \quad \psi = \left(\frac{\mu b}{\rho}\right)^{1/2} (1-at)^{-1/2} x f(\eta),$$

$$T = T_\infty + T_0 \left(\frac{dx^2}{2\mu/\rho}\right) (1-at)^{-3/2} \theta(\eta), \quad T_w = T_\infty + T_0 \left(\frac{dx^2}{2\mu/\rho}\right) (1-at)^{-3/2}.$$
(4)

Здесь f — безразмерная функция тока; θ — безразмерная температура жидкости; d — постоянная. С использованием уравнений (4) система уравнений (1), (2) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$f'''[1 + \alpha(1 + \beta f''^2)^{-1/2}] - S f' - S \eta f''/2 - f'^2 + f f'' = 0,$$

$$\theta'' + Pr [f \theta' - 2 f' \theta - S(3\theta + \eta \theta')/2] + a^* e^{-\eta} + b^* \theta = 0;$$
(5)

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad \theta(0) = 1,$$

$$f''(\delta) = 0, \quad \theta'(\delta) = 0, \quad f(\delta) = \delta S/2.$$
(6)

Здесь штрих обозначает дифференцирование по η ; $S = a/b$ — параметр нестационарности; $Pr = \mu c_p / \kappa$ — число Прандтля; $\alpha = (C\mu\tilde{\beta})^{-1}$, $\beta = \rho U^3 / (x\mu C^2)$ — безразмерные параметры.

Толщина пленки может быть определена из следующего условия: если $\eta = \delta$, то $y = h$. Тогда из (4) следует

$$h(t) = \delta(b\rho/\mu)^{-1/2} (1-at)^{1/2}.$$

Физическими величинами, определяющими характер течения, являются локальный коэффициент поверхностного трения Cf_x и локальное число Нуссельта Nu_x :

$$Cf_x = -\frac{2\mu}{\rho U^2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = -2 Re_x^{-1/2} f''(0), \quad Nu_x = -\frac{x}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -Re_x^{1/2} \theta'(0).$$

2. Решение с использованием метода конечных разностей Чебышева. С использованием МКРЧ решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (5) с заданными граничными условиями (6). Применим преобразование $\eta = (\delta/2)(x+1)$, для того чтобы интервал $[0, \delta]$ привести к интервалу $[-1, 1]$. В этом случае уравнения (5), (6) принимают вид

$$(2/\delta)^3 f'''[1 + \alpha(1 + \beta(2/\delta)^4 f''^2)^{-1/2}] - S(2/\delta) f' - (2/\delta)^2 (S \eta f''/2 + f'^2 - f f'') = 0,$$

$$(2/\delta)^2 \theta'' + Pr [2 f \theta' / \delta - 4 f' \theta / \delta - S(3\theta + 2 \eta \theta' / \delta) / 2] + a^* e^{-\eta} + b^* \theta = 0,$$

$$f(-1) = 0, \quad f'(-1) = \delta/2, \quad \theta(-1) = 1,$$

$$f''(1) = 0, \quad \theta'(1) = 0, \quad f(1) = \delta S/2,$$
(7)

где штрих обозначает дифференцирование по x .

Аппроксимируем неизвестные решения $f(x)$ и $\theta(x)$ следующим образом [19]:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x), \quad \theta(x) = \sum_{n=0}^N b_n T_n(x).$$
(8)

Здесь

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N{}'' f(x_j) T_n(x_j), \quad b_n = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N{}'' \theta(x_j) T_n(x_j),$$

знак суммы с двумя штрихами обозначает сумму, в которой первый и последний члены разделены на два.

Первые три производные функций Чебышева вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= \sum_{\substack{k=0 \\ n+k \text{ нечетное}}}^{n-1} \frac{2n}{c_k} T_k(x), & T_n''(x) &= \sum_{\substack{k=0 \\ n+k \text{ четное}}}^{n-2} \frac{n}{c_k} (n^2 - k^2) T_k(x), \\ T_n'''(x) &= \sum_{\substack{k=0 \\ n+k \text{ четное}}}^{n-2} \sum_{\substack{j=0 \\ j+k \text{ нечетное}}}^{k-1} \frac{2nk}{c_j c_k} (n^2 - k^2) T_j(x), \end{aligned} \quad (9)$$

