

УДК 681.3.08 + 519.2

О БЕЗОШИБОЧНОМ СЧИТЫВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ДИСКРЕТНО-ТОЧЕЧНЫХ ПОЛЕЙ*

А. Л. Резник, В. М. Ефимов, А. А. Соловьев, А. В. Торгов

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: reznik@iae.nsk.su*

Строго доказано одно замкнутое аналитическое соотношение, которое требуется для описания надёжности считывания случайного дискретно-точечного поля, осуществляемого интеграторами с двумя пороговыми уровнями. Решение возникающей при этом проблемной вероятностной задачи выполнено с использованием двух нестандартных приёмов: во-первых, разработаны программы для проведения аналитических выкладок на ЭВМ; во-вторых, введено и успешно применено новое понятие «трёхмерные обобщённые числа Каталана».

Ключевые слова: случайное разбиение интервала, компьютерные аналитические выкладки, трёхмерные обобщённые числа Каталана.

Введение. В работах [1–4] предложен нестандартный подход к нахождению решений проблемных вероятностных задач, возникающих при исследовании надёжности различных методов считывания случайных дискретных изображений. Главным отличительным моментом такого подхода является то, что при поиске точных аналитических решений создаются и напрямую используются программные алгоритмы для проведения трудоёмких аналитических преобразований на ЭВМ.

Приведём конкретный пример. Для отыскания точной аналитической зависимости, описывающей надёжность телевизионного считывания случайных дискретных изображений, осуществляемого интеграторами с k пороговыми уровнями, нам потребовалось решить следующую вероятностную задачу:

Пусть n точек x_1, x_2, \dots, x_n случайно брошены на интервал $(0, 1)$, т. е. имеется n независимых испытаний случайной величины, равномерно распределённой на интервале $(0, 1)$. Необходимо найти вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ события, заключающегося в том, что внутри интервала $(0, 1)$ нет ни одного подынтервала Ω_ε длиной ε , содержащего более k точек.

Кажущаяся простота этой задачи, как и многих других задач, относящихся к случайному разбиению интервала [5], обманчива, а её общее решение известно лишь для $k = 1$ [6, 7]. Создание и применение программ машинной аналитики позволило значительно продвинуться в вычислении вероятностей $P_{n,k}(\varepsilon)$ при фиксированных значениях целочисленных параметров n и k . В частности, для $k = 2$ и чётных значений n в результате программного расчёта были установлены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} P_{4,2}(\varepsilon) &= 2(1 - \varepsilon)^4, & 1/2 < \varepsilon < 1; \\ P_{6,2}(\varepsilon) &= 5(1 - 2\varepsilon)^6, & 1/3 < \varepsilon < 1/2; \\ P_{8,2}(\varepsilon) &= 14(1 - 3\varepsilon)^8, & 1/4 < \varepsilon < 1/3; \end{aligned} \quad (1)$$

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00458), Президиума РАН (проект № 11/2012) и Сибирского отделения РАН (интеграционный проект СО РАН — НАН Беларуси № 16/2012).

$$P_{10,2}(\varepsilon) = 42(1 - 4\varepsilon)^{10}, \quad 1/5 < \varepsilon < 1/4;$$

$$P_{12,2}(\varepsilon) = 132(1 - 5\varepsilon)^{12}, \quad 1/6 < \varepsilon < 1/5.$$

Анализ этих компьютерных зависимостей позволил усмотреть общую закономерность и сначала высказать гипотезу [4], а затем и строго доказать [8], что при $k = 2$ для чётных $n = 2m$ на участке $1/m < \varepsilon < 1/(m - 1)$ справедлива формула

$$P_{2m,2}(\varepsilon) = (1/m)C_{2m}^{m-1}(1 - (m - 1)\varepsilon)^{2m}. \quad (2)$$

Всё последующее изложение будет посвящено нахождению и доказательству аналитической зависимости $P_{2m+1,2}(\varepsilon)$, аналогичной формуле (2), но справедливой для нечётных значений $n = 2m + 1$. Эта задача оказалась значительно сложнее предыдущей и потребовала для своего решения создания специальной исследовательской методики. В частности, на одном из этапов доказательства нам пришлось ввести новое понятие «обобщённые трёхмерные числа Каталана» [9] и найти для них явные выражения. Такое название эти числа получили потому, что они действительно являются естественным трёхмерным расширением классической одномерной последовательности Каталана, возникающей во многих задачах вероятностно-статистического характера (кстати, коэффициенты $(1/m)C_{2m}^{m-1}$ в формуле (2) как раз представляют собой такую классическую одномерную последовательность).

