УДК 160.1

О ПРЕДПОСЫЛКАХ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ В РАБОТАХ Б. БОЛЬЦАНО*

К.А. Габрусенко

В статье исследуются представления Б. Больцано о бесконечных множествах. Посредством реконструкции понятийной структуры теории бесконечного у Больцано проясняются ограничения, накладываемые конкретными понятиями на представление о бесконечном, и выявляется эвристическая значимость отдельных идей для дальнейшего развития теории бесконечных множеств.

Ключевые слова: бесконечное, множество, теория множеств, Больцано

В 70-х годах XIX в. Г. Кантором в результате обобщения достаточно нечеткого понятия «множество» и разработки универсального инструментария для оперирования объектами, ранее подпадавшими под такие понятия, как «многообразие», «совокупность», «количество» и т.п., была создана теория множеств. Одновременно с этим Кантор сформулировал принципиально новое определение понятия «бесконечное», позволившее сделать данное понятие равноправным объектом математической науки [1]. Б. Больцано был ближайшим предшественником Кантора. Он также исследовал бесконечные совокупности объектов и в работе «Парадоксы бесконечного» («Paradoxien des Unendlichen», далее – PU) [2] предложил оригинальную концепцию бесконечного, однако ему не удалось создать общий метод оперирования совокупностями любой природы. Целью настоящей статьи является прояснение причин, не позволивших Больцано создать обобщенную теорию множеств раньше Кантора. Для этого в работах

* Статья подготовлена в рамках выполнения государственного задания Томского государственного университета «Прикладная гуманитаристика: актуализация практически ориентированных подходов в исследовании культуры» (проект 2111).

Больцано исследуется понятийная структура, окружающая понятие «бесконечное».

В *PU* впервые дается достаточно подробный положительный анализ свойств актуально бесконечного и строится математическая теория, включающая актуально бесконечное в качестве равноправного объекта. Поскольку само по себе бесконечное нельзя познать непосредственно, Больцано рассматривает понятие «бесконечность» в его связи с конечным, как происходящее из понятия «конечное» путем простого присоединения отрицательной приставки. Он отмечает, что оба эти понятия равным образом относятся к множествам (Menge), множественностям (Vielheit) и величинам (Größe), поэтому в качестве исходной точки полагает, что более точное исследование вопроса о том, при каких обстоятельствах мы считаем множество конечным или бесконечным, даст нам также сведения о *бесконечности вообще* [3].

В системе понятий *PU* наиболее фундаментальными являются понятия «совокупность» (Inbegriff) и «целое» (Ganze), определяемые как «понятия, лежащие в основании союза “и”» [4]. В «Учении о науке» («Wissenschaftslehre», далее – *WL*) [5] Больцано предлагает более точное определение совокупности: это «любое целое, составленное из частей, порядок соединения которых не оговорен» [6]. Объекты объединяются в совокупности не произвольным образом, для совершения этой операции они должны быть заранее как-либо связаны в реальности. «Совершенно неверно, что только благодаря тому, что их (две частицы. – *К.Г.*) мыслят вместе, между ними возникают отношения, которых ранее не было» [7]. Возможно все то, что не противоречит никакой истине, содержащей чистые понятия. Из факта, что отношения, лежащие в основании совокупностей, не являются следствиями актов мышления и даются ему как уже ставшие, а также из специфического понимания возможности следует, что все совокупности (в том числе и бесконечные) также являются актуальными. Наиболее важен такой вид совокупности, как множество. Множество – совокупность, независимая от порядка элементов, «относительно которой вид соединения ее частей рассматривается как безразличное... даже если этих частей всего две» [8].

Исследователями теории Больцано верно отмечается, что при таком подходе под понятие множества не подпадают совокупности, содержащие единственный элемент и совокупности, не имеющие элементов (пустое множество) [9]. Однако, вопреки такому мнению, элементами множества являются не единицы, а любые объекты, способные составить совокупность: роза и понятие о розе, планеты, натуральные числа и т.п. Например, Э. Кольман утверждает, что «под “частями множества” Больцано понимал его элементы, а сейчас под ними понимают любые подмножества данного множества» [10]. В общем случае это действительно так, однако существует вид множеств, для которых данное утверждение несправедливо, – это суммы.