где $c_0 = 2$ и $c_i = 1$ при $i \geq 1$. Дифференцируя ряды (8) почленно, из уравнений (9) получаем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{N} \sum_{n=0}^N{}'' \sum_{j=0}^N{}'' \sum_{\substack{k=0 \\ n+k \text{ нечетное}}}^{n-1} \frac{n}{c_k} f(x_j) T_n(x_j) T_k(x), \\ \theta'(x) &= \frac{4}{N} \sum_{n=0}^N{}'' \sum_{j=0}^N{}'' \sum_{\substack{k=0 \\ n+k \text{ нечетное}}}^{n-1} \frac{n}{c_k} \theta(x_j) T_n(x_j) T_k(x), \\ f''(x) &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N{}'' \sum_{j=0}^N{}'' \sum_{\substack{k=0 \\ n+k \text{ четное}}}^{n-2} \frac{n}{c_k} (n^2 - k^2) f(x_j) T_n(x_j) T_k(x), \\ \theta''(x) &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N{}'' \sum_{j=0}^N{}'' \sum_{\substack{k=0 \\ n+k \text{ четное}}}^{n-2} \frac{n}{c_k} (n^2 - k^2) \theta(x_j) T_n(x_j) T_k(x), \\ f'''(x) &= \frac{4}{N} \sum_{n=0}^N{}'' \sum_{j=0}^N{}'' \sum_{\substack{k=0 \\ n+k \text{ четное}}}^{n-2} \sum_{\substack{i=0 \\ i+k \text{ нечетное}}}^{k-1} \frac{kn}{c_i c_k} (n^2 - k^2) f(x_j) T_n(x_j) T_k(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнений (10) можно определить элементы матриц D_n , $n = 1, 2, 3$, используя соотношения [19]

$$[f^{(n)}] = D_n[f], \quad [\theta^{(n)}] = D_n[\theta], \quad n = 1, 2, 3,$$

где $D_n = [d_{i,j}^{(n)}]$ — квадратная матрица порядка $N + 1$; $[f^{(n)}]$, $[\theta^{(n)}]$ — элементы столбца матрицы:

$$f_i^{(n)} = f^{(n)}(x_i), \quad \theta_i^{(n)} = \theta^{(n)}(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Производные функций $f(x)$ и $\theta(x)$ в точках x_k вычисляются по формулам

$$f^{(n)}(x_k) = \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(n)} f(x_j), \quad \theta^{(n)}(x_k) = \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(n)} \theta(x_j),$$

где $d_{k,j}^{(n)}$ ($j = 0, 1, \dots, N$) — элементы k -й строки матрицы D_n . Эти элементы определяются следующим образом:

$$d_{k,j}^{(1)} = \frac{4\theta_j}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{l=0 \\ n+l \text{ нечетное}}}^{n-1} \frac{n\theta_n}{c_l} T_n(x_j) T_l(x_k),$$

$$d_{k,j}^{(2)} = \frac{2\theta_j}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{l=0 \\ n+l \text{ четное}}}^{n-2} \frac{n\theta_n}{c_l} (n^2 - l^2) T_n(x_j) T_l(x_k),$$

$$d_{k,j}^{(3)} = \frac{4\theta_j}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{l=0 \\ n+l \text{ четное}}}^{n-2} \sum_{\substack{i=0 \\ i+l \text{ нечетное}}}^{l-1} \frac{nl\theta_n}{c_i c_l} (n^2 - l^2) T_n(x_j) T_l(x_k), \quad k, j = 0, 1, \dots, N.$$

Здесь

$$\theta_0 = \theta_N = 1/2, \quad \theta_j = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Применяя МКРЧ для решения уравнений (7), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений для неизвестных $f(\xi_i)$, $\theta(\xi_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\delta}\right)^3 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(3)} f(\xi_j) \left\{ 1 + \alpha \left[1 + \beta \left(\frac{2}{\delta}\right)^4 \left(\sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(2)} f(\xi_j) \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} - S \frac{2}{\delta} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(1)} f(\xi_j) - \\ & - \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 \left[\frac{S}{2} \xi_j \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(2)} f(\xi_j) + \left(\sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(1)} f(\xi_j) \right)^2 - f(\xi_j) \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(2)} f(\xi_j) \right] = 0, \\ & \left(\frac{2}{\delta}\right)^2 \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(2)} \theta(\xi_j) + \text{Pr} \left[\frac{2}{\delta} f(\xi_j) \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(1)} \theta(\xi_j) - \frac{4}{\delta} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(1)} f(\xi_j) \theta(\xi_j) - \right. \\ & \left. - \frac{S}{2} \left(3\theta(\xi_j) + \frac{2\xi_j}{\delta} \sum_{j=0}^N d_{k,j}^{(1)} \theta(\xi_j) \right) \right] + a^* e^{-\xi_j} + b^* \theta(\xi_j) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

