

7. Ред. Фонер С., Шварц Б. Сверхпроводящие машины и устройства. М., Мир, 1977.
 8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1969.
 9. Харкевич А. А. Спектры и анализ. М., Физматгиз, 1962.

УДК 533.95

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА, ВЫТАЛКИВАЕМОГО МАГНИТНЫМ ПОРШНЕМ

В. В. Белошицкий, В. С. Комельков, Г. Ю. Петрущенко
(Москва)

Движение газа в плазменных ускорителях и сильноточных разрядах при условии скин-эффекта можно представить как выталкивание его магнитным поршнем под действием заданного тока, протекающего по поверхности. Такая модель была впервые предложена в работе [1] для объяснения пинч-эффекта. На начальной стадии закон нарастания тока достаточно хорошо аппроксимируется линейной функцией времени, а магнитное давление — квадратичной: $p = Ct^n$, где $n = 2$; $C = \text{const}$. При обычных условиях эксперимента магнитное давление много больше начального давления газа, и последним можно пренебречь. В этом случае движение газа является автомодельным. Аналогичная задача для заданного закона изменения скорости поршня рассматривалась ранее [2, 3].

Газ будем считать идеальным одноатомным, а процесс — адиабатическим. Определяющими параметрами в задаче будут координата r , время t , плотность невозмущенного газа ρ_1 , константа C , определяющая закон изменения давления на поршне (начальная скорость $v_1 = 0$ и начальное давление $p_1 = 0$). Из этих параметров можно образовать лишь одну безразмерную переменную

$$\lambda = \sqrt{\frac{C}{\rho_1}} \frac{t^{n/2+1}}{r} = \sqrt{\frac{C}{\rho_1}} \frac{t^{m+1}}{r}, \quad m = \frac{n}{2}.$$

Вводим для скорости, плотности и давления безразмерные функции V , R , P следующим образом:

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad \rho = \rho_1 R(\lambda), \quad p = \frac{\rho_1 r^2}{t^2} P(\lambda), \quad z = \frac{\gamma P}{R},$$

тогда система гидродинамических уравнений приводится к виду [4]

$$(1) \quad \frac{dz}{dV} = z \frac{[2(V-1) + v(\gamma-1)V](V-m-1) -}{(V-m-1)[V(V-1)(V-m-1) -} \\ - (\gamma-1)V(V-1)(V-m-1) - \left[2(V-1) - 2m\frac{\gamma-1}{\gamma}\right]z}{-(2m/\gamma + vV)z};$$

$$(2) \quad \frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{(V-m-1)^2 - z}{V(V-1)(V-m-1) - (2m/\gamma + vV)z};$$

$$(3) \quad \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} (V-m-1) = \frac{V(V-1)(V-m-1) - (2m/\gamma + vV)z}{z - (V-m-1)^2} + vV,$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей; $v = 1, 2, 3$ соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрии.

Рассмотрим дополнительные условия, которые возникают из-за наличия поверхности сильного разрыва перед поршнем. Заметим, что на ударной волне r является функцией t . Следовательно, определяющими параметрами на скачке будут t , ρ_1 , C , из которых нельзя образовать безразмерной величины. Поэтому на ударной волне

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{C}{\rho_1}} \frac{t^{m+1}}{r_2} = \text{const},$$

отсюда координата и скорость ударной волны

$$(4) \quad r_2 = \sqrt{\frac{C}{\rho_1}} \frac{t^{m+1}}{\lambda_2}, \quad D = \frac{dr_2}{dt} = (m+1) \frac{r_2}{t}.$$

Учитывая, что состоянию покоя соответствует точка $V_1 = 0$, $P_1 = 0$, $R_1 = 1$, $z_1 = 0$, из условий сохранения массы, количества движения и энергии при переходе через поверхность сильного разрыва получим [1]

$$(5) \quad V_2 = \frac{2(m+1)}{\gamma}, \quad z_2 = (m+1)^2 \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}, \quad P_2 = \frac{2(m+1)^2}{\gamma+1}, \quad R_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

(индексом 2 обозначены величины за ударной волной).