Сумма (Summen) – совокупность, части которой представляют собой также совокупности, причем части частей тоже являются частями всей совокупности [11]. В *WL* Больцано указывает среди признаков суммы безразличность способа соединения частей, т.е. рассматривает ее как вид множества [12]. Поскольку ничто не мешает представить булеан (т.е. множество всех подмножеств) в качестве таким образом определенной суммы, предыдущее возражение также не достигает цели. (Сам Больцано не рассматривал булеаны, речь идет лишь о логической возможности этого факта.)

Ряд (Reihe) – совокупность, на которой задан некоторый закон формирования ряда (Bildungsgesetz), с помощью которого каждому элементу ряда сопоставляются не более чем один предшествующий и не более чем один последующий элементы. Элементы, для которых не задан предшествующий или последующий элемент, называются крайними; при этом элемент, не имеющий предшествующего, называется первым, а не имеющий последующего – последним. Ряд называется бесконечным, если «ни один его член не может рассматриваться в качестве последнего члена ряда» [13]. Понятие ряда находится в отношении противоположности с понятием множества: элементы этой совокупности не только обладают некоторой степенью индивидуальности, но также являются упорядоченными.

В *WL* Больцано вводит также два очень важных взаимосвязанных понятия – «единица» и «множественность». Единица (Einheit) – это «каждый предмет, который имеет свойство *a* или (что то же самое) входит в объем представления “нечто, которое имеет (свойство) *a*”» [14]. Множественность (Vielheit) – это «совокупность единиц» [15], или множество, элементы которого рассматриваются как единицы определенного рода *a* [16]. В отличие от множества, элементы которого могут обладать определенной индивидуальностью, единицы множественности характеризуются только тем, что принадлежат к некоторой множественности *a* (Больцано называет ее Allheit), большей или равной данной, содержащей все единицы, обладающие свойством *a*. В случае множественности Больцано абстрагируется не только от порядка элементов совокупности (как в множестве), но и от всех различий между ее элементами. Таким образом, множественность представляет собой некоторую количественную характеристику совокупности. Понятие множественности лежит в основании понятий величины и натурального числа (у Больцано – «целого числа», «ganze Zahl»). Понятие бесконечности Больцано вводит как свойство множественности особого рода. Бесконечная множественность вводится как множественность, большая любой конечной, такая, что любое конечное множество представляет собой только ее часть. Ряд, заданный на бесконечной множественности, не имеет последнего члена [17]. Отсюда бесконечное само по себе Больцано понимает как свойство (Beschaffenheit) бесконечных множественностей: «Все, что мы определяем как бесконечное, называется так только в силу того и потому, что мы находим в нем некоторое свойство, которое может рассматриваться как бесконечная множественность» [18].

Больцано критически рассматривает имеющиеся в истории философии определения бесконечного и вопросы о его действительном существовании. На момент написания *PU* наиболее значимым и актуальным было представление о качественном бесконечном, сформулированное Гегелем. Такое понимание бесконечного не устраивает Больцано, поскольку, во-первых, относится исключительно к абсолюту, а во-вторых, приписывается нормативно, постулируется. Абсолют в своей бесконечности трансцендентен миру, и, следовательно, качественное бесконечное к действительному миру неприменимо, тогда как бесконечное количество имманентно действительности и может быть обнаружено в ней. Больцано соглашается, что относительно Бога «можно указать такие точки зрения, с которых мы видим в нем бесконечное количество» [19] и которые позволяют приписывать ему *свойство* бесконечности. В качестве примера Больцано приводит возможность приписать Богу более чем одну бесконечную силу: бесконечную силу познания и т.д. Никакое другое понятие о бесконечном в абсолюте Больцано не принимает. Также большим недостатком качественного бесконечного является его единственность: все бесконечности оказываются, по определению, тождественны и какая-либо их дифференциация не имеет смысла. В целом качественное бесконечное представляется Больцано излишне умозрительным, пустым и, следовательно, избыточным.

