

$$\frac{\partial p_{2n,0}}{\partial \tau}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial p_{2n+1,0}}{\partial \tau}(t, 0) = -\frac{\partial w_{n,0}}{\partial \theta}(t, 0).$$

Так как уравнения (2.3) являются эллиптическими, а краевая задача (2.5) — корректной, решения $p_{n,0}(t, \tau)$, $n = 0, 1, \dots$ существуют, и по [4] для них конечен интеграл

$$\int_K \left\{ \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^{2-p} (t^2 + \tau^2)^{2-p-q} \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial t^p \partial \tau^q} p_{n,0}(t, \tau) \right|^2 \right\} dt d\tau,$$

где K — квадрант, $K = \{(t, \tau); t > 0, \tau > 0\}$. При $t \rightarrow +\infty$ $p_{n,0}(t, \tau)$ убывают экспоненциально. Умножив третий член в (2.4) на срезающую функцию, заметно отличную от нуля только вблизи вершины угла $(0, 0)$, получим асимптотическое разложение задачи A_ε вблизи вершины угла.

Таким образом, полное асимптотическое разложение задачи A_ε состоит из семи рядов; ряда (1.5), описывающего основное напряженное состояние, двух рядов, описывающих погранслои вдоль характеристической части границы, и четырех, определяющих угловые погранслои.

Отметим, что при достаточно большой гладкости граничных данных асимптотическое разложение задачи A_ε допускает дифференцирование и позволяет построить асимптотические разложения для усилий, моментов и перерезывающих сил. Обозначим через ε_θ окружную деформацию. Если $\varepsilon_\theta(w_n) \neq 0$, $n = 0, 1$, то асимптотические разложения момента M_θ и перерезывающих сил N_r, N_θ начинаются со степени ε^{-2} .

При $\varepsilon_\theta(w_n) = 0$, $n = 0, 1$ пластина нерастяжима в окружном направлении.

В заключение отметим, что совершенно аналогично (при формальном усложнении выкладок) можно построить асимптотику задачи изгиба симметрично собранной анизотропной прямоугольной слоистой оболочки [5] при строго отличной от нуля кривизне семейства армирующих волокон.

Поступила 10 V 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. П., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений. — УМН, 1957, т. 12, № 5.
2. Назаров С. А. Сверхстепенной пограничный слой в задаче об изгибе напряженной пластины. — Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр., 1980, № 1.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: ОГИЗ, 1947.
4. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. 16, с. 249.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1964.

УДК 531.36 : 538.31

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТНОЙ ПОДВЕСКИ В ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ

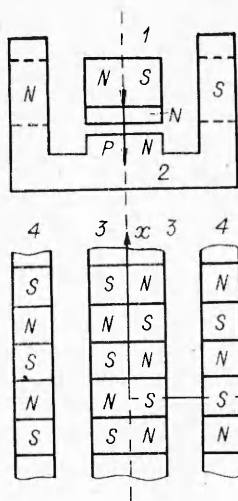
Н. И. КОЖУХОВСКИЙ, В. И. МЕРКУЛОВ

(Киев, Новосибирск)

Вопрос о подвеске тела с помощью постоянных магнитов в течение длительного времени привлекает к себе внимание исследователей. Подробную библиографию работ в этом направлении, анализ состояния проблемы, а также оригинальные результаты можно найти в [1, 2].

Основным результатом в этой проблеме является теорема Ирншоу, которая доказывает неустойчивость таких подвесок. Однако эта теорема относится к стационарным состояниям и, как мы покажем, несправедлива применительно к динамическим системам.

1. Рассмотрим схему расположения магнитов, изображенную на фиг. 1. Будем рассматривать движение бесконечно длинного стержня в магнитном канале вдоль оси Ox . Вес стержня $P = mg$ уравновешивается магнитами одного знака 1 и 2. По сторонам канала создана система постоянных магнитов чередующейся полярности, с которой взаимодействует такая же система на стержне. Будем полагать, что шаг полюсов вдоль оси Ox равен $\lambda = 2\pi/k$, k — волновое число. Материал магнитов будем считать насыщенным и полагать в нем $\mu = 1$ (μ — относительная магнитная проницаемость), как и в вакууме. Считая также, что магнитная система 3 имеет вертикальную протяженность, будем пренебрегать изменением сил взаимодействия магнитов 3 и 4 при вертикальных колебаниях стержня.