Постановка основной задачи. Решаемую в данной работе задачу сформулируем следующим образом:

Пусть $n = 2m + 1$ точек случайно брошены на интервал $(0, 1)$. Требуется указать вероятность $P_{2m+1,2}(\varepsilon)$ события, состоящего в том, что внутри интервала $(0, 1)$ не существует ни одного подынтервала Ω_ε длиной ε , содержащего более двух точек, если $1/(m + 1) < \varepsilon < 1/m$.

Приводимое далее последовательное решение этой задачи построено таким образом, что сначала кратко (без доказательства) приводятся основные утверждения, а потом по каждому из них даются необходимые пояснения и доказательные выкладки. Сразу оговоримся, что утверждения неравнозначны по степени сложности доказательства. Например, утверждение 1 — рядовое комбинаторное соотношение, утверждения 2, 5 и 6 однотипны и достаточно просты, а вот утверждение 7 является проблемной задачей, потребовавшей для своего решения введения абсолютно нового понятия обобщённых трёхмерных чисел Каталана, отыскания их явного вида и построения специальных вероятностно-геометрических схем. Для доказательства финального утверждения необходима хорошая техника обращения с комбинаторными формулами. Но каждое из приведённых утверждений есть самостоятельный пункт, а отсутствие любого из них делает невозможным последовательное и строгое обоснование замкнутой аналитической формулы, являющейся решением поставленной выше задачи.

Решение основной задачи.

Начальное утверждение. Любой вариант размещения случайных точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{2m+1}$ на интервале $(0, 1)$, при котором выполнены условия только что сформулированной задачи, подчиняется схеме, изображённой на рис. 1.

Соответствие приведённой схеме предполагает, что:

1. Интервал $(0, 1)$ в общем случае делится на три зоны: левую, центральную и правую, причём центральная зона присутствует на схеме всегда, а левая (случай $p = 0$) и/или правая (случай $q = 0$) зона может отсутствовать.

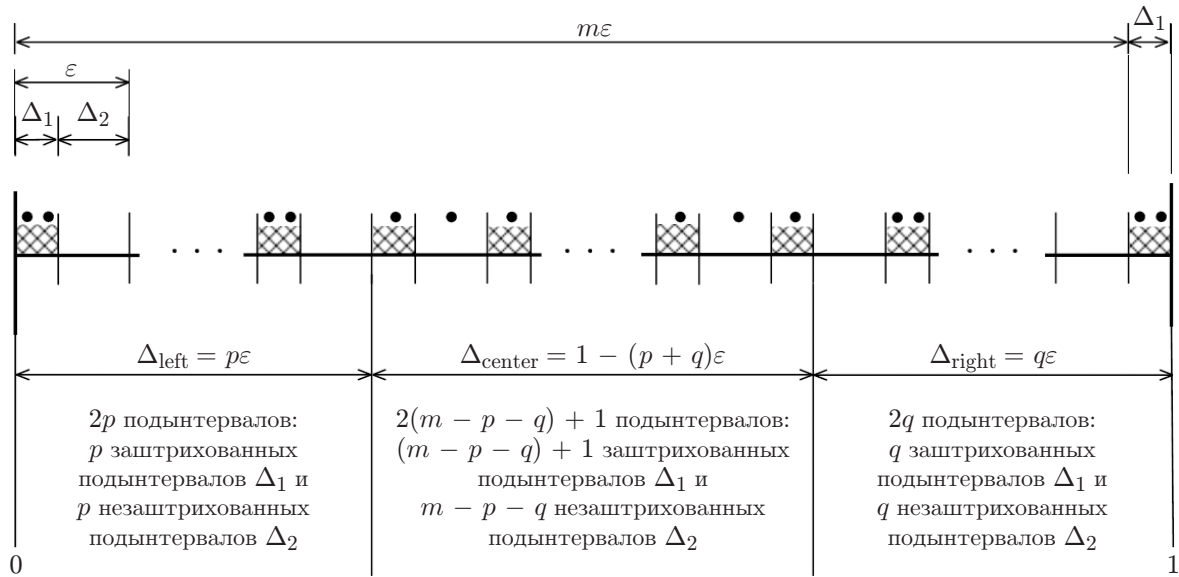


Рис. 1. Размещение нечётного $n = 2m + 1$ числа точек на интервале $(0, 1)$, при котором не существует ни одного подынтервала $\Omega_\varepsilon \subset (0, 1)$ длиной ε , содержащего более двух точек. Случай $1/(m + 1) < \varepsilon < 1/m$

2. Левая зона состоит из чётного числа $2p$ чередующихся между собой Δ_1 - и Δ_2 -подынтервалов, имеющих длины $1 - m\varepsilon$ и $(m + 1)\varepsilon - 1$ соответственно.
3. Правая зона состоит из чётного числа $2q$ чередующихся между собой Δ_1 - и Δ_2 -подынтервалов.
4. Каждый из Δ_1 -подынтервалов левой и правой зон содержит по две точки.
5. Каждый из Δ_2 -подынтервалов левой и правой зон пуст.
6. Центральная зона состоит из нечётного $2(m - p - q) + 1$ числа чередующихся между собой Δ_1 - и Δ_2 -подынтервалов: $(m - p - q) + 1$ подынтервалов Δ_1 и $m - p - q$ подынтервалов Δ_2 .
7. Каждый из Δ_1 - и Δ_2 -подынтервалов центральной зоны содержит по одной точке.