Больцано критикует и представление о потенциально бесконечном, принимаемое некоторыми математиками, например О. Коши. Под бесконечным они подразумевают «переменную величину, значение которой возрастает без ограничений и может стать больше любой данной величины, какой бы большой она ни была» [20], тем не менее значение этой величины всегда остается конечным. Потенциально бесконечное, определенное таким образом, не является, согласно Больцано, бесконечным в собственном смысле, поскольку переменная величина – это не величина, а представление о величине, которому соответствует бесконечное множество различных, всегда конечных величин.

Определение бесконечного как того, «что не способно к дальнейшему увеличению» (keiner ferneren Vermehrung fähig ist), или как того, «к чему ничто не может быть присоединено (прибавлено)» (nichts mehr beigefügt (addirt) werden kann), данное Спинозой, также не устраивает Больцано. В качестве контрпримера он приводит луч – часть прямой (бесконечной), с одной стороны ограниченную точкой. Луч, сам будучи бесконечным, может быть увеличен путем прибавления отрезка или второго луча и построения до целой прямой.

Определение бесконечного как того, «что не имеет конца» (kein End e hat), несостоятельно, поскольку в нем используется не определенное понятие «конец». Определение конца как границы вообще и рассмотрение бесконечного в расширительном смысле – как неограниченного приводят к противоречию. Так, например, точка пространства очевидно не является бесконечной, хотя и не имеет границ и, следовательно, подпадает под это определение. Упомянутый луч ограничен своим началом и вместе с тем бесконечен. Отрезок действительной прямой [0,1], будучи также ограничен точками 0 и 1, содержит внутри себя бесконечно много точек.

В основании утверждения о том, что «бесконечное множество не может существовать нигде, поскольку не может быть ни соединено в целое, ни стать единым в мысли» [21], Больцано видит убеждение, что прежде чем помыслить некое целое, составленное из определенных объектов, необходимо составить представление о каждом предмете в отдельности. В качестве контраргумента он утверждает, что может «представить все множество, или совокупность, жителей Праги или Пекина целиком, без того чтобы представлять каждого жителя в отдельности» [22]. Именно это и происходит, когда высказываются общие суждения о множествах, например суждение, что число жителей Праги составляет от 100000 до 120000.

Больцано ставит вопрос о том, может ли бесконечное обладать какой-либо действительностью, предметностью (Gegenständlichkeit), и отвечает на него утвердительно. Примером может служить очевидно непустое множество предложений, первое из которых – некоторое *A*, второе – «Истинно, что *A*», оно отлично от первого и т.д. Больцано отмечает изоморфизм рядов таких предложений и натуральных чисел, из чего делает вывод, что множество предложений бесконечно.

Существование бесконечного в действительности выводится из всесовершенства Бога. Множество сотворенных им конечных существ должно быть бесконечно – в силу того, что он желает бесконечно много и осуществляет в действительности все, что хочет. Также бесконечно множество состояний каждого конечного существа – в силу плотности времени, «поскольку каждый отрезок времени содержит бесконечно много моментов» [23].

Величина понимается как предмет, принадлежащий к особому роду предметов, таких, что либо каждые два из них равны ($A=B$), либо один из них представляет собой сумму, часть которой равна второму. Число – элемент ряда, первый член которого является единицей рода *a*, а каждый последующий элемент образуется путем прибавления единицы к предшествующему [24]. Каждый элемент этого ряда имеет последующий, т.е. не существует последнего натурального числа и, значит, количество чисел бесконечно. Бесконечность величин следует из того, что все числа, согласно Больцано, также являются величинами, к тому же существуют величины, отличные от чисел. Следовательно, величин больше, чем чисел, т.е. бесконечно много.