Рассмотрим граничные условия на поршне. Имеем

$$(6) \quad v^* = \frac{dr^*}{dt} = \frac{r^*}{t} V^*,$$

$$p^* = \rho_1 \frac{r^{*2}}{t^2} P(\lambda^*) = \rho_1 \frac{r^{*2}}{t^2} P^* = C t^n,$$

откуда

$$r^* = \sqrt{\frac{C}{\rho_1}} \frac{t^{m+1}}{\sqrt{P^*}}.$$

Тогда

$$(7) \quad v^* = (m+1) \sqrt{\frac{C}{\rho_1}} \frac{t^m}{\sqrt{P^*}} = C_1 t^m.$$

Перейдем к новой безразмерной переменной

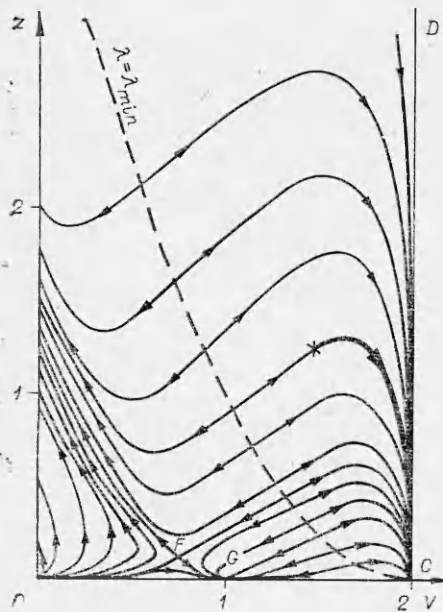
$$(8) \quad \lambda = C_1 t^{m+1}/r.$$

Тогда задача сведется к исследованию автомодельного неустановившегося движения газа, вытесняемого поршнем, скорость которого меняется по степенному закону: $v^* = C_1 t^m$, $C_1 = (m+1)\sqrt{C/\rho_1 P^*}$, $m = n/2$ (уравнения, естественно, сохраняют тот же вид). Эта задача была решена в работах [2, 3] для некоторых значений m и n . В отличие от этих работ константа C_1 нам неизвестна, однако решение задачи практически не усложняется, поскольку величина C_1 необходима только для определения масштаба размерных величин, а для решения системы (1)–(3) она несущественна, так как не входит ни в уравнения, ни в выражения для граничных условий.

Из (6)–(8) получаем граничное условие на поршне

$$V^* = m+1, \lambda^* = m+1.$$

Далее рассмотрим интересный для практики случай плоской симметрии ($\nu = 1$) и $m = 1$. Поведение интегральных кривых уравнения (1) в плоскости Yz для этого случая показано на фиг. 1 (0(0, 0) —



Ф и г. 1

узел, $C(2, 0)$ — узел, $D(2, 00)$ — седло, $G(1, 0)$ — узел, $F(2/(\gamma + 1), \frac{\gamma^2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2(\gamma + 0,5)})$ — седло). Стрелка

ми указано направление возрастания параметра λ вдоль интегральных кривых (на параболе $z = (V - 2)^2$, $\lambda = \lambda_{\min}$). Поскольку при изменении r от поршня до бесконечности λ монотонно убывает от $\lambda^* = 2$ до 0 (точке покоя соответствует точка $0(0, 0)$), непрерывный переход через параболу $z = (V - 2)^2$ физически невозможен. Поэтому из состояния покоя к поршню можем прийти лишь через ударную волну. Таким образом, в плоскости Vz имеем следующую картину движения. Точка из бесконечности, соответствующей состоянию покоя $0(0, 0)$, скачком переходит в точку с координатами (V_2, z_2) (5), затем по интегральной кривой движется до пересечения с прямой $V = 2$, соответствующей частицам

газа, прилегающим к поршню. Эта интегральная кривая выделена на фиг. 1 жирной линией ($\gamma = 5/3$).