Приведённая схема (см. рис. 1) с разбиением интервала $(0, 1)$ на подынтервалы двух типов (заштрихованные Δ_1 и незаштрихованные Δ_2) является не просто геометрической иллюстрацией возможного размещения случайных точек, но с помощью такого представления непрерывная исходная задача сводится к дискретной, в результате чего открывается возможность её решения комбинаторно-вероятностными методами.

Примечание. Далее по всему тексту будет использоваться следующая терминология. Каждая из брошенных на интервал $(0, 1)$ случайных точек x_i будет называться «чётной» либо «нечётной» в зависимости от чётности (или нечётности) её индекса i в ранжированной последовательности $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2m+1} < 1$. Кроме того, исходя из принадлежности к зонам Δ_{left} , Δ_{right} или Δ_{center} , все точки интервала будут делиться на «левозональные», «правозональные» и «центрально-зональные». Вводится это для удобства последующего изложения, когда понадобится (в частности, при доказательстве утверждения 7) более тонкий анализ взаимного расположения точек. Для большей наглядности все Δ_1 -подынтервалы заштрихованы (см. рис. 1).

Утверждение 1. Если параметры p и q считать фиксированными, то вероятность того, что при бросании $n = 2m + 1$ точек на интервал $(0, 1)$ в объединённую зону $\Delta_{\text{left}} \cup \Delta_{\text{right}}$ попадёт в точности $2(p + q)$ точек, есть

$$P_1 = C_{2m+1}^{2(p+q)} [(p+q)\varepsilon]^{2(p+q)} [1 - (p+q)\varepsilon]^{2(m-p-q)+1}.$$

Утверждение 2. Условная вероятность того, что в точности две точки попадут в каждый из $p + q$ сегментов ε объединённой зоны $\Delta_{\text{left}} \cup \Delta_{\text{right}}$ (при условии, что в объединённую зону попало $2(p + q)$ точек), есть

$$P_2 = \frac{(2(p + q))!}{(p + q)^{2(p + q)} 2^{p + q}}.$$

Утверждение 3. Условная вероятность того, что одновременно во всех сегментах ε объединённой зоны $\Delta_{\text{left}} \cup \Delta_{\text{right}}$ обе попавшие в каждый из них точки будут находиться в заштрихованных подынтервалах Δ_1 , есть

$$P_3 = \left(\frac{1 - m\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{2(p + q)}.$$

Утверждение 4. Условная вероятность того, что в точности $m - p - q$ точек попадут в незаштрихованную часть центральной зоны Δ_{center} (если в зону Δ_{center} попало $2(m - p - q) + 1$ точек), есть

$$P_4 = C_{2(m - p - q) + 1}^{m - p - q} \left[\frac{(m - p - q)((m + 1)\varepsilon - 1)}{1 - (p + q)\varepsilon} \right]^{m - p - q} \times \\ \times \left[\frac{((m - p - q) + 1)(1 - m\varepsilon)}{1 - (p + q)\varepsilon} \right]^{(m - p - q) + 1}.$$

Утверждение 5. Вероятность того, что $m - p - q$ центрально-зональных точек, попавших в незаштрихованную часть центральной зоны Δ_{center} , распределятся ровно по одной в каждом из $m - p - q$ незаштрихованных Δ_2 -сегментов, есть

$$P_5 = \frac{((m - p - q) - 1)!}{(m - p - q)^{(m - p - q) - 1}}.$$

Утверждение 6. Вероятность того, что $(m - p - q) + 1$ точек, попавших в заштрихованную часть центральной зоны Δ_{center} , распределятся ровно по одной в каждом из $(m - p - q) + 1$ заштрихованных Δ_1 -сегментов, есть

$$P_6 = \frac{(m - p - q)!}{((m - p - q) + 1)^{m - p - q}}.$$

Утверждение 7. Вероятность того, что одновременно:

а) локальные координаты $m + 1$ нечётных точек, т. е. координаты, интерпретируемые как значение случайной величины внутри сегмента ε , в который попала каждая из нечётных точек (иначе говоря, локальные координаты — это координаты случайной точки, взятые «по модулю ε »), образуют монотонно возрастающую последовательность (этим условием как раз и обеспечивается то, что внутри интервала $(0, 1)$ нечётные точки будут удалены друг от друга на расстояние, превышающее ε);

