УДК 532.529

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ТЯЖЕЛОЙ ПРИМЕСЬЮ

А. Б. Бурмистрова, О. Н. Дементьев

(*Челябинск*)

Изучению влияния примеси небольшого количества твердых частиц на устойчивость плоскопараллельных течений несжимаемого газа посвящены работы [1—4], в которых предполагалось, что частицы однородно распределены по слою газа и его движения не вызывают. Ниже исследуется устойчивость стационарного течения жидкости с твердой примесью в вертикальном плоском слое. Движение жидкости вызывается оседанием неравномерно распределенных в ней тяжелых частиц примеси. Показана зависимость устойчивости течения от характера распределения частиц в слое.

1. Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость, содержащую примесь сферических недеформируемых твердых частиц радиуса r и массы m. Жидкость и примесь, как и в [1—6], предполагаем взаимопроникающими и взаимодействующими друг с другом сплошными средами, взаимодействием между частицами пренебрегаем. Объемная доля частиц предполагается настолько малой, что можно пренебречь эйнштейновской добавкой к вязкости жидкости. Плотность материала частиц ρ_1 много больше плотности несущей среды ρ. Выталкивающая сила, действующая на частицы, пренебрежимо мала, так как пропорциональна отношению $\rho/\rho_1 \ll 1$. Взаимодействие между фазами при их относительном движении подчиняется закону Стокса.

Уравнения, описывающие поведение несжимаемой жидкости с примесью тяжелых твердых частиц, имеют вид [7, 8]

$$(1.1)\qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{u} - \frac{a}{\tau_v}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}) + \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + (\mathbf{u}_p\nabla)\,\mathbf{u}_p = \frac{1}{\tau_v}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}) + \mathbf{g},\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,$$

$$\partial\rho_p/\partial t + \operatorname{div}\rho_p\mathbf{u}_p = 0,\ \rho_p = mN,\ \tau_v = m/(6\pi r\rho\nu),\ a = \rho_p/\rho,$$

где $\mathbf{u}$ — скорость жидкости; p — ее давление; ν — кинематическая вязкость; величины с индексом p относятся к облаку частиц; N — число частиц в единице объема; τ_v — время, в течение которого скорость частиц относительно жидкости уменьшается в e раз по сравнению с ее исходным значением; $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения.

Пусть жидкость с примесью расположена в плоском слое, образованном двумя бесконечными вертикальными параллельными плоскостями $x = \pm h$. Частицы распределены поперек слоя симметрично относительно вертикальной оси z (рис. 1) по закону

$$(1.2)\qquad N(\alpha, x) = \frac{4\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\dfrac{\alpha x}{h} - \operatorname{ch}\dfrac{2\alpha x}{h} - \operatorname{ch}2\alpha - 2}{4\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}2\alpha - 3},$$

где α — коэффициент, определяющий концентрацию примеси вблизи границ слоя (на рис. 1 $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_3 = 20$). Формула (1.2) хорошо описывает распределение оседающих частиц в вертикальном канале, наблюдаемое экспериментально [8].

Оседающие неравномерно распределенные поперек слоя частицы, взаимодействуя с жидкостью, приводят ее в движение. Стационарное распределение скоростей жидкости и частиц найдем из системы уравнений (1.1) в предположении, что траектории как жидких, так и твердых частиц — прямые, параллельные оси z, а слой на бесконечности замкнут сверху и снизу:

$$(1.3)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dz} = \nu\frac{d^2u_0}{dx^2} - \frac{a}{\tau_v}(u_{p0} - u_0) - g,\ \frac{1}{\tau_v}(u_{p0} - u_0) = g.$$

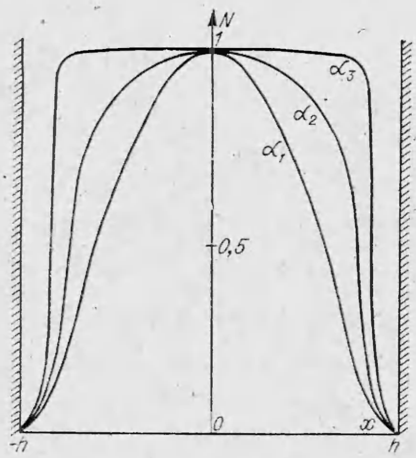

Рис. 1.

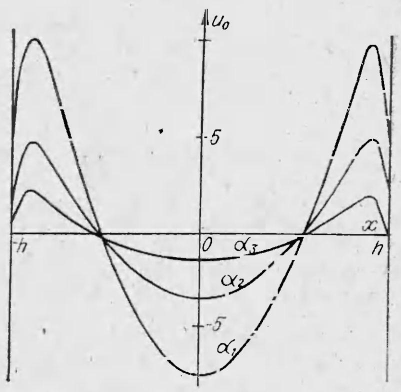

Рис. 2.

Здесь u_0, u_{p0} — вертикальные компоненты скоростей; индекс 0 отмечает стационарное решение системы (1.1).