Система уравнений (1)–(3) интегрировалась численно. Уравнение (1) интегрировалось методом Адамса от точки (V_2, z_2) до точки $(2, 0)$. Отметим, что при $V \rightarrow 2$ $z = C_z(2 - V)^{1/(1+\gamma)} \rightarrow 0$, постоянная C_z определяется из значений z , полученных численным интегрированием.

Уравнение (2) интегрировалось по формуле Симпсона в обратном направлении, поскольку значение λ известно на поршне и неизвестно на ударной волне. Уравнение (3) было приведено к виду

$$\frac{d \ln R'}{dV} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{2 - V} + \frac{V}{V - 2} \frac{(V - 2)^2 - z}{(V - 2)(V - 1)V - (2/\gamma - V)z},$$

где $R' = R(2 - V)^{1/(1+\gamma)}$, и интегрировалось от точки (V_2, R_2) до поршня также по формуле Симпсона. Замена переменных позволяет достичь большей точности, поскольку при $V \rightarrow 2$ $R = C_R(2 - V)^{-1/(1+\gamma)} \rightarrow \infty$. Постоянная C_R определяется из значений R , полученных численным интегрированием.

Зная значения z и R , можно вычислить и значения для P при всех V . На ударной волне

$$P_2 = R_2 z_2 / \gamma = 8/(\gamma + 1).$$

Для определения значения P^* на поршне используем асимптотику z и R при $V \rightarrow 2$:

$$P^* = (zR/\gamma)_{V=V^*} = C_z C_R / \gamma.$$

В результате численного решения получаются значения $P^* = 6,55$ и $\lambda_2 = 1,73$.

Зная R , z , P для всех V между ударной волной и поршнем ($1,5 \leq V \leq 2$), можно перейти от безразмерных величин к размерным. Будем находить отношения скорости v , давления p , плотности ρ , температуры T

к их значениям на ударной волне (фиг. 2):

$$\frac{v}{v_2} = \frac{\gamma+1}{4} V \frac{r}{r_2}, \quad \frac{p}{p_2} = \frac{\gamma+1}{8} P \left(\frac{r}{r_2}\right)^2, \quad \frac{\rho}{\rho_2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} R,$$

$$T/T_2 = \frac{(\gamma+1)^2}{2\gamma(m+1)^2(\gamma-1)} z \left(\frac{r}{r_2}\right)^2, \quad \frac{r}{r_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{1,73}{\lambda}$$

(эти относительные величины не зависят от констант C и ρ_1 , которые определяют масштаб).

Отметим, что крайняя правая точка графика $v v_2(r/r_2)$ на фиг. 2 соответствует не скорости ударной волны, а скорости газа за ударной волной, которая меньше скорости ударной волны, так как $v_2 = (r_2/t)V_2$, $D = (m+1)r_2/t$, $V_2 = 1,5 < 2$. Таким образом, частицы газа, находящиеся у поршня, не могут обогнать ударную волну.

Обращение на поршне температуры в нуль, а плотности в бесконечность связано с тем, что начальное давление газа полагалось пренебрежимо малым. Эффекты теплопроводности и вязкости, которыми здесь пренебрегаем, существенны лишь для расчета структуры фронта ударной волны.

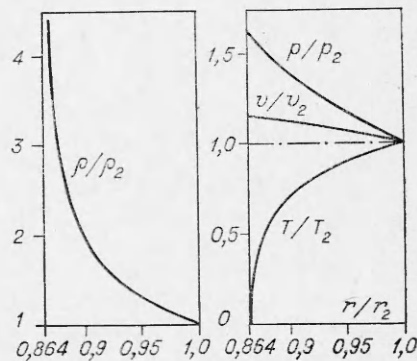
Приближение плоского магнитного поршня успешно применялось для описания ускорения плазмы в коаксиальной пушке [5] с малым зазором между электродами, когда радиальной структурой можно пренебречь. Выталкивание плазмы поршнем описывалось моделью снежного плуга. Как известно (см., например, [6]), для справедливости этой модели достаточно, чтобы скорости всех частиц ускоренного газа были одинаковы. Как видно из фиг. 2, в режиме нарастания тока в пушке скорость частиц от поршня до ударной волны меняется всего лишь в пределах 20%. Сравнение скорости поршня, получающейся из модели снежного плуга и автомодельного решения (7) уравнений гидродинамики, дает соотношение $\sqrt{P^*} : \sqrt{6} = 1,04 : 1$. В модели снежного плуга скорость несколько выше. Это связано с тем, что она является скоростью центра тяжести плазменного сгустка, размер которого увеличивается.