Ф и г. 1

Сделаем предварительные вычисления. Пусть имеется в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ некоторый магнитный заряд q . Его потенциал в точке $M(x, y, z)$ равен $U = q/4\pi\mu_0 r$, $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$, μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость вакуума. Сила же взаимодействия двух зарядов q^+ , q^- , расположенных в этих точках, определяется выражением

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q^+ q^-}{r^2}$$

и направлена по вектору, соединяющему заряды.

Рассмотрим бесконечную магнитную полосу, расположенную вдоль оси Oz . Для элемента полосы dz магнитный заряд равен $dq = \gamma^+ dz$, где γ^+ — линейная плотность заряда. Сила взаимодействия с аналогичным элементарным зарядом, вырезанным из другой магнитной полосы:

$$d^2F = \gamma^+ \gamma^- dz dz_0 / (4\pi\mu_0 r^2).$$

Определим теперь силу притяжения заряда, расположенного в плоскости $y = \delta$, к полосе, край которой лежит в плоскости $y = -\delta$ и имеет координату x . Спроектировав силу d^2F на кратчайшую линию, соединяющую точку $M_0(x_0, y_0 = \delta, z_0)$ с полосой $x' = x, y' = -\delta, z' = z$, имеем

$$d^2R = d^2F \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + 4\delta^2}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + 4\delta^2 + (z - z_0)^2}} = \frac{\gamma^+ \gamma^-}{4\pi\mu_0} \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + 4\delta^2}}{\{(x - x_0)^2 + 4\delta^2 + (z - z_0)^2\}^{3/2}}.$$

Сила притяжения элементарного заряда бесконечной полосой определяется интегралом

$$(1.1) \quad dR = \frac{\gamma^+ \gamma^- dz}{4\pi\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{(x - x_0)^2 + 4\delta^2\} dz}{\{(x - x_0)^2 + 4\delta^2 + (z - z_0)^2\}^{3/2}}.$$

Интегрируя (1.1), сделав замену переменной $z - z_0 = u\sqrt{(x - x_0)^2 + 4\delta^2}$, получим [3]

$$dR = \gamma^+ \gamma^- dz_0 / [2\pi\mu_0 \sqrt{(x - x_0)^2 + 4\delta^2}].$$

Полоса же единичной длины вдоль оси Oz будет испытывать силу притяжения

$$(1.2) \quad R = \frac{\gamma^+ \gamma^-}{2\pi\mu_0} \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + 4\delta^2}}.$$

В том случае, если заряд распределен вдоль оси Ox , т. е. $dq = q^- dx (q^- = d\gamma^-/dx$ — плотность магнитного заряда), формулу (1.2) представим в виде

$$d^2R = q^+ q^- dx dx_0 / [2\pi\mu_0 \sqrt{(x - x_0)^2 + 4\delta^2}].$$

Проекция этой силы на оси Ox и Oy равны

$$(1.3) \quad d^2X = \frac{(x - x_0) q^+ q^- dx dx_0}{2\pi\mu_0 \{(x - x_0)^2 + 4\delta^2\}},$$

$$d^2Y = \frac{2\delta q^+ q^- dx dx_0}{2\pi\mu_0 \{(x - x_0)^2 + 4\delta^2\}}.$$

Проинтегрируем выражения (1.3) прежде всего по переменной x . При этом определим силы, действующие на элементарный магнитный заряд со стороны всех зарядов плоскости $y = -\delta$:

$$(1.4) \quad dX = \frac{q^+(x_0) dx_0}{2\pi\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - x_0)^2 q^-(x) dx}{(x - x_0)^2 + 4\delta^2},$$

$$dY = \frac{q^+(x_0) dx_0}{2\pi\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\delta q^-(x) dx}{(x - x_0)^2 + 4\delta^2}.$$