б) локальные координаты p чётных левозональных точек образуют монотонно возрастающую последовательность;

с) локальные координаты q чётных правозональных точек образуют монотонно возрастающую последовательность;

d) локальные координаты $m - p - q$ чётных центрально-зональных точек образуют монотонно возрастающую последовательность, —
есть

$$P_7 = \frac{(m+2)(m+3) - (p+q)(m+3) + pq}{(m+2)(m+3)} \frac{2^{p+q}}{(m+1)!p!q!(m-p-q)!}.$$

Финальное утверждение. Перемножая все вероятности и осуществляя суммирование

$$\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{m-p} (P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4 \times P_5 \times P_6 \times P_7),$$

после стандартных и не вызывающих принципиальных затруднений преобразований для вероятности $P_{2m+1,2}(\varepsilon)$ на участке $1/(m+1) < \varepsilon < 1/m$ получаем формулу

$$\begin{aligned} P_{2m+1,2}(\varepsilon) &= C_{2m+1}^{m+1} (1 - m\varepsilon)^{m+1} (1 - (m-1)\varepsilon)^m - \\ &- 2C_{2m+1}^{m+2} (1 - m\varepsilon)^{m+2} (1 - (m-1)\varepsilon)^{m-1} + \\ &+ C_{2m+1}^{m+3} (1 - m\varepsilon)^{m+3} (1 - (m-1)\varepsilon)^{m-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Итак, точное аналитическое решение сформулированной задачи получено. Осталось, как и было намечено ранее, дать необходимые пояснения и привести развёрнутое доказательство по каждому из девяти (с учётом начального и финального утверждений) пунктов.

Пояснение к начальному утверждению. Приводимая далее блок-схема (рис. 2) служит для доказательства обоснованности начального утверждения. При движении по блок-схеме, которое начинается из положения «Старт» и заканчивается в положении «Конец анализа», ведётся подсчёт количества точек в каждом из элементарных и чередующихся между собой подынтервалов Δ_1 и Δ_2 , на которые изначально условно разбит интервал $(0, 1)$. Просмотр подынтервалов начинается с крайнего левого подынтервала Δ_1 . Обозначения на блок-схеме: i — счётчик-указатель анализируемых подынтервалов (как заштрихованных, так и незаштрихованных), на которые разбит интервал $(0, 1)$, причём считается, что все подынтервалы пронумерованы от 1 до $2m + 1$, начиная с крайнего левого подынтервала Δ_1 ; p — счётчик сегментов ε в левой зоне Δ_{left} ; q — счётчик сегментов ε в правой зоне Δ_{right} .

Краткий комментарий к блок-схеме. Анализируя блок-схему, нетрудно установить, что любой допустимый вариант размещения $2m + 1$ точек на интервале $(0, 1)$, удовлетворяющий условиям задачи, сводится к следующему.

1. Крайний левый подынтервал Δ_1 интервала $(0, 1)$ не может быть пуст (т. е. он обязательно содержит одну или две точки).

2. Если крайний левый подынтервал Δ_1 содержит две точки, то это означает, что в данном случае интервал $(0, 1)$ открывается левой зоной Δ_{left} (вообще говоря, как станет ясно из последующего изложения, существуют такие размещения случайных точек, удовлетворяющие условиям задачи, при которых левая зона Δ_{left} вовсе отсутствует на схеме). Левая зона характеризуется тем, что содержит по p подынтервалов Δ_1 и Δ_2 , которые чередуются между собой, составляя целое число сегментов ε . Начинается левая зона Δ_{left} с заштрихованного подынтервала Δ_1 , а заканчивается незаштрихованным подынтервалом