При использовании МКРЧ первое и последнее уравнения системы (11) заменяются граничными условиями $f'(-1) = \delta/2$, $\theta'(1) = 0$, $f''(1) = 0$, которые имеют вид

$$\sum_{j=0}^N d_{0,j}^{(1)} f(\xi_j) = \frac{\delta}{2}, \quad \sum_{j=0}^N d_{N,j}^{(1)} \theta(\xi_j) = 0, \quad \sum_{j=0}^N d_{N,j}^{(2)} \theta(\xi_j) = 0, \tag{12}$$

где $\xi_k = -\cos(k\pi/N)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Система $N + 1$ нелинейных алгебраических уравнений (11), (12) решается методом Ньютона. Для тестирования предложенного численного метода проведено сравнение значений $f''(0)$, $\theta(\delta)$, $\theta'(0)$ при $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $a^* = 0$, $b^* = 0$ со значениями, полученными в

Таблица 1

Значения δ и $-f''(0)$, полученные с использованием результатов [11] и данной работы при $\alpha = \beta = 0$

S	Данные работы [11]		Данные настоящей работы	
	δ	$-f''(0)$	δ	$-f''(0)$
0,4	4,981 455	1,134 098	4,981 455	1,134 096
0,6	3,131 710	1,195 128	3,131 711	1,195 125
0,8	2,151 990	1,245 805	2,151 992	1,245 805
1,0	1,543 617	1,277 769	1,543 616	1,277 769
1,2	1,127 780	1,279 171	1,127 781	1,279 171
1,4	0,821 033	1,233 545	0,821 032	1,233 545
1,6	0,576 176	1,114 941	0,576 175	1,114 939
1,8	0,356 390	0,867 416	0,356 389	0,867 416

Таблица 2

Значения $\theta(\delta)$ и $-\theta'(0)$, полученные с использованием результатов [11] и данной работы при $a^* = b^* = 0$

Pr	S	δ	Данные работы [11]		Данные настоящей работы	
			$\theta(\delta)$	$-\theta'(0)$	$\theta(\delta)$	$-\theta'(0)$
0,01	0,8	2,151 990	0,960 438	0,042 120	0,960 480	0,042 042
0,1			0,692 269	0,351 920	0,692 533	0,351 377
1,0			0,097 825	1,671 919	0,097 884	1,671 003
2,0			0,024 869	2,443 914	0,024 862	2,443 866
3,0			0,008 324	3,034 915	0,008 311	3,036 115
0,01	1,2	1,127 780	0,982 312	0,033 515	0,982 331	0,033 459
0,1			0,843 485	0,305 409	0,843 622	0,304 963
1,0			2,866 340	1,773 772	2,867 180	1,773 030
2,0			0,128 174	2,638 431	0,128 123	2,638 725
3,0			0,067 737	3,280 329	0,067 645	3,281 949

работе [11] ($M = 0$, $E_s = 0$). Результаты расчетов приведены в табл. 1, 2. Из табл. 1, 2 следует, что эти результаты хорошо согласуются.

3. Результаты исследования и их обсуждение. Рассматриваемая задача о течи и теплообмене является краевой задачей с шестью параметрами S , α , β , Pr, a^* , b^* . Исследуем влияние этих параметров на поля скорости и температуры.

На рис. 2,а представлен типичный профиль безразмерной скорости $f'(\eta)$ при различных значениях параметра нестационарности S . Поскольку толщина пленки является убывающей функцией S , с увеличением S скорость свободной поверхности $f'(\eta)$ увеличивается. На рис. 2,б показаны безразмерные профили температуры при различных значениях S . Видно, что с увеличением значений S температура свободной поверхности $\theta(\eta)$ увеличивается.