Сделаем в (1.4) замену $x - x_0 = u$ и приняв плотности магнитных зарядов в виде

$$q^+(x_0) = q_0 \sin k(x_0 + \xi), \quad q^-(x) = q_0 \sin kx,$$

получим, используя свойство симметрии, что

$$dX = \frac{q_0^2}{\pi\mu_0} \sin k(x_0 + \xi) \cos kx_0 dx_0 \int_0^\infty \frac{u \sin ku du}{u^2 + 4\delta^2},$$

$$dY = \frac{q_0^2}{\pi\mu_0} \sin k(x_0 + \xi) \sin kx_0 dx_0 \int_0^\infty \frac{2\delta \cos ku du}{u^2 + 4\delta^2}.$$

Так как по [3]

$$\int_0^\infty \frac{2\delta \cos ku du}{u^2 + 4\delta^2} = \int_0^\infty \frac{u \sin ku du}{u^2 + 4\delta^2} = \frac{\pi}{2} e^{-2\delta k},$$

$$\text{то } dX = \frac{q_0^2 e^{-2\delta k}}{2\mu_0} \sin k(x_0 + \xi) \cos kx_0 dx_0, \quad dY = \frac{q_0^2 e^{-2\delta k}}{2\mu_0} \sin k(x_0 + \xi) \sin kx_0 dx_0.$$

Отсюда определим силу притяжения единичной поверхности:

$$X = \frac{q_0^2 e^{-2\delta k}}{2\mu_0} \lim_{\pi n} \frac{k}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi n}{k}} \sin k(x_0 + \xi) \cos kx_0 dx_0 = \frac{q_0^2 e^{-2\delta k}}{2\mu_0} \sin k\xi \lim_{\pi n} \frac{k}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi n}{k}} \cos^2 kx_0 dx_0,$$

т. е.

$$(1.5) \quad X = \frac{q_0^2 e^{-2\delta k}}{2\mu_0} \sin k\xi, \quad Y = \frac{q_0^2 e^{-2\delta k}}{2\mu_0} \cos k\xi.$$

Теперь учтем силы притяжения (или отталкивания) поверхности $y = \delta$ к поверхности $y = -\delta - l$, образованной другими концами магнитов. Эту силу можно вычислить по формуле (1.5), заменяя величину 2δ на $2\delta + l$ и учитывая знак силы. Тогда общая сила определяется выражением

$$X = \frac{q_0^2 e^{-2\delta k}}{2\mu_0} (1 - e^{-lk})^2 \sin k\xi, \quad Y = \frac{q_0^2 e^{-2\delta k}}{2\mu_0} (1 - e^{-lk})^2 \cos k\xi.$$

Учитывая, что сила взаимодействия единичного магнитного заряда dq в магнитном поле напряженности H определяется произведением $dX = dqH$, из формул (1.5) находим значение напряженности поля на самой поверхности в точке, соответствующей максимуму:

$$H_x = q_0/\mu_0, \quad H_y = q_0/\mu_0.$$

Используя индукцию поля $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, запишем выражения сил в виде

$$(1.6) \quad X = \frac{B^2}{2\mu_0} e^{-2\delta k} (1 - e^{-lk})^2 \sin k\xi, \quad Y = \frac{B^2}{2\mu_0} e^{-2\delta k} (1 - e^{-lk})^2 \cos k\xi.$$

2. Имея силовые характеристики магнитного поля системы (1.6), получим динамические уравнения. Сместим стержень на величину y вправо. Тогда правый зазор будет равен $\delta - y$, а левый $\delta + y$. Сила притяжения (отталкивания) в этом случае для правого зазора будет равна

$$Y^+ = -\frac{B^2}{2\mu_0} e^{-2\delta k - yk} (1 - e^{-lk})^2 \cos kx.$$

Для левого зазора

$$Y^- = \frac{B^2}{2\mu_0} e^{-2\delta k + yk} (1 - e^{-lk})^2 \cos kx.$$

Тогда общая сила определяется выражением

$$\mathcal{Y} = Y^+ + Y^- = \frac{B^2}{\mu_0} e^{-2\delta k} (1 - e^{-lk})^2 \cos kx \operatorname{sh} ky.$$