Граничные условия и условие замкнутости течения

$$u_0(\pm h) = 0, \quad \int_{-h}^{h} u_0 dx = 0. \tag{1.4}$$

Решая задачу (1.3), (1.4), получим стационарное распределение скоростей жидкости и облака частиц по сечению слоя

$$u_0 = \frac{gh^2}{\nu} B_1 \left[\frac{1}{\alpha^2} \left(4 \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha x}{h} - \frac{1}{4} \operatorname{ch} \frac{2\alpha x}{h} \right) + B_2 \frac{x^2}{h^2} - B_3 \right], \tag{1.5}$$

$$u_{p0} = u_0 - g\tau_v, \quad \nabla p_0 = \text{const},$$

$$B_1 = \frac{m}{\rho(4 \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} 2\alpha - 3)}, \quad B_2 = \frac{3}{4\alpha^2} \left(\frac{15}{4\alpha} \operatorname{sh} 2\alpha - \frac{7}{2} \operatorname{ch} 2\alpha - 4 \right),$$

$$B_3 = \frac{45}{16\alpha^3} \operatorname{sh} 2\alpha - \frac{7}{8\alpha^2} \operatorname{ch} 2\alpha - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Как видно из (1.5), в слое под воздействием оседающих частиц устанавливается движение жидкости с двумя восходящими и одним нисходящим потоками, симметричное относительно оси z (рис. 2, где $\alpha_1 = 21$, $\alpha_2 = 31$, $\alpha_3 = 50$). Интенсивность движения уменьшается с ростом α (при $\alpha \to \infty$ $u_0 \to 0$).

2. Исследуем устойчивость стационарного течения жидкости (1.5), вызванного оседанием неравномерно распределенных частиц примеси. Для этого на стационарные поля скоростей $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_{p0}$, давления p_0 и числа частиц в единице объема N_0 наложим малые возмущения $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_p$, p, N.

Запишем уравнения для возмущений в безразмерном виде, используя следующие единицы измерения: для расстояния — h, времени — h^2/ν, скорости — ν/h, давления — $\rho\nu^2/h^2$. Произведя линеаризацию по возмущениям, из (1.1) получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}_0\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}_0 = -\nabla p + \Delta\mathbf{u} - \frac{a_0}{\tau_v}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}) + \mathrm{Ga}\, a\boldsymbol{\gamma}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + (\mathbf{u}_{p0}\nabla)\mathbf{u}_p + (\mathbf{u}_p\nabla)\mathbf{u}_{p0} = \frac{1}{\tau_v}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}),$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}[N_0\mathbf{u}_p + N\mathbf{u}_{p0}] = 0;$$

$$u_0 = \mathrm{Ga} B_1 \left[\frac{1}{\alpha^2} \left(4 \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \alpha x - \frac{1}{4} \operatorname{ch} 2\alpha x \right) + B_2 x^2 - B_3 \right], \tag{2.2}$$

$$u_{p0} = u_0 - u_s,\ \mathbf{u}_s = -\mathrm{Ga}\,\tau_v\boldsymbol{\gamma},$$

$$\tau_v = \frac{2}{9} r^2 \frac{\rho_1}{\rho},\ a = \frac{mN}{\rho},\ a_0 = \frac{mN_0}{\rho},$$

$$\mathrm{Ga} = \frac{gh^3}{\nu^2},\ N_0 = \frac{4\,\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\alpha x - \mathrm{ch}\,2\alpha x - \mathrm{ch}\,2\alpha - 2}{4\,\mathrm{ch}\,\alpha - \mathrm{ch}\,2\alpha - 3},$$

где $\mathbf{u}_s$ — скорость оседания частиц; Ga — число Галилея; τ_v — безразмерное время релаксации; $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Для жидкости с примесью [6], как и в чистой жидкости [9, 10], показано, что задача об устойчивости относительно пространственных возмущений сводится к задаче для плоских возмущений. В рассматриваемом случае плоские возмущения более опасны, т. е. им соответствуют меньшие числа Галилея, и при исследовании устойчивости достаточно ограничиться изучением плоских нормальных возмущений:

$$\mathbf{u}_p(x, z, t) = \mathbf{v}_p(x) \exp [ik(z - ct)],$$
$$N(x, z, t) = n(x) \exp [ik(z - ct)],$$
$$\psi(x, z, t) = \varphi(x) \exp [ik(z - ct)],$$
$$u_x = -\partial\psi/\partial z,\ u_z = \partial\psi/\partial x. \tag{2.3}$$

Здесь ψ — функция тока; φ, $\mathbf{v}_p$, n — амплитуды возмущений; k — вещественное волновое число; $c = c_r + ic_i$ — комплексная фазовая скорость возмущений (c_r — фазовая скорость, c_i — декремент).