На рис. 3,а показано влияние неньютоновского параметра жидкости α на скорость. Видно, что с увеличением α скорость свободной поверхности $f'(\eta)$ и толщина пленки δ увеличиваются. Это обусловлено тем, что при меньшем значении α жидкость имеет большую вязкость. Безразмерные профили температуры при различных значениях параметра α представлены на рис. 3,б. С увеличением α безразмерная температура жидкости $\theta(\eta)$ и температура свободной поверхности $\theta(\delta)$ уменьшаются.

На рис. 4,а показано влияние параметра β на профиль скорости. Видно, что с увеличением параметра β скорость уменьшается. Из рис. 4,б следует, что с увеличением значения параметра β безразмерная температура $\theta(\eta)$ в любой точке и температура свободной по-

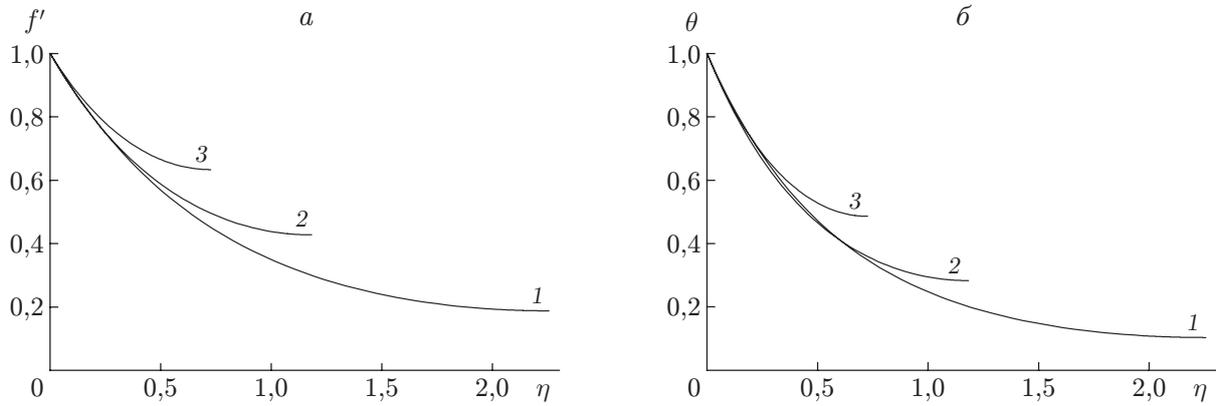


Рис. 2. Распределения скорости (а) и температуры (б) при различных значениях параметра S :
 $a - \alpha = 0,1, \beta = 0,1, б - Pr = 1, a^* = b^* = 0,1; 1 - S = 0,8, 2 - S = 1,2, 3 - S = 1,5$

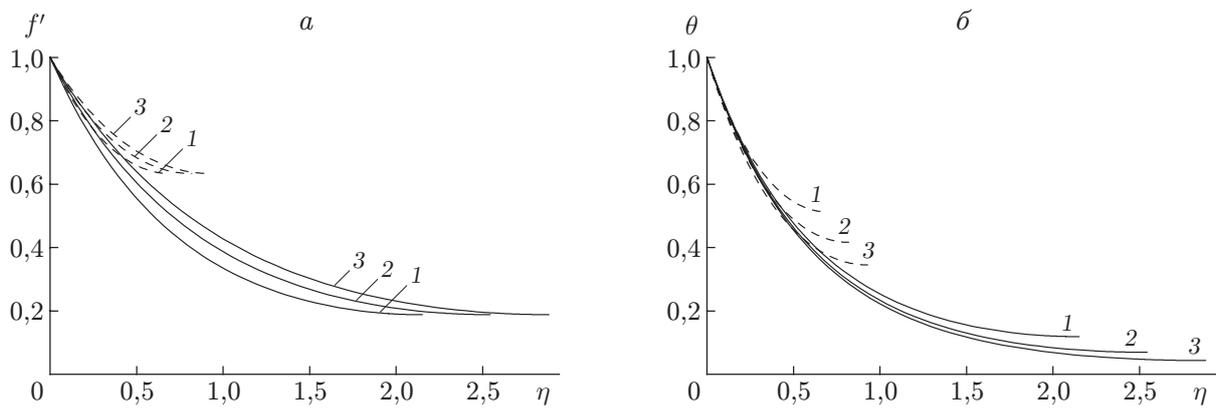


Рис. 3. Распределения скорости (а) и температуры (б) при различных значениях параметра α :
 $a - \beta = 0,1, б - Pr = 1, a^* = b^* = 0,1; \text{сплошные линии} - S = 0,8, \text{штриховые} - S = 1,5; 1 - \alpha = 0, 2 - \alpha = 0,4, 3 - \alpha = 0,8$