Аналогично определим силу \mathcal{X} выражением

$$(2.1) \quad \mathcal{X} = X^+ + X^- = \frac{B^2}{\mu_0} e^{-2\delta k} (1 - e^{-lk})^2 \sin kx \operatorname{ch} ky.$$

Кроме силы \mathcal{G} , будет действовать дестабилизирующая сила \mathcal{G}^* , вызванная нижней магнитной системой — опорным подшипником. В случае, если опорный подшипник представляет собой несколько параллельных магнитных полос, для силы \mathcal{G}^* аналогично (2.1) имеем

$$\mathcal{G}^* = \frac{B_1^2}{\mu_0} e^{-2\delta k_1} \sin k_1 y.$$

Здесь k_1 — волновое число нижней магнитной системы. Опорная сила этого подшипника равна

$$P = \frac{B_1^2}{\mu_0} e^{-2\delta k_1} \cos k_1 y.$$

При $y = 0$ имеем $P = mg$. Отсюда находим $mg = [\exp(-2\delta k_1)] B_1^2 / \mu_0$, тогда $\mathcal{G}^* = mg \sin k_1 y$. С учетом всех сил можем составить уравнения движения стержня:

$$(2.2) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{B^2}{\mu_0} e^{-2\delta k} (1 - e^{-lk})^2 \sin kx \operatorname{ch} ky,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{B^2}{\mu_0} e^{-2\delta k} (1 - e^{-lk})^2 \cos kx \operatorname{sh} ky + mg \sin k_1 y.$$

Вводя обозначения

$$\frac{B^2}{\mu_0 m} e^{-2\delta k} (1 - e^{-lk})^2 = A, \quad k_1 = l,$$

приведем уравнения (2.2) к виду

$$(2.3) \quad d^2 x / dt^2 = A \sin kx \operatorname{ch} ky, \quad d^2 y / dt^2 = -A \cos kx \operatorname{sh} ky + g \sin ly.$$

Можно показать, что уравнения (2.3) есть уравнения движения

$$d^2 x_1 / dt^2 = -\partial \Pi(x) / \partial x_1, \quad d^2 x_2 / dt^2 = -\partial \Pi(x) / \partial x_2$$

в силовом поле с потенциалом $\Pi(x) = a \operatorname{ch} kx_2 \cos kx_1 + b \cos lx_2$ ($x_1 = x$, $x_2 = y$) и позволяют определить интеграл энергии — гамильтониан

$$(2.4) \quad H = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + a \operatorname{ch} kx_2 \cos kx_1 + b \cos lx_2,$$

где y_1, y_2 — канонические импульсы, соответствующие координатам x_1, x_2 .

Определим особые точки системы (2.3) (положения равновесия) и установим условия их устойчивости на основе изучения топологической структуры энергетической поверхности, определяемой гамильтонианом (2.4) в их окрестности согласно подходу, намеченному в [4, 5]. Рассмотрим уравнения

$$(2.5) \quad ak \operatorname{ch} kx_2 \sin kx_1 = 0, \quad -ak \operatorname{sh} kx_2 \cos kx_1 + bl \sin lx_2 = 0.$$