Гидродинамическая модель позволяет определить профиль сгустка вдоль направления движения. В области вблизи поршня, однако, эта модель дает бесконечную плотность и нулевую температуру, что ограничивает область ее применимости. Это ограничение связано с тем, что в начальный момент давление поршня равно нулю и предположение о малости давления газа в это время неприменимо. Лишь при прохождении ударной волной расстояния $\Delta x = p_1/\rho_1 C_1 \lambda_2$ давление ударной волны превзойдет начальное давление p_1 . Используя асимптотическое решение вблизи поршня, можно показать, что относительный размер этой области уменьшается со временем по закону

$$\frac{\Delta r}{r_2} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{p_1}{C} \frac{P^*}{\lambda_2 C_R} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} t^{-2} \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right),$$

а абсолютный размер уменьшается из-за сжатия: $\Delta r \sim t^{-2/\gamma}$.

Таким образом, при конечном давлении p_1 решение для плотности и температуры справедливо для большей части сгустка, за исключением небольшой области вблизи поршня, абсолют-



Фиг. 2

ный и относительный размер которой весьма быстро уменьшается со временем. Вблизи поршня ударная волна не прогревает газ и плотность и температуру в этой области можно оценить из условия адиабатичности движения

$$\frac{\rho^*}{\rho_1} = \left(\frac{p^*}{p_1}\right)^{1/\gamma}, \quad \frac{T^*}{T_1} = \left(\frac{p^*}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

Ширина фронта скачка плотности и давления определяется, как известно, длиной свободного пробега (см., например, [7]). Для типичных условий эксперимента [5] она составляет величину порядка десятых долей миллиметра, пренебрежимо малую по сравнению с размерами зоны ускорения.

Как следует из (4), (7), при $m = 1$ поршень и ударная волна движутся равноускоренно:

$$v^* = g^*t, \quad D = gt,$$

где

$$g^* = (m + 1)\sqrt{C/\rho_1 P^*}; \quad g = (m + 1)g^*/\lambda_2.$$

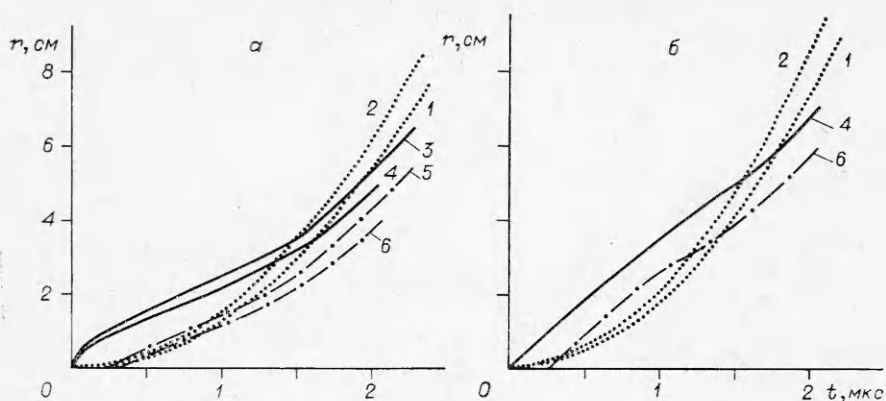
Для условий эксперимента [5] получаем значение константы

$$C = 10^{-2} \frac{(\dot{a}i/\dot{a}i)^2}{\pi(S_2^2 - S_1^2)} \ln \frac{S_2}{S_1},$$

