

УДК 532.5

## РАСТЕКАНИЕ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИИ

О. В. Воинов

Институт механики многофазных систем СО РАН, 625000 Тюмень

Рассмотрена нестационарная нелинейная задача растекания капли вязкой жидкости по горизонтальной поверхности твердого тела под действием гравитации и капиллярных сил при малых числах Рейнольдса. Метод асимптотического сращивания применен к решению осесимметричной задачи растекания при значительном влиянии гравитации на динамику капли. Определена структура течения в капле на больших временах в окрестности автомодельного решения. Установлены диапазоны применимости квазиравновесной модели растекания капли с динамическим краевым углом и автомодельного решения. Найдено, что переход от одной модели течения к другой происходит при очень больших числах Бонда.

Теория растекания капли основана на модели неравновесного (динамического) краевого угла [1, 2] и учитывает возможную прекурсионную пленку [2–4], движущуюся впереди видимого края капли. Влияние гравитации на вязкое течение в капле рассматривалось [5] в квадратичном приближении по числу Бонда ( $B$ ), справедливом при  $B < 20$ . В настоящей статье, в отличие от [5], вязкое течение определяется для произвольных чисел Бонда. Применяемые теоретические модели динамики смачивания [1, 2] подтверждены данными многочисленных экспериментов [6–8] в отсутствие влияния гравитации.

**1. Основные уравнения.** Рассматриваем растекание капли вязкой жидкости на гладкой горизонтальной поверхности твердого тела. Для достаточно больших времен с начала растекания малы число Рейнольдса и капиллярное число ( $Ca$ ). При этом мал угол наклона границы раздела газ — жидкость ( $\alpha \ll 1$ ). В области достаточно больших толщин слоя  $h$  (предполагаем, что толщина капли в центре — макроскопическая величина) справедливо гидродинамическое описание.

Ползущее движение тонкого слоя на достаточном удалении от линии контакта  $L_0$  (для относительно больших толщин  $h$  слоя) с учетом капиллярных сил и силы тяжести описывается для случая горизонтальной поверхности уравнением в координатах на этой поверхности:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{3\mu} \operatorname{div}\{h^3 \operatorname{grad}(\sigma \Delta h - \rho gh)\}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\mu$  и  $\sigma$  — коэффициенты динамической вязкости и поверхностного натяжения. В малой окрестности линии контакта трех фаз справедлива асимптотика угла наклона границы раздела [1, 2]

$$\alpha^3 = 9Ca (s - (1/3) \ln s + (\ln s - 4)/(9s) + \dots), \quad \alpha = |\nabla h|, \quad Ca = \mu v / \sigma, \quad (1.2)$$

$$s = \ln(h/h'_m) + C, \quad |s| \gg 1, \quad |Ca| \ll 1$$

( $v$  — скорость линии контакта). Параметр  $h'_m$  соответствует минимальной характерной толщине, до которой справедлива асимптотика. Способ определения постоянной асимптотики ( $C - \ln h'_m$ ) указан в [1, 2, 5]. В связи с рассматриваемым далее неограниченным растеканием капли наиболее интересен случай нулевого статического краевого угла смачивания. Для случая полного смачивания постоянная  $C = 0$ , и, если имеется прекурсионная смачивающая пленка, движущаяся под действием сил Ван-дер-Ваальса, минимальный масштаб в (1.2) равен максимальной толщине этой пленки [2]:

$$h'_m = 1,085(3Ca)^{-1/3}(A'/(2\pi\sigma))^{1/2}. \quad (1.3)$$

Коэффициент 1,085 найден из численного расчета соответствующей краевой задачи [2]. В случае недостаточно малых капиллярных чисел или углов  $\alpha$  (их малости по сравнению с единицей, вообще говоря, недостаточно) формально рассчитанное по (1.3) значение  $h'_m$  не превышает размера молекулы и прекурсионной пленки не существует [2, 4]. При этом  $h'_m$  имеет порядок размера молекулы [1].

Для задачи динамики пленки, рассматриваемой на достаточном удалении от линии контакта трех фаз (внешней задачи), условие на линии контакта  $L_0$  (для точек которой внешнее решение  $h(x_0) = 0$ ) удобно записать в асимптотической форме [5]:

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= \alpha_{(0)}^3(h_0) + 9Ca \left(1 - \frac{1}{3s_0}\right) \ln \left(\frac{h}{h_0}\right) + \dots, & x \rightarrow x_0, \\ s_0 &= \ln \left(\frac{h_0}{h'_m}\right) + C, & \ln \left(\frac{h_0}{h}\right) \ll s_0, \quad s_0 \gg 1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Параметр  $h_0$  — характерная толщина слоя для внешней задачи. Он может определяться различным образом. Отметим, что величина  $s_0$  не должна сильно отличаться от характерного (максимального) значения  $s$  в переходной области между внутренней и внешней областями, которое ограничивает сверху область значений  $s$ , где применимы (1.2) и (1.4). Это условие используется далее для уточнения границ применимости асимптотического решения внешней задачи при растекании капли.

**2. Динамика тяжелой капли при больших числах Бонда.** Запишем в осесимметричном случае (1.1) вместе с условиями регулярности на оси симметрии и убывания решения на линии контакта:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h^3}{3\mu} r \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho gh - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right), \\ \frac{\partial h}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \Delta h = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \quad \frac{h}{h_0} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow r_0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $r$  — расстояние от оси симметрии;  $r_0$  — неизвестная координата внешней линии контакта (видимого края капли). Соотношения (1.4), (2.1) вместе с начальными условиями