Из первого уравнения получим решения $x_1 = \pi i / k$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), с учетом которых второе уравнение (2.5) примет вид

$$(2.6) \quad -(-1)^i ak \operatorname{sh} kx_2 + bl \sin lx_2 = 0.$$

Исследуем решения уравнения (2.6) графически. Так, для $x_1 = \pi i_e / k$ ($i_e = 0, \pm 2, \dots$) представим уравнение (2.6) в виде $bl \sin lx_2 = ak \operatorname{sh} kx_2$. Изображая функции $f_1 = bl \sin lx_2$, $f_2 = ak \operatorname{sh} kx_2$, в точках их пересечения получим решения уравнения (2.6). По фиг. 2 видно, что дополнительные к решению $x_2 = 0$ положения равновесия будут существовать только при выполнении неравенства

$$(bl \sin lx_2)' |_{x_2=0} > (ak \operatorname{sh} kx_2)' |_{x_2=0}.$$

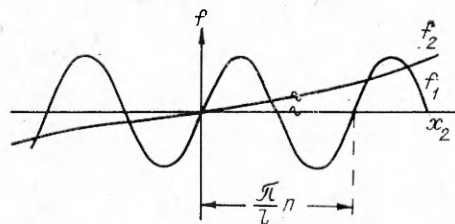
Общее число N решений уравнения (2.6) можно определить следующим образом. Пусть n — наибольшее число волн, при котором выполняется неравенство

$$bl > ak \operatorname{sh} k(\pi n / l + \pi / 4l),$$

отсюда

$$(2.7) \quad n = [-1/4 + (l/\pi k) \operatorname{arcsch} \sigma], \quad \sigma = bl/ak.$$

Тогда $N = (2n + 2)2 - 1 = 4n + 3$. Для $x_1 = \pi i_0 / k$ ($i_0 = \pm 1, \pm 3, \dots$) число N_1



Фиг. 2

решений уравнения (2.6) — положений равновесия — такое же или на два меньше, т. е. $N_1 = N$ или $N_1 = N - 2$. Таким образом, можем образовать следующие дискретные множества — последовательности положений равновесия:

$$\begin{aligned} G_{0e} &= \{x, y, y_1 = y_2 = 0; x_1 = \pi i_e/k, x_2 = 0; i_e = 0, \pm 2, \dots\}, \\ G_{00} &= \{x, y; y_1 = y_2 = 0; x_1 = \pi i_0/k, x_2 = 0; i_0 = \pm 1, \pm 3, \dots\}, \\ G_{ji} &= \{x, y; y_1 = y_2 = 0; x_1 = \pi i/k; x_2 = x_{2j}(\gamma, \sigma); i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; j = \pm 1, \\ &\quad \pm 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Отметим важное значение параметров γ и σ для существования последовательностей положений равновесия системы (2.3).

Топологическую структуру энергетической поверхности $H = H(x, y)$, ее тип будем определять на основе рассмотрения гауссовой кривизны, определяемой по формуле

$$G(x, y) = (1 + |\text{grad } H|^2)^{-3/2} \det \text{Hess } (H; x, y),$$

где

$$(2.8) \quad \text{Hess } (H; s) = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial s} \right),$$

(s — вектор переменных системы, $s = (x_1, x_2, y_1, y_2)$). Свяжем использование и исследование гауссовой кривизны с использованием матрицы (2.8).

В дальнейшем изложении будем использовать следующее

О п р е д е л е н и е. Поверхность $H(x, y)$ топологически эквивалентна поверхности $H^*(x, y)$ в некоторой связной области $\Gamma(x, y)$, если выполняется соотношение

$$(2.9) \quad Q^T(x, y) \text{Hess } (H; x, y) Q(x, y) = \text{Hess } (H^*; x, y),$$

где $Q(x, y)$ — некоторая квадратная матрица.

В том случае, если область является окрестностью положения равновесия, каждое из которых в данном случае есть невырожденная критическая точка поверхности

$H(x, y)$, а поверхность $H^*(x, y)$ каноническая, т. е. $H^*(x, y) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i x_i^2 + \beta_i y_i^2)$, где α_i, β_i принимают значения ± 1 , данное определение опирается на лемму Морса [6].

Поскольку матрица $\text{Hess } (H; x, y)$ симметрическая, то преобразование (матрица $Q(x, y)$) здесь всегда существует. В случае же, если $H^*(x, y)$ такова, что матрица $\text{Hess } (H^*; x, y)$ диагональная, а область $\Gamma(x, y)$ не является локальной, вопрос определения преобразования $Q(x, y)$ остается открытым.