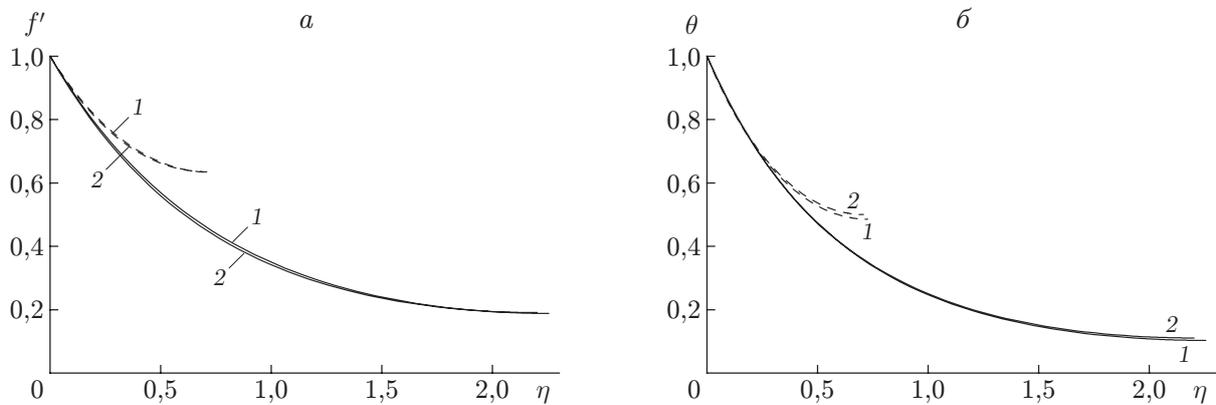


Рис. 4. Распределения скорости (а) и температуры (б) при различных значениях параметра β :
 $a - \alpha = 0,1, б - Pr = 1, a^* = b^* = 0,1; \text{сплошные линии} - S = 0,8, \text{штриховые} - S = 1,5; 1 - \beta = 0, 2 - \beta = 8$

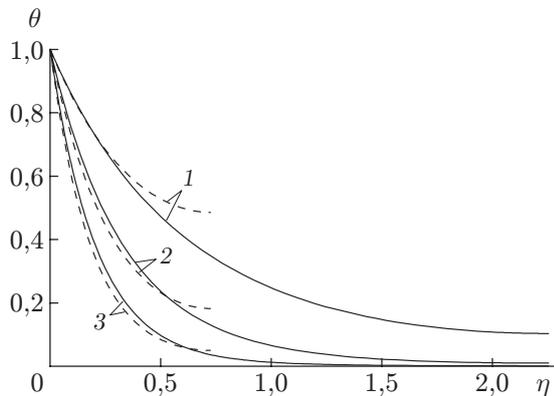


Рис. 5

Рис. 5. Распределение температуры при $\alpha = \beta = 0,1$, $a^* = b^* = 0,1$ и различных значениях Pr :

сплошные линии — $S = 0,8$, штриховые — $S = 1,5$; 1 — $Pr = 1$, 2 — $Pr = 3$, 3 — $Pr = 7$

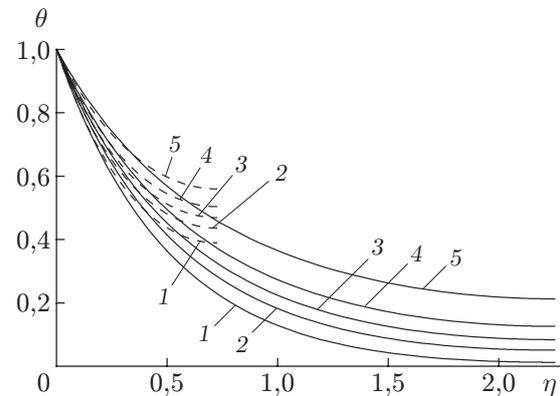


Рис. 6

Рис. 6. Распределение температуры при $\alpha = \beta = 0,1$, $Pr = 1$ и различных значениях a^* , b^* :

сплошные линии — $S = 0,8$, штриховые — $S = 1,5$; 1 — $a^* = b^* = -0,5$, 2 — $a^* = b^* = -0,2$, 3 — $a^* = b^* = 0$, 4 — $a^* = b^* = 0,2$, 5 — $a^* = b^* = 0,5$

верхности $\theta(\delta)$ увеличиваются. Следует отметить, что профили скорости и температуры слабо зависят от параметра β .