Натуральные числа, по Больцано, это в первую очередь множественности, принадлежащие к определенной структуре. При изолированном рассмотрении ряда натуральных чисел каждое из них является величиной (см. определение), и это же явно утверждает Больцано [25]. Однако при расширенном рассмотрении, когда помимо чисел привлекаются другие величины (особенно величины, меньшие чем 1, например 8/17), числа перестают подпадать под определение величины в силу особого статуса единицы, ее неделимости. Принципиальным отличием чисел от величин вообще, непосредственно вытекающим из их определения, является дискретность их множества, в то время как множество величин вообще может быть непрерывным. Именно это различие и у Больцано, и у Кантора стало поводом для начала исследований в области дифференциации бесконечного.

В целом определение натуральных чисел, предложенное Больцано, далеко от совершенства. Во-первых, с его помощью не задается нейтральный элемент относительно сложения, а именно 0. Во-вторых, единица без каких-либо оснований у Больцано имеет особый онтологический статус, поскольку не является суммой и, следовательно, множественностью, из-за чего не ясно, являются ли числа видами величин или нет.

Больцано достаточно близко подходит к понятиям, которые будут кристаллизованы у Кантора в виде конечных и трансфинитных кардинальных чисел. Он рассматривает начинающиеся с единицы конечные ряды натуральных чисел в отношении количества элементов и утверждает, что каждому ряду соответствует его последнее число. Больцано видит парадокс в том, что множеству всех натуральных чисел должна соответствовать не бесконечность, а некоторое большое число – *наибольшее натуральное число*. Предложенное разрешение парадокса состоит в том, что натуральный ряд не имеет последнего элемента, следовательно, понятие наибольшего натурального числа является пустым. Отсюда Больцано делает вывод, что число не может быть количественной характеристикой любого множества. Для большей части множеств количество выражается только величиной.

В *PU* Больцано также определяет бесконечно большие и бесконечно малые величины как объекты, для которых аксиома Архимеда не является справедливой. Бесконечная сумма единиц не превзойдет бесконечно большую величину (что демонстрируется на примере натуральных чисел). По аналогии делается вывод, что бесконечная сумма бесконечно малых не превзойдет единицу.

Больцано делает первый шаг на пути к дифференциации родов бесконечного. Он утверждает, что не все бесконечные множества могут рассматриваться как равные в отношении их множественности [26]. В качестве аргумента Больцано вновь приводит пример с лучом прямой, который, с одной стороны, является бесконечным, а с другой – представляет собой лишь часть также бесконечной прямой. Он рассматривает пример парадокса, согласно которому два бесконечных множества могут трактоваться одновременно как равные и как неравные. Больцано указывает на тот факт, что, с одной стороны, можно найти закон, посредством которого возможно сопоставить по величине два бесконечных множества (например, для множеств M – действительных чисел от 0 до 5 и N – действительных чисел от 0 до 12 таким законом будет выражение $12x/5$, сопоставляющее каждой величине из M некоторую величину из N и наоборот), а с другой стороны, первое многообразие является частью второго. Этот парадокс основывается на впервые описанном в одном из параграфов отношении эквивалентности.

Отношение эквивалентности базируется на принципе взаимно-однозначного соответствия – весьма мощном инструменте, позволяющем, во-первых, сравнивать количественно бесконечные множества, состоящие из элементов одной природы, и, во-вторых, сравнивать произвольные множества, полностью абстрагируясь от природы их элементов. Этот принцип впоследствии активно использовался Г. Кантором, положившим его в основание теории кардинальных чисел.

К сожалению, в отличие от Кантора Больцано, вместо того чтобы более подробно исследовать свойства этого отношения, отстраняется от него, аргументируя это следующим образом: хотя эти два множества и эквивалентны, тем не менее одно из них является частью другого, следовательно, им не может соответствовать одинаковая множественность. Отсюда Больцано делает вывод, что понятие эквивалентности неприменимо для выражения множественности бесконечных множеств в общем виде, и к ограничению применимости принципа взаимно-однозначного соответствия только произвольными конечными множествами, а также бесконечными множествами, имеющими одни и те же определяющие основания (Bestimmungsgründe), например способ формирования (Entstehungsweise) [27].