Известно [4], что при выполнении условия $\Delta_r(x, y) > 0 \forall i = 1, \overline{2n}$, где $\{\Delta_r\}$ — последовательность определителей главных миноров матрицы (2.8), $G(x, y)$ положительно определена. Тогда возможно выделение последовательности (с учетом существования для системы (2.3) последовательностей положений равновесия) замкнутых компактных инвариантных областей

$$\Omega_{i\alpha}^+ (x, y) = \Omega_{i\alpha}^+ \cup \partial \Omega_{i\alpha}^+, \quad \partial \Omega_{i\alpha}^+ \text{ — граница области,}$$

$$\Omega_{i\alpha}^+ = \Omega_i^+ \cap \left\{ H(x, y) < \alpha = H_{\inf}^{\partial \Omega_i^+} = \inf_{\partial \Omega_i^+} H \right\},$$

$$\Omega_i^+ = \left\{ \bigcap_{r=1}^{2n} \Omega_{ir}^+ \right\}, \quad \Omega_{ir}^+ = \{\Delta_{ir} > 0\}, \quad i \text{ — номер области,}$$

содержащих как устойчивое положение равновесия, так и периодические (квазипериодические) траектории системы. В каждой такой области гамильтониан (2.4) топологически эквивалентен гамильтониану

$$H^* = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

Рассмотрим теперь случаи знакоопределенности и отрицательной знакоопределенности $G(x, y)$ (и соответственно матрицы (2.8)).

Для данного гамильтониана (2.4) матрица (2.8) имеет простой вид

$$(2.10) \quad \text{Hess } (H; x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 \Pi(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) & (0) \\ (0) & (1) \end{pmatrix},$$

где элементы ее — 2×2 матрицы. Согласно виду матрицы (2.10) достаточно ограничиться изучением ее подматрицы

$$(2.11) \quad \left(\frac{\partial^2 \Pi(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} -ak^2 \cos kx_1 \text{ ch } kx_2 & -ak^2 \sin kx_1 \text{ sh } kx_2 \\ -ak^2 \sin kx_1 \text{ sh } kx_2 & ak^2 \cos kx_1 \text{ ch } kx_2 - bl^2 \cos lx_2 \end{pmatrix},$$

что соответствует изучению топологии поверхности $\Pi = \Pi(x)$. Определим по (2.11)

$$\begin{aligned}\Delta_1(x) &= -ak^2 \cos kx_1 \operatorname{ch} kx_2, \\ \Delta_2(x) &= a^2k^4(-\operatorname{ch}^2 kx_2 + \sin^2 kx_1 + \gamma \cos kx_1 \cos lx_2 \operatorname{ch} kx_2),\end{aligned}$$

причем

$$(2.12) \quad \frac{\Delta_2(x)}{\left(1 + \left(\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x_2}\right)^2\right)^{3/2}} = G(x),$$

где $G(x)$ — гауссова кривизна поверхности $\Pi = \Pi(x)$.

Для точек множеств G_{0e} и G_{00} имеем

$$\begin{aligned}\Delta_1(M_{0e}) &= -ak^2, & \Delta_2(M_{0e}) &= a^2k^4(-1 + \gamma); \\ \Delta_2(M_{00}) &= ak^2, & \Delta_2(M_{00}) &= a^2k^4(-1 - \gamma).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $\gamma < 1$ все положения равновесия множеств G_{0e}, G_{00} , рассматриваемые в подпространстве X , являются гиперболическими, а строение поверхности, определяемой функцией потенциальной энергии в окрестности каждого из них, эквивалентно седловому. Поэтому гамильтониан (2.4) в окрестности положения равновесия последовательностей G_{0e} и G_{00} топологически эквивалентен гамильтониану

$$(2.13) \quad H^* = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 \pm x_2^2),$$