На рис. 5 показана зависимость безразмерной температуры от η при различных значениях числа Прандтля и S . Видно, что температура уменьшается до значения, равного температуре свободной поверхности. Кроме того, с увеличением числа Прандтля температура также уменьшается. Это обусловлено тем, что при большем числе Прандтля жидкость обладает большей теплоемкостью и, следовательно, в ней увеличивается теплообмен. На рис. 6 показано влияние параметра тепловыделения (поглощения) a^* , зависящего от пространственных координат, и параметра тепловыделения (поглощения) b^* , зависящего от температуры, на распределение температуры при различных значениях S . Прежде чем перейти к обсуждению результатов, напомним, что случай $a^* > 0$, $b^* > 0$ соответствует выделению тепла, а случай $a^* < 0$, $b^* < 0$ — его поглощению. Из рис. 6 следует, что при $a^* > 0$, $b^* > 0$ выделяется энергия, в результате чего температура увеличивается и при $S = 0,8$, и при $S = 1,5$, тогда как при $a^* < 0$, $b^* < 0$ энергия поглощается, что приводит к существенному уменьшению температуры вблизи пограничного слоя.

В табл. 3 приведены значения $-f''(0)$ и $-\theta'(0)$, соответствующие локальному поверхностному трению и локальному числу Нуссельта, при различных значениях параметров α , β , параметра выделения (поглощения) тепла a^* , зависящего от пространственных координат, параметра выделения (поглощения) тепла b^* , зависящего от температуры, и числа Прандтля Pr для случаев $S = 0,8$; $1,5$. Из табл. 3 следует, что с увеличением параметра β локальный коэффициент поверхностного трения и температура свободной поверхности увеличиваются, а толщина пленки и локальное число Нуссельта уменьшаются. Кроме того, с увеличением параметра α локальный коэффициент поверхностного трения и температура свободной поверхности уменьшаются, а локальное число Нуссельта и толщина тонкой пленки увеличиваются. Заметим, что с увеличением параметра поглощения тепла локальное число Нуссельта увеличивается, а температура свободной поверхности уменьшается. Это обусловлено тем, что увеличение параметра поглощения тепла приводит к

Таблица 3

Значения $-f''(0)$ и $-\theta'(0)$ при различных значениях $\alpha, \beta, Pr, a^*, b^*, S$

α	β	Pr	a^*	b^*	δ	S	$-f''(0)$	$\theta(\delta)$	$-\theta'(0)$
0	0,1	1	0,1	0,1	2,1520	0,8	1,2458	0,1192	1,5939
0,4	0,1	1	0,1	0,1	2,5434	0,8	1,0568	0,0697	1,6267
0,8	0,1	1	0,1	0,1	2,8833	0,8	0,9328	0,0436	1,6472
0	0,1	1	0,1	0,1	0,6931	1,5	1,1857	0,5129	1,6619
0,4	0,1	1	0,1	0,1	0,8191	1,5	1,0054	0,4168	1,7645
0,8	0,1	1	0,1	0,1	0,9285	1,5	0,8873	0,3454	1,8259
0,1	0	1	0,1	0,1	2,2570	0,8	1,1878	0,1033	1,6041
0,1	8,0	1	0,1	0,1	2,2038	0,8	1,2324	0,1110	1,5977
0,1	0	1	0,1	0,1	0,7270	1,5	1,1305	0,4856	1,6935
0,1	8,0	1	0,1	0,1	0,7082	1,5	1,1714	0,5006	1,6761
0,1	0,1	1	0,1	0,1	2,2560	0,8	1,1896	0,1034	1,6039
0,1	0,1	3	0,1	0,1	2,2560	0,8	1,1896	0,0099	2,9596
0,1	0,1	7	0,1	0,1	2,2560	0,8	1,1896	0,0014	4,7218
0,1	0,1	1	0,1	0,1	0,7266	1,5	1,1319	0,4859	1,6931
0,1	0,1	3	0,1	0,1	0,7266	1,5	1,1319	0,1823	3,3994
0,1	0,1	7	0,1	0,1	0,7266	1,5	1,1319	0,0504	5,3596
0,1	0,1	1	-0,5	-0,5	2,2560	0,8	1,1896	0,0122	2,0304
0,1	0,1	1	-0,2	-0,2	2,2560	0,8	1,1896	0,0505	1,8261
0,1	0,1	1	0	0	2,2560	0,8	1,1896	0,0837	1,6803
0,1	0,1	1	0,2	0,2	2,2560	0,8	1,1896	0,1257	1,5249
0,1	0,1	1	0,5	0,5	2,2560	0,8	1,1896	0,2125	1,2683
0,1	0,1	1	-0,5	-0,5	0,7266	1,5	1,1319	0,3892	2,0743
0,1	0,1	1	-0,2	-0,2	0,7266	1,5	1,1319	0,4357	1,8880
0,1	0,1	1	0	0	0,7266	1,5	1,1319	0,4688	1,7591
0,1	0,1	1	0,2	0,2	0,7266	1,5	1,1319	0,5036	1,6261
0,1	0,1	1	0,5	0,5	0,7266	1,5	1,1319	0,5594	1,4183