Причинами столь быстрого отказа Больцано от отношения эквивалентности послужили смешение понятий величины вообще и элемента множества, неверная (хотя и классическая) интерпретация отношения «часть – целое», неполная проясненность свойств бесконечных множественностей, а также непоследовательность в использовании актуально бесконечного.

Невозможность применения данного принципа сам Больцано аргументирует, во-первых, тем, что при поэлементном сопоставлении бесконечных множеств необходимо учитывать не только геометрическое отношение между ними, но и арифметическое. Во-вторых, тем, что такое сравнение физически невыполнимо, поскольку за конечное время невозможно последовательно сопоставить *каждый* элемент одного множества элементу другого в силу их бесконечности. Что касается второго возражения, то на его примере отчетливо видна непроясненность понятия «бесконечное» в философии Больцано. С одной стороны, он всегда оперирует актуальной бесконечностью – объектом, уже ставшим в какой-либо реальности. С другой стороны, предложенный аргумент опирается на понятие потенциальной бесконечности, в рамках которого бесконечный объект рассматривается как становящийся. Четкой дифференциации между актуально и потенциально бесконечным Больцано не проводит, поэтому возможны всего два варианта: либо все бесконечности рассматриваются как актуальные и тогда аргумент Больцано ошибочен, либо все они рассматриваются как потенциальные и тогда разговор о бесконечном вообще не имеет смысла и для рассмотрения каждого бесконечного необходимо применять специфические методы без возможности какого-либо обобщения.

Первое возражение в развернутом виде звучит следующим образом. Рассмотрим два упомянутых многообразия величин M и N. Возьмем из M две произвольные величины, например $m_1 = 3$ и $m_2 = 4$, а из N – соответствующие им $n_1 = 36/5$ и $n_2 = 48/5$. Геометрическое отношение между этими величинами будет одним и тем же:

$$m_1/m_2 = n_1/n_2 = 4/3.$$

Арифметическое же отношение между ними будет, очевидно, различным:

$$m_1 - m_2 = 1; n_1 - n_2 = 12/5.$$

Отсюда Больцано делает вывод, что множественность величин в N больше, нежели в M, поскольку расстояние между элементами в N будет больше соответствующего расстояния в M. Причину возникающих противоречий Больцано видит в различии способа вхождения элементов в множества. Данное возражение содержит в себе противоречие, которое становится ясно видно, если мы примем, что M является подмножеством N (что полностью согласуется с построением Больцано), и возьмем такие величины из M, отображение которых на N будет вновь принадлежать к M. В качестве таких величин подойдут $m_1 = 1$ и $m_2 = 2$, которым соответствуют $n_1 = 12/5$ и $n_1 = 24/5$. Используя аргументацию, приведенную выше, мы вынуждены сделать вывод, что множественность величин в M больше, нежели в нем самом. Ошибка кроется в смешении понятий величины вообще и элемента множества: в то время как для величин геометрические и арифметические отношения вполне применимы, для элементов множеств они не имеют смысла.

Более выпукло этот факт можно продемонстрировать на примере парадокса Галилея [28]. Рассмотрим два ряда: натуральных чисел и их квадратов. Множество натуральных чисел, с одной стороны, содержит в качестве подмножества множество их квадратов, которых значительно меньше. С другой стороны, каждому натуральному числу N можно поставить в соответствие его квадрат n^2. Между числами 4 и 6 содержится всего одно число, тогда как между их квадратами 16 и 36 – 19 чисел, отсюда, следуя логике Больцано, можно заключить, что квадратов значительно больше. Однако как между элементами натурального ряда 4 и 6, так и между элементами ряда квадратов 16 и 36 находится ровно один элемент (4 является непосредственно предшествующим 5, которое непосредственно предшествует 6; для квадратов 16, 25 и 36 – аналогично). Больцано, вероятнее всего, не увидел эвристической значимости принципа эквивалентности для сравнения бесконечных множеств или же пожертвовал этим принципом сознательно ради сохранения кажущейся непротиворечивости операций с бесконечными множествами, строя их по аналогии с конечными.