где верхние знаки относятся к точкам множества G_{0e} , нижние — G_{00} . При $\gamma > 1$ в положениях равновесия G_{0e} матрица (2.11) отрицательно определена. Отсюда следует, что в них функция $\Pi(x)$ имеет максимум, а поэтому гамильтониан (2.4) в окрестности каждого из них топологически эквивалентен гамильтониану

$$(2.14) \quad H^* = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Для остальных (при $\gamma > 1$) положений равновесия получим

$$\Delta_1(M_{ji}) = -(-1)^i ak^2 \operatorname{ch} kx_2, \quad \Delta_2(M_{ji}) = a^2k^4 \operatorname{ch} kx_2(-\operatorname{ch} kx_2 + (-1)^i \gamma \cos lx_2).$$

Отсюда при $i = i_0$ следует, что $\Delta_1(M_{ji_0}) > 0$, $\Delta_2(M_{ji_0}) = a^2k^4 \operatorname{ch} kx_2(-\operatorname{ch} kx_2 - \gamma \cos lx_2)$, и для достаточно больших γ при $j = j_0$ возможно выполнение неравенства $\Delta_2(M_{j_0 i_0}) > 0$. Поэтому, кроме точек максимума и седловых точек, в окрестностях которых справедливы представления (2.14), (2.13), при $i = i_0, j = j_0$ существуют точки минимума функции $\Pi(x)$, допускающие представление гамильтониана (2.4) в их окрестности в виде (2.9) и являющиеся поэтому устойчивыми положениями равновесия системы (2.3).

Таким образом, модель допускает существование магнитных ловушек подобно тому, как модельная, ограниченная задача трех тел из небесной механики допускает существование гравитационных ловушек, соответствующих точкам либрации L_4 и L_5 [7]. Здесь же существование устойчивых положений равновесия противоречит теореме Ирншоу [1] о невозможности устойчивой магнитной конфигурации, составленной из постоянных магнитов, и может быть объяснено, по крайней мере, отсутствием учета смещения по координате z , т. е. ограниченной постановкой задачи.

Нашей целью теперь является установление условий существования траекторий, соответствующих продольному движению (вдоль оси Ox_1) при ограниченном изменении координат y_1, x_2, y_2 , и исследование устойчивости такой траектории по отношению к малым начальным возмущениям. Поиск таких условий свяжем с установлением возможности представления гамильтониана (2.4) в некоторой трубке $T(x, y) = \{x, y: |x_1| < \infty, |x_2| < \Delta_0, \Delta_1 < H(x, y) < \Delta_2, \Delta_3 < C = \text{const}\}$ в эквивалентном виде $H^*(x, y)$, траектории которого обладали бы нужными свойствами, и затем с установлением временных пределов или других условий сохранения их свойств.

Рассмотрение траекторий гамильтониана (2.4) при $\gamma < 1$ на основе эквивалентного ему $H^*(x, y)$ вида (2.13) в трубке T показывает невозможность существования у системы (2.3) траекторий, соответствующих предельному движению. Остановимся поэтому на рассмотрении случая $\gamma > 1$. Здесь топологическая структура силового поля (потенциальной энергии) обеспечена большими значениями ($\gamma = 62,5, \sigma = 25,0$). Величины γ и σ определяют по (2.7) значение $n = 1$. Ниже покажем, что условие $\gamma \gg 1, n \gg 1$ является существенным при определении возможности сведения к эквивалентным структурам.

При использовании сведений относительно характера положений равновесия можно установить, что при изменении координат x_1, y_1, x_2, y_2 в трубке

$$T(x, y) = \{x, y: |x_1| < \infty, |x_2| < x_2(M_{1ie}), \Pi(M_{1ie}) < H(x, y) < \Pi(M_{0ie})\},$$

где M_{1i_e} — вторая точка последовательности положений равновесия, соответствующих i_e ; M_{0i_e} — первая точка этой же последовательности — точка максимума функции $\Pi(x)$, гамильтониан (2.4) топологически эквивалентен гамильтониану

$$(2.15) \quad H^* = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2} (\cos x_1 + \cos x_2).$$

Гамильтониан (2.15) легко поддается анализу. Из (2.15) получаем две несвязанные системы H_1 и H_2 , где

$$H_1 = \frac{1}{2} (y_1^2 + \cos x_1), \quad H_2 = \frac{1}{2} (y_2^2 + \cos x_2).$$