возникновению вблизи горячей поверхности слоя холодной жидкости, поэтому скорость теплообмена на поверхности увеличивается. Кроме того, с увеличением значений параметра тепловыделения локальное число Нуссельта уменьшается, а температура свободной поверхности увеличивается. Это происходит потому, что тепловыделение вызывает увеличение температуры жидкости вблизи поверхности пластины и тем самым уменьшение температурного градиента и теплообмена на поверхности. С увеличением числа Прандтля локальное число Нуссельта увеличивается, а температура свободной поверхности уменьшается. Это обусловлено тем, что жидкость с большими значениями числа Прандтля обладает большей теплоемкостью, поэтому теплообмен увеличивается.

Заклучение. Проведено исследование процесса тепловыделения в случае течения пленки вязкой жидкости Пауэлла — Эйринга на нестационарно растягивающейся пластине. Для решения полученной системы сильнонелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями использовалась схема конечных разностей Чебышева. Исследовано влияние различных параметров течения на обмен импульсом и теплом в тонких пленках. Установлено, что с увеличением параметра α толщина вытеснения тонкой пленки увеличивается, а толщина теплового пограничного слоя уменьшается. При этом с увеличением параметра нестационарности толщина вытеснения тонкой пленки уменьшается. Наличие параметров выделения или поглощения тепла оказывает существенное влияние на температуру свободной поверхности. Кроме того, увеличение числа Прандтля приводит к уменьшению температуры в тонкой пленке. Это вызвано тем,