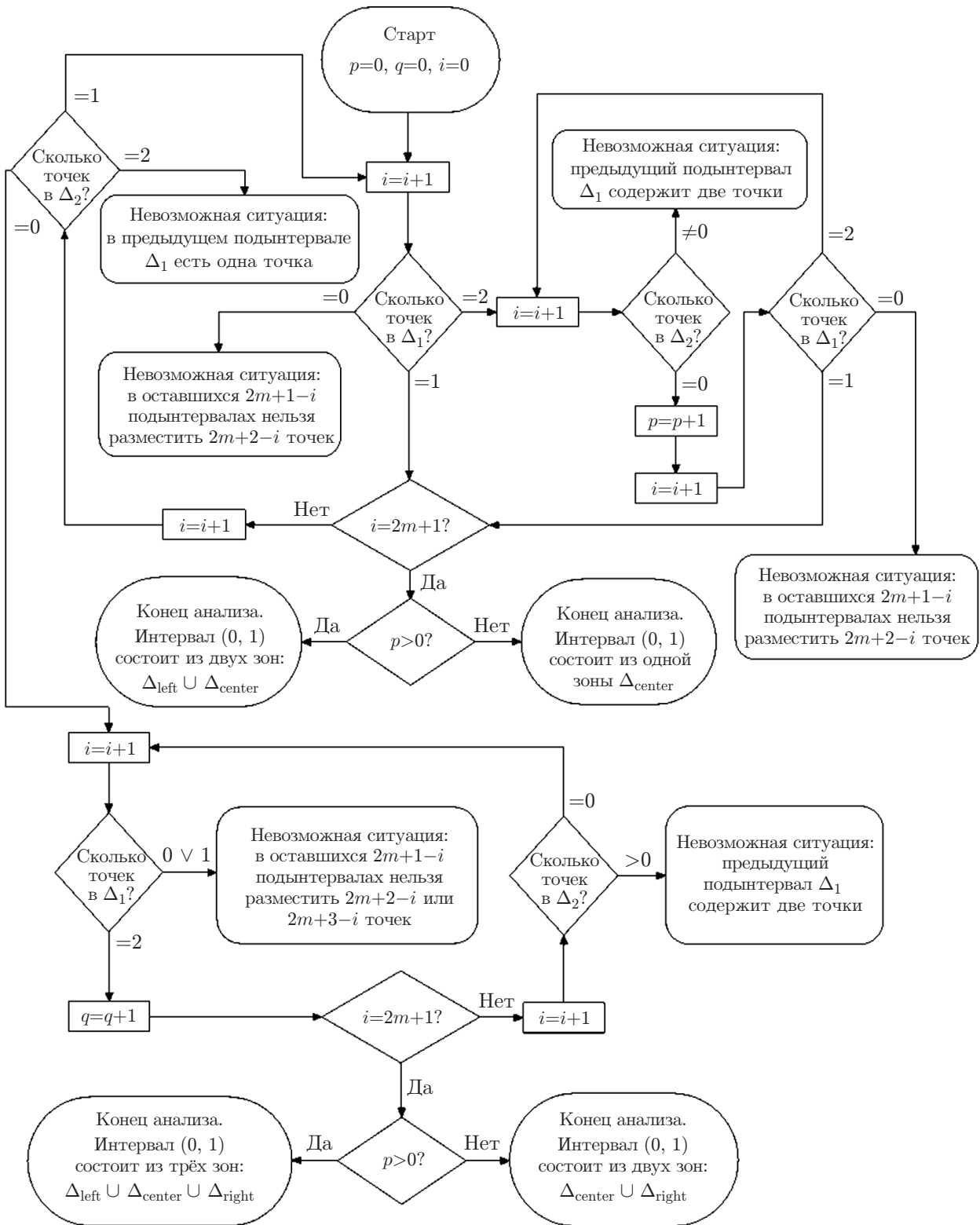


Рис. 2. Блок-схема, подтверждающая, что любое размещение нечётного $n = 2m + 1$ числа точек на интервале $(0, 1)$, при котором не существует ни одного подынтервала $\Omega_\varepsilon \subset (0, 1)$ длиной ε (случай $1/(m + 1) < \varepsilon < 1/m$), содержащего более двух точек, подчиняется схеме, представленной на рис. 1

Δ_2 (см. рис. 1). Все заштрихованные подынтервалы Δ_1 , относящиеся к левой зоне, содержат по две точки, а все незаштрихованные подынтервалы пусты. После левой зоны Δ_{left} (если только она присутствует на схеме) обязательно следует центральная зона Δ_{center} .

3. Если крайний левый подынтервал Δ_1 интервала $(0, 1)$ содержит одну точку, то это означает, что левая зона Δ_{left} в данном варианте размещения отсутствует (случай $p = 0$), а интервал $(0, 1)$ открывается центральной зоной Δ_{center} . Центральная зона характеризуется тем, что в её состав входит нечётное количество $2(m - p - q) + 1$ подынтервалов, начинающихся и заканчивающихся заштрихованным подынтервалом Δ_1 . Все подынтервалы центральной зоны содержат по одной точке (нечётные точки в заштрихованных подынтервалах Δ_1 и чётные точки в незаштрихованных подынтервалах Δ_2).

4. Дальнейшее продвижение по блок-схеме показывает, что в общем случае правая зона Δ_{right} (в отличие от центральной зоны Δ_{center} , присутствие которой на схеме обязательно) может и отсутствовать (случай $q = 0$). Правая зона характеризуется тем, что содержит чётное число $2q$ подынтервалов и начинается с незаштрихованного подынтервала Δ_2 . Все заштрихованные подынтервалы Δ_1 , относящиеся к правой зоне, содержат по две точки, а все незаштрихованные подынтервалы Δ_2 пусты.