Отсюда, если значения энергии H_1 таковы, что начальная точка (x_1^0, y_1^0) находится за сепаратрисой, отделяющей область периодических движений системы H_1 от области движений, уходящих на бесконечность вдоль оси Ox_1 при ограниченных y_1 , а значения энергии H_2 таковы, что начальная точка (x_2^0, y_2^0) находится внутри области периодических движений системы H_2 ($H_2 < H_{2c}$, H_{2c} — энергия, соответствующая движению по сепаратрисе), то траектория, полученная из начальной точки $(x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0)$, будет соответствовать искомой. Естественно, поскольку заданная система (2.3) является связанной (что приводит к перераспределению начальной энергии между подсистемами H_1 и H_2 при условии сохранения ограниченного интеграла $H = H_1 + H_2$), то должен существовать момент времени t^* , когда энергия H_{2c} в системе H_2 будет превышена. Тем не менее можно ожидать, что интервал $[0, t^*]$ не будет малым. Такая возможность может быть обусловлена наличием в системе (2.3) эффекта локализации энергии [8], который состоит в том, что не вся энергия одной из двух взаимосвязанных систем переходит в другую. Можно предположить, что возможность существования подобного качества у системы (2.3) будет зависеть от того, насколько отличается от тождественного преобразование $P(x)$, приводящее функцию $\Pi(x)$ к функции $\Pi^*(x)$ для области параметров, ограниченной условиями $\gamma \geq 1$, $n \geq 1$.

Укажем на то, что для значений γ , σ , при которых $n = 0$, подобный подход приводит к иному результату. Так, рассмотрим систему с $\gamma = 5,625$, $\sigma = 7,5$ при $a = 0,5$, $k = 4$, $b = 5$, $l = 3$. Такие значения γ и σ обеспечивают наличие лишь трех последовательностей положений равновесия системы (2.3) — G_{0e} , G_{00} и G_{1i_e}

$$G_{1i_e} = \{x, y : y_1 = y_2 = 0; x_1 = \pi i_e / k, x_2 = \pm x_2(\gamma, \sigma)\}.$$

Последовательности положений равновесия G_{00} и G_{1i_e} являются седловыми для поверхности $\Pi = \Pi(x)$, в положениях равновесия G_{0e} функция $\Pi(x)$ будет иметь экстремум — максимум, т. е. все положения равновесия в соответствии с теоремой Ирншоу неустойчивы. Для рассматриваемого случая поверхность $\Pi = \Pi(x)$ невозможно привести к виду (2.12). Топологическим эквивалентом гамильтониана (2.4) в трубке $T(x, y)$ будет гамильтониан

$$(2.16) \quad H^* = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2} (-x_2^2 + \cos x_1).$$

Из рассмотрения траекторий гамильтониана (2.16) следует отсутствие ограниченных по координатам x_2 , y_2 траекторий. Таким образом, ограничение $n \geq 1$, где n определяется по (2.7), является существенным и определяет возможность представления гамильтониана (2.4) в эквивалентном (в трубке T) виде (2.15).

Поступила 31 III 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Козорез В. В. Динамические системы магнитно-взаимодействующих свободных тел. Киев: Наукова думка, 1982.
2. Магнитные и магнитодинамические опоры. М.: Энергия, 1968.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, перераб. при участии Ю. В. Геронимуса, М. Ю. Цейтлина. М.: Физматгиз, 1963.
4. Мартышок А. А., Кожуховский Н. Н. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем. — ПМ, 1980, т.16, № 12.
5. Кожуховский Н. Н. О неустойчивости гамильтоновых систем с одной степенью свободы. — Мат. физика, 1981, вып. 29.
6. Постников М. М. Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971.
7. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
8. Овчинников А. А., Эрихман Н. С. О локализации колебательной энергии при высоких уровнях возбуждения. Колебательные экситоны. — УФН, 1982, т. 138, вып. 2.