что меньшие значения числа Прандтля соответствуют бóльшей теплопроводности, поэтому тепло быстрее диффундирует вдали от горячей поверхности. Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что использование предложенного метода при проведении численных расчетов является обоснованным. Результаты расчетов хорошо согласуются с реальной картиной течения. Кроме того, полученные результаты свидетельствуют о надежности и эффективности предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // *Z. angew Math. Phys.* 1970. Bd 21. S. 645–647.
2. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // *Canad. J. Chem. Engng.* 1977. V. 55. P. 744–746.
3. **Wang C. Y.** Liquid film on an unsteady stretching surface // *Quart. Appl. Math.* 1990. V. 48. P. 601–610.
4. **Usha R., Sridharan R.** The axisymmetric motion of a liquid film on an unsteady stretching surface // *Trans. ASME. J. Fluids Engng.* 1995. V. 117. P. 81–85.
5. **Wang C.** Analytic solutions for a liquid film on an unsteady stretching surface // *Heat Mass Transfer.* 2006. V. 42. P. 759–766.
6. **Wang C., Pop I.** Analysis of the flow of a power-law fluid film on an unsteady stretching surface by means of homotopy analysis method // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2006. V. 138. P. 161–172.
7. **Hayat T., Saif S., Abbas Z.** The influence of heat transfer in an MHD second grade fluid film over an unsteady stretching sheet // *Phys. Lett. A.* 2008. V. 372. P. 5037–5045.
8. **Elgazery N. S., Hassan M. A.** The effects of variable fluid properties and magnetic field on the flow of non-Newtonian fluid film on an unsteady stretching sheet through a porous medium // *Comm. Numer. Methods Engng.* 2008. V. 24. P. 2113–2129.
9. **Santra B., Dandapat B. S.** Unsteady thin-film flow over a heated stretching sheet // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2009. V. 52. P. 1965–1970.
10. **Abel M. S., Mahesha M., Tawade J.** Heat transfer in a liquid film over an unsteady stretching surface with viscous dissipation in the presence of external magnetic field // *Appl. Math. Modelling.* 2009. V. 33. P. 3430–3441.
11. **Abel M. S., Tawade J., Nandeppanavar M. M.** Effect of non-uniform heat source on MHD heat transfer in a liquid film over an unsteady stretching sheet // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2009. V. 44. P. 990–998.
12. **Mahmoud M. A. A., Megahed A. M.** MHD flow and heat transfer in a non-Newtonian liquid film over an unsteady stretching sheet with variable fluid properties // *Canad. J. Phys.* 2009. V. 87. P. 1065–1071.
13. **Sirohi V., Timol M. G., Kalathia N. L.** Numerical treatment of Powell — Eyring fluid flow past a 90 degree wedge // *Reg. J. Energy Heat Mass Transfer.* 1984. V. 6, N 3. P. 219–228.
14. **Powell R. E., Eyring H.** Mechanism for relaxation theory of viscosity // *Nature.* 1944. V. 154. P. 427–428.
15. **Timol M. G., Kalathia N. L.** Similarity solutions of three-dimensional boundary layer equations of non-Newtonian fluids // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 1986. V. 21, N 6. P. 475–481.
16. **Eldabe N. T. M., Hassan A. A., Mohamed M. A. A.** Effect of couple stresses on the MHD of a non-Newtonian unsteady flow between two parallel porous plates // *Z. Naturforsch.* 2003. Bd 58a. S. 204–210.
17. **Patel M., Timol M. G.** Numerical treatment of Powell — Eyring fluid flow using method of asymptotic boundary conditions // *Appl. Numer. Math.* 2009. V. 59. P. 2584–2592.

18. **Hayat T., Iqbal Z., Qasim M., Obaidat S.** Steady flow of an Eyring — Powell fluid over a moving surface with convective boundary conditions // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 1817–1822.
19. **Elbarbary E. M. E., El-Kady M.** Chebyshev finite difference approximation for the boundary value problems // Appl. Math. Comput. 2003. V. 139. P. 513–523.
20. **Voigt R. G.** Spectral methods for partial differential equations / R. G. Voigt, D. Gottlieb, M. Y. Hussaini. Philadelphia: SIAM, 1984.
21. **Nasr H., Hassanien I. A., El-Hawary H. M.** Chebyshev solution of laminar boundary layer flow // Intern. J. Comput. Math. 1990. V. 33. P. 127–132.
22. **Khader M. M.** On the numerical solutions for the fractional diffusion equation // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. V. 16. P. 2535–2542.
23. **Khader M. M.** Introducing an efficient modification of the homotopy perturbation method by using Chebyshev polynomials // Arab J. Math. Sci. 2012. V. 18. P. 61–71.
24. **Khader M. M.** Accelerated solution of high order non-linear ODEs using Chebyshev spectral method comparing with Adomian decomposition method // Studies Nonlinear Sci. 2011. V. 2, N 3. P. 91–101.
25. **Khalifa A. K., Elbarbary E. M. E., Abd-Elrazek M. A.** Chebyshev expansion method for solving second and fourth-order elliptic equations // Appl. Math. Comput. 2003. V. 135. P. 307–318.
26. **Sweilam N. H., Khader M. M.** A Chebyshev pseudo-spectral method for solving fractional order integro-differential equations // Austral. New Zealand Industr. Appl. Math. J. 2010. V. 51. P. 464–475.
27. **Akyüz A., Yaslan H.** The solution of high-order nonlinear ordinary differential equations by Chebyshev series // Appl. Math. Comput. 2011. V. 217. P. 5658–5666.
28. **Beckett P. M.** Finite difference solution of boundary layer type equation // Intern. J. Comput. Math. 1983. V. 14. P. 183–190.
29. **Chamkha A. J., Khaled A. A.** Similarity solutions for hydromagnetic simultaneous heat and mass transfer by natural convection from an inclined plate with internal heat generation or absorption // Heat Mass Transfer. 2001. V. 37. P. 117–123.

Поступила в редакцию 5/VII 2012 г.