справедливое в начальный момент разряда в области линейного нарастания тока, где dI/dt — скорость нарастания тока, А/с; S_1, S_2 — радиусы центрального и внешнего коаксиалов. Для этого эксперимента, если за S_1 и S_2 принять радиусы токового шнура и цилиндрической части сопла, получаем $C = 5 \cdot 10^{20}$ дин/см²·с² и для давления водорода 760 мм рт. ст. ($\rho_1 = 4,5 \cdot 10^{-5}$ г/см³) $g^* = 2,6 \cdot 10^{12}$ см/с². В этом случае профили скорости, давления, плотности и температуры, приведенные на фиг. 2, справедливы при $t \gg t_1 = 60$ нс во всей области изменения r/r_2 , за исключением участка вблизи поршня ширины $\Delta r/r_2 \approx 3 \cdot 10^{-5}/t^{2,6}$, где t — время, мкс.

Однако поршень представляет собой горячий токонесущий слой газа, разогретый джоулевыми потерями, что приводит, как показывают оценки, к прогреву прилегающего слоя газа из-за электронной теплопроводности и диффузии магнитного поля толщиной $\Delta r/r_2 \approx 2 \cdot 10^{-2}/t^{2,1}$ и $5 \cdot 10^{-2}/t^{2,1}$ соответственно. Это говорит о том, что в начале ускорения при $t < 0,1$ мкс возможно просачивание плазмы сквозь магнитный поршень. Отношения характерных времен теплопроводности и скин-эффекта ко времени ускорения составляют $t_T/t \approx 20t^2$ и $270 t^{3,6}$ соответственно, что также свидетельствует о начале эффективного сгребания плазмы поршнем через 0,1 мкс.

На фиг. 3 приведена зависимость пути от времени для ударной волны 2 и поршня 1, а также экспериментальные кривые перемещения центра тяжести тока 4 и фронта свечения 3 при давлении 760 и 400 мм рт. ст. (а, б соответственно) [5]. Видно, что движение токового слоя и фронта свечения, которые можно связать с магнитным поршнем и ударной волной, качественно согласуется с расчетом, однако в начальный момент поршень неполностью захватывает газ, и по этой причине экспериментальные кривые идут выше расчетных. Оболочка образуется, по-видимому, на расстоянии около 1 см от точки пробоя, что согласуется с вышеупомянутыми оценками времени формирования поршня. Поэтому линиями 5, 6 показаны экспериментальные кривые при смещении точки пробоя относительно точки формирования оболочки вниз на 1 см. При меньших давлениях (30—100 мм рт. ст.) разряд начинается в конической части сопла перемен-



Ф и г. 3

ного сечения, и происходит абляция изолятора, поэтому сопоставление расчета с экспериментом здесь неправомерно, так как константа магнитного давления C зависит в этом случае от времени.

Авторы выражают благодарность В. С. Имшеннику за полезное обсуждение работы.

Поступила 5 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтович М. А., Осовец С. М. О механизме сжатия тока при быстром и мощном газовом разряде.— Атомная энергия, 1956, т. 1, № 3.
2. Крашенинникова Н. Л. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем.— Изв. АН СССР. ОТИ, 1955, № 8.
3. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, без учета противодействия.— ПММ, 1958, т. 22.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Наука, 1967.
5. Комельков В. С., Модзелевский В. И. Коаксальный ускоритель плотной плазмы.— Физика плазмы, 1977, т. 3, вып. 5.
6. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. М., Мир, 1975.
7. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. Сходящаяся цилиндрическая ударная волна в плазме с учетом структуры фронта.— ЖВМ МФ, 1963, т. 3, № 5.

УДК 624.074.4

РАЗВИТИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ФОРМ ВЫПУЧИВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ НАГРУЖЕНИИ

В. М. Корнев, А. В. Маркин, И. В. Яковлев

(Новосибирск)

1. Рассматривается стержень двутаврового сечения. В начальный момент к стержню внезапно приложена интенсивная продольная постоянная нагрузка, при теоретическом анализе не принимаются во внимание продольные колебания. Интенсивная сжимающая нагрузка существенно больше нагрузки Эйлера [1]. Допустим, что этой сжимающей нагрузке соответствуют напряжения, превосходящие предел упругости. Предпола-