Подставив (2.3) в (2.1), получим амплитудное уравнение (штрихом обозначено дифференцирование по координате x)

$$\left(\varphi^{\mathrm{IV}} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi\right) + ik(\varphi'' - k^2\varphi)\left(c - u_0 + \frac{a_0}{ik\tau_v}\right) + iku_0''\varphi = \tag{2.4}$$

$$= \frac{a_0}{\tau_v}\left(v_{pz}' - ikv_{px}\right) + \frac{a_0'}{\tau_v}(v_{pz} - \varphi') + \mathrm{Ga}\,n',$$

$$v_{px} = \frac{ik\varphi}{ik\tau_v(u_{p0} - c) - 1},\ v_{pz} = \frac{-\varphi' + u_{p0}'\tau_v v_{px}}{ik\tau_v(u_{p0} - c) - 1},$$

$$n = -\frac{ikv_{pz}N_0 + N_0'v_{px} + N_0 v_{px}}{ik(u_{p0} - c)}.$$

Граничные условия

$$\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0. \tag{2.5}$$

Граница устойчивости течения жидкости с примесью (2.2) определяется из условия $c_i = 0$. Комплексная фазовая скорость c зависит от параметров задачи: Ga, k, α, τ_v. Для решения краевой задачи (2.4), (2.5), т. е. для определения границ устойчивости рассматриваемого течения и расчета спектра декрементов, использовался метод пошагового интегрирования Рунге — Кутта.

3. Расчеты, проведенные для широкого интервала значений параметра α ($1 \leqslant \alpha \leqslant 50$), показывают, что неустойчивость стационарного движения жидкости с примесью тяжелых частиц обусловлена взаимодействием встречных потоков: нисходящего центрального и двух восходящих около стенок. Неустойчивость движения вызывается нижними модами гидродинамических возмущений, декременты нормальных возмущений оказываются комплексными (бегущие возмущения). На рис. 3 показаны зависимости декремента c_i и фазовой скорости возмущений от числа Галилея ($\alpha = 50$, $k = 1$, $\tau_v = 0{,}92 \cdot 10^{-2}$).

Оседающие частицы порождают колебательные (бегущие) возмущения и способствуют их переносу. При уменьшении параметра α понижается

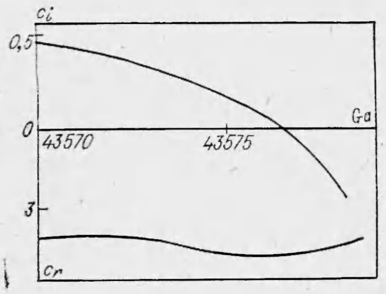

Рис. 3.

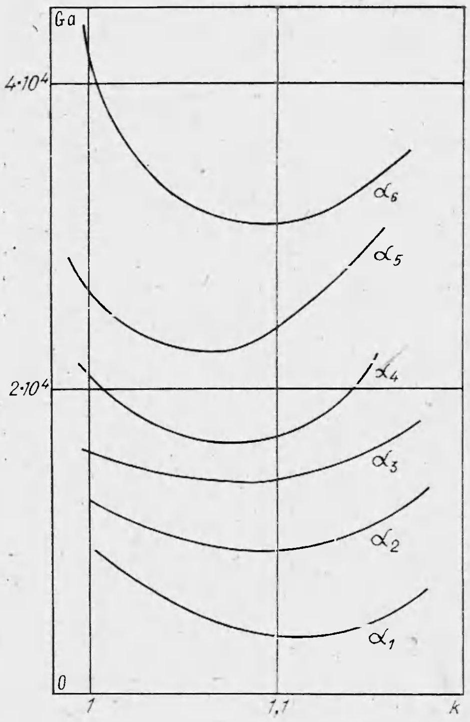

Рис. 4.

устойчивость течения, вызванного оседанием частиц. Действительно, при малых α (см. рис. 1) распределение частиц в слое имеет резко выраженный «языковый» характер, интенсивность течения велика (см. рис. 2); уменьшение α приводит к повышению скорости течения и нарушению его устойчивости. Этот вывод подтверждается рис. 4, где показаны кривые нейтральной устойчивости ($c_i = 0$, $\tau_v = 0{,}92\cdot10^{-2}$, $\alpha_1 = 21$, $\alpha_2 = 31$, $\alpha_3 = 37$, $\alpha_4 = 40$, $\alpha_5 = 45$, $\alpha_6 = 50$). Характер распределения тяжелых твердых частиц поперек слоя существенно влияет на устойчивость вызываемого примесью течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гупало Ю. П.** Об устойчивости ламинарного движения жидкости с тяжелой примесью.— Изв. АН СССР. ОТН, механика и машиностроение, 1960, № 6.
2. **Saffman P. G.** On the stability of laminar flow of a dusty gas.— J. Fluid Mech., 1962, v. 13, pt 1.
3. **Michael D. H.** The stability of plane Poiseuille flow of a dusty gas.— J. Fluid Mech., 1964, v. 18, pt 1.
4. **Желтухин И. Д.** Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемом газе, несущем твердую примесь.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 2.
5. **Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А.** Конвективная неустойчивость однородного взвешенного слоя.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4.
6. **Дементьев О. Н.** Конвективная устойчивость среды, содержащей тяжелую твердую примесь.— ПМТФ, 1976, № 3.
7. **Марбл Ф. Е.** Динамика запыленных газов.— Сб. пер. Механика, 1970, № 6.
8. **Соу С.** Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971.
9. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
10. **Бетчов Р., Криминале В.** Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.

Поступила 10/I 1985 г.