Пояснение к утверждению 1. Особых пояснений не требуется — это обычная схема Бернулли. На интервал $(0, 1)$ бросается $2m + 1$ точек, вероятность «успеха» (попадания в зону $\Delta_{\text{left}} \cup \Delta_{\text{right}}$) равна $(p + q)\varepsilon$, вероятность «неуспеха» — $1 - (p + q)\varepsilon$.

Пояснение к утверждению 2. Простое комбинаторное соотношение. Требуется найти вероятность $\text{Pr}(r)$ того, что при бросании $2r$ шаров по r урнам в каждую из них попадёт в точности по два шара.

Введём обозначение $P_s(N)$ для вероятности того, что при бросании N шаров по s урнам в некоторую фиксированную урну попадёт в точности два шара. Очевидно, что

$$P_s(2s) = C_{2s}^2 (1/s)^2 (1 - 1/s)^{2s-2}.$$

Поскольку

$$\text{Pr}(r) = P_r(2r)P_{r-1}(2r-2)P_{r-2}(2r-4)\dots P_1(2),$$

то после проведения необходимых подстановок и элементарных преобразований получим

$$\text{Pr}(r) = \frac{(2r)!}{r^{2r} 2^r}.$$

Пояснение к утверждению 3. Каждый из $p + q$ сегментов ε , образующих объединённую зону $\Delta_{\text{left}} \cup \Delta_{\text{right}}$, состоит из двух подынтервалов: Δ_1 длиной $1 - m\varepsilon$ и Δ_2 длиной $\varepsilon - \Delta_1 = (m + 1)\varepsilon - 1$. Если каждый сегмент ε содержит две точки, то вероятность того, что обе они попали в подынтервал Δ_1 , естественно, равна $((1 - m\varepsilon)/\varepsilon)^2$. А вероятность того, что такая картина наблюдается во всех $p + q$ сегментах ε , есть

$$P_3 = ((1 - m\varepsilon)/\varepsilon)^{2(p+q)}.$$

Пояснение к утверждению 4. На интервал $(0, 1)$ бросалось $2m + 1$ точек. Из них $2(p + q)$ попали в объединённую зону $\Delta_{\text{left}} \cup \Delta_{\text{right}}$. Следовательно, в центральную зону Δ_{center} попало $2(m - p - q) + 1$ точек. Длина объединённой зоны $\Delta_{\text{left}} \cup \Delta_{\text{right}}$ составляет $(p + q)\varepsilon$. Длина центральной зоны Δ_{center} равна $1 - (p + q)\varepsilon$, из которой $(m - p - q)((m + 1)\varepsilon - 1)$ приходится на $m - p - q$ незаштрихованных подынтервалов Δ_2 , а $((m - p - q) + 1)(1 - m\varepsilon)$ — на $(m - p - q) + 1$ заштрихованных подынтервалов Δ_1 . Поэтому вероятность того, что в точности $m - p - q$ точек попадут в незаштрихованную часть центральной зоны Δ_{center}

(и, соответственно, в точности $(m - p - q) + 1$ точек попадут в её заштрихованную часть), есть

$$P_4 = C_{2(m-p-q)+1}^{m-p-q} \left[\frac{(m-p-q)((m+1)\varepsilon - 1)}{1 - (p+q)\varepsilon} \right]^{m-p-q} \times \\ \times \left[\frac{((m-p-q)+1)(1-m\varepsilon)}{1 - (p+q)\varepsilon} \right]^{(m-p-q)+1}.$$

Пояснение к утверждению 5. Несложное комбинаторное соотношение, которое можно доказать различными способами, например аналогично приведённому выше доказательству утверждения 2.

Пояснение к утверждению 6. Полная аналогия с утверждениями 2 и 5.

Пояснение к утверждению 7. Узловым моментом при доказательстве утверждения 7 является комбинаторно-«лингвистическая» задача, для решения которой нам потребовалось ввести понятие и найти явные выражения для обобщённых трёхмерных чисел Каталана. В кратком изложении суть задачи такова.

Задача с трёхсимвольными словами, приводящая к обобщённым трёхмерным числам Каталана. Из N_a символов «a», N_b символов «b» и N_c символов «c» составляются различные слова длиной $N_a + N_b + N_c$. Нужно определить общее число слов, одновременно удовлетворяющих двум условиям:

- 1) при просмотре слова слева направо количество встреченных символов «b» никогда не превышает количества встреченных символов «a»;
- 2) при просмотре слова справа налево количество встреченных символов «c» никогда не превышает количества встреченных символов «a».