Главным достижением Больцано по сравнению с его предшественниками было введение дифференциации бесконечностей. В результате бесконечное перестало быть единым трансцендентным объектом, недоступным для совершения каких-либо операций, и это позволило сделать первый шаг к обобщенной теории множеств, использующей единый инструментарий как для конечных, так и для бесконечных совокупностей.

Однако предложенная Больцано дифференциация не лишена недостатков. Все бесконечные совокупности являются актуальными в силу свойств совокупностей вообще, поскольку возможность объединения объектов в совокупность предшествует любому акту мышления, а возможность и действительность сущностно не различаются. Отсюда следует отсутствие в системе Больцано места для потенциальной бесконечности, противопоставление которой актуальной бесконечности дало Г. Кантору [29] и П. Вопенке [30] очень мощный инструмент для различения бесконечных. Те основания дифференциации, которые предлагает Больцано, весьма спорны и зачастую содержат противоречия.

Представления Больцано о бесконечных совокупностях пока еще не позволяют применять обобщенные способы оперирования бесконечными. Так, например, отношение порядка на бесконечных множествах помимо принципа взаимно-однозначного соответствия привлекает дополнительные условия, такие как определяющие основания или способ формирования множеств. Ограниченность применения принципа взаимно-однозначного соответствия и отсутствие какого-либо другого универсального основания для сравнения делают невозможной унификацию операций над различными видами совокупностей.

Примечания

1. См.: *Кантор Г.* Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985.
2. См.: *Bolzano B.* Paradoxien des unendlichen. – Leipzig: C.H. Reclam, 1851.
3. Ibid.– S. 2.
4. Ibid.
5. См.: *Больцано Б.* Учение о науке (Избранное). – СПб.: Наука, 2003.
6. Там же. – С. 105.
7. *Bolzano B.* Paradoxien des unendlichen. – S. 17.
8. *Больцано Б.* Учение о науке (Избранное). – С. 105.
9.См.: *Кольман Э.* Математические открытия Больцано // Парадоксы бесконечного. – Минск: Изд. В.П. Ильина, 2000. – С. 59–60.
10. Там же.– С. 60.
11. См.: *Bolzano B.* Paradoxien des unendlichen. – S. 4.
12. См.: *Больцано Б.* Учение о науке (Избранное). – С. 105.
13. Там же. – С. 107.
14. Там же.– С. 108.
15. Там же.
16. *Bolzano B.* Paradoxien des unendlichen. – S. 4.
17. Ibid. – S. 6.
18. Ibid. – S. 7.
19. Ibid. – S. 8.
20. Ibid. – S. 9.
21. Ibid. – S. 15.
22. Ibid.
23. Ibid. – S. 36.
24. Ibid. – S. 5–6.
25. Ibid. – S. 21.
26. Ibid. – S. 29.
27. Ibid. – S. 31.
28. См.: *Галилей Г.* Избранные труды: В 2 т. – Наука, 1964. – Т. 1. – С. 140–142.
29. См.: *Кантор Г.* Труды по теории множеств.
30. *Вопенка П.* Альтернативная теория множеств. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2004.

Дата поступления 24.01.2015
Национальный исследовательский
Томский государственный
университет, г. Томск
koder@mail.tsu.ru,

***Gabrusenko K.A.* On origins of theory of infinite set in Bernard Bolzano's writings**

The article deals with the understanding of infinite sets by B. Bolzano. Author reconstructs the conceptual system of Bolzano's theory of infinite, explains the scope of the theory, and the value of it's main notions for further development of theory of infinite set.

Keywords: infinite, set, set theory, Bolzano