В [9] показано, что число таких слов

$$N_{a,b,c} = \frac{(N_a + N_b + N_c)! (N_a + 1)(N_a + 2) - (N_b + N_c)(N_a + 2) + N_b N_c}{N_a! N_b! N_c! (N_a + 1)(N_a + 2)}. \quad (4)$$

Мы назвали числа $N_{a,b,c}$ обобщёнными трёхмерными числами Каталана, имея в виду то, что они действительно обобщают известную по многим приложениям одномерную последовательность Каталана, которая получается из (4) при $N_c = 0$ и $N_a = N_b$.

Возвращаясь к обоснованию приведённой в утверждении 7 вероятности P_7 , отметим, что роль символов «a» в нашем случае играют $m + 1$ нечётных точек (т. е. $N_a = m + 1$), роль символов «b» — p чётных левозональных точек (т. е. $N_b = p$), а роль символов «c» — q чётных правозональных точек (т. е. $N_c = q$). Таким образом, количество «удачных» вариантов размещения, когда локальные координаты нечётных, чётных левозональных и чётных правозональных точек удовлетворяют ограничениям исходной задачи, равно

$$\frac{((m+p+q)+1)!}{(m+1)!p!q!} \left[1 - \frac{p+q}{m+2} + \frac{pq}{(m+2)(m+3)} \right],$$

а общее число различных вариантов размещения $(m+p+q)+1$ случайных величин, на которые должна нормироваться эта величина, есть

$$\frac{((m+p+q)+1)!}{2^{p+q}}.$$

Коэффициент 2^{p+q} в знаменателе последнего выражения отражает тот факт, что в каждом из Δ_1 -сегментов левой зоны и в каждом из Δ_1 -сегментов правой зоны (а всего таких

сегментов $p + q$) происходит принудительное упорядочение: чётная левозональная точка должна иметь большие координаты по сравнению с нечётной точкой из одноимённого сегмента, а чётная правозональная — меньшие.

Сомножитель $1/(m - p - q)!$, входящий в итоговую формулу для вероятности P_7 , характеризует то обстоятельство, что локальные координаты $m - p - q$ чётных центрально-зональных точек, попавших в каждый из Δ_2 -сегментов центральной зоны, должны образовывать монотонно возрастающую последовательность, никак не связанную с координатами всех остальных точек (более того, такая связь невозможна, поскольку локальные координаты чётных центрально-зональных точек есть значения случайной величины, равномерно распределённой в интервале (Δ_1, ε) , имеющем длину $(m + 1)\varepsilon - 1$, в то время как локальные координаты всех остальных точек (нечётных, чётных левозональных и чётных правозональных) есть значения случайной величины, равномерно распределённой в интервале $(0, \Delta_1)$, имеющем длину $1 - m\varepsilon$).

Пояснение к финальному утверждению. После перемножения вероятностей P_1, P_2, \dots, P_7 и проведения первичных упрощений получаем

$$\begin{aligned}
 P_{2m+1,2}(\varepsilon) &= \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{m-p} (P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4 \times P_5 \times P_6 \times P_7) = \\
 &= \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{m-p} \left\{ \frac{(2m+1)!}{(m+1)!(m-p-q)!p!q!} \frac{(m+2)(m+3) - (p+q)(m+3) + pq}{(m+2)(m+3)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times (1 - m\varepsilon)^{(m+p+q)+1} ((m+1)\varepsilon - 1)^{m-p-q} \right\}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Дальнейшее упрощение соотношения (5) осуществляется в такой последовательности:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{m-p} \left\{ \frac{(2m+1)!}{(m+1)!(m-p-q)!p!q!} \frac{(m+2)(m+3) - (p+q)(m+3) + pq}{(m+2)(m+3)} \times \right. \\
 &\quad \left. \times (1 - m\varepsilon)^{(m+p+q)+1} ((m+1)\varepsilon - 1)^{m-p-q} \right\} = \\
 &= \frac{(2m+1)!}{(m+3)!} \sum_{p=0}^m \left[\frac{1}{p!} \sum_{q=0}^{m-p} \left\{ \frac{(m+2)(m+3) - (p+q)(m+3) + pq}{(m-p-q)!q!} \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (1 - m\varepsilon)^{(m+p+q)+1} ((m+1)\varepsilon - 1)^{m-p-q} \right\} \right] = \\
 &= \frac{(2m+1)!}{(m+1)!} \sum_{p=0}^m \left[\frac{(1 - m\varepsilon)^{m+p+1}}{p!(m-p)!} \sum_{q=0}^{m-p} \left\{ \frac{(m-p)!}{(m-p-q)!q!} (1 - m\varepsilon)^q ((m+1)\varepsilon - 1)^{m-p-q} \right\} \right] - \\
 &- \frac{(2m+1)!}{(m+2)!} \sum_{p=1}^m \left[\frac{(1 - m\varepsilon)^{m+p+1}}{(p-1)!(m-p)!} \sum_{q=0}^{m-p} \left\{ \frac{(m-p)!}{(m-p-q)!q!} (1 - m\varepsilon)^q ((m+1)\varepsilon - 1)^{m-p-q} \right\} \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(2m+1)!}{(m+2)!} \sum_{p=0}^m \left[\frac{(1-m\varepsilon)^{m+p+2}}{p!(m-p-1)!} \sum_{q=1}^{m-p} \left\{ \frac{(m-p-1)!}{(m-p-q)!(q-1)!} (1-m\varepsilon)^{q-1} ((m+1)\varepsilon-1)^{m-p-q} \right\} \right] + \\
& + \frac{(2m+1)!}{(m+3)!} \sum_{p=1}^m \left[\frac{(1-m\varepsilon)^{m+p+2}}{(p-1)!(m-p-1)!} \sum_{q=1}^{m-p} \left\{ \frac{(m-p-1)!}{(m-p-q)!(q-1)!} (1-m\varepsilon)^{q-1} ((m+1)\varepsilon-1)^{m-p-q} \right\} \right] = \\
& = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} (1-m\varepsilon)^{m+1} (1-(m-1)\varepsilon)^m - \frac{(2m+1)!}{(m-1)!(m+2)!} (1-m\varepsilon)^{m+2} (1-(m-1)\varepsilon)^{m-1} - \\
& - \frac{(2m+1)!}{(m-1)!(m+2)!} (1-m\varepsilon)^{m+2} (1-(m-1)\varepsilon)^{m-1} + \frac{(2m+1)!}{(m-2)!(m+3)!} (1-m\varepsilon)^{m+3} (1-(m-1)\varepsilon)^{m-2} = \\
& = C_{2m+1}^{m+1} (1-m\varepsilon)^{m+1} (1-(m-1)\varepsilon)^m - \\
& - 2C_{2m+1}^{m+2} (1-m\varepsilon)^{m+2} (1-(m-1)\varepsilon)^{m-1} + C_{2m+1}^{m+3} (1-m\varepsilon)^{m+3} (1-(m-1)\varepsilon)^{m-2}.
\end{aligned}$$

Справедливость формулы (3) доказана, тем самым решение сформулированной задачи завершено.

Заключение. Представленное исследование является продолжением авторских работ по нахождению точных аналитических формул, описывающих надёжность безошибочного телевизионного считывания случайных дискретных изображений, осуществляемого многопороговыми интеграторами. Сложность обсуждаемых и решаемых здесь проблем заключается в том, что зачастую даже незначительное изменение в постановке исходной задачи приводит к переходу новой задачи из разряда элементарных в категорию неразрешимых. В данной работе получена и доказана точная и ранее неизвестная формула (3), которой описывается вероятность безошибочного двухпорогового считывания случайного одномерного дискретно-точечного фрагмента с нечётным числом элементов. Успешному доказательству способствовало использование частных решений задачи, полученных с помощью разработанных авторами программ машинной аналитики. Ещё одним важным моментом, отличающим данную работу, является то, что в ходе её выполнения были введены в практику, нашли явный вид и напрямую применены трёхмерные обобщённые числа Каталана, имеющие самостоятельное значение для теории вероятностей, комбинаторики и дискретной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Reznik A. L., Efimov V. M.** Analytical computer calculations in image analysis: correct reading of random discrete-point fields // Proc. of the IASTED Intern. Conf. on Signal Processing, Pattern Recognition, and Applications. June 30 — July 2, 2003. Rhodes, Greece. P. 6–10.
2. **Ефимов В. М., Резник А. Л.** Аналитическое вычисление на ЭВМ объемов, ограниченных системой гиперплоскостей в n -мерном пространстве // Автометрия. 1976. № 1. С. 116–119.
3. **Ефимов В. М., Резник А. Л.** Аналитическое определение с помощью ЭВМ статистических характеристик процесса щелевого сканирования потока Бернулли // Автометрия. 1977. № 4. С. 49–51.

4. **Резник А. Л.** Моделирование на ЭВМ непрерывного считывания изображений дискретной структуры // Автометрия. 1981. № 6. С. 3–6.
5. **Дэйвид Г.** Порядковые статистики. М.: Наука, 1979. 336 с.
6. **Parzen E.** Modern Probability Theory and Its Applications. New York — London: John Wiley and Sons, Inc., 1960. 464 p.
7. **Уилкс С.** Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.
8. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А.** Компьютерно-аналитический расчёт вероятностных характеристик процесса считывания случайных точечных изображений // Автометрия. 2011. 47, № 1. С. 10–16.
9. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А., Торгов А. В.** Обобщённые числа Каталана в задачах обработки случайных дискретных изображений // Автометрия. 2011. 47, № 6. С. 11–15.

Поступила в редакцию 3 апреля 2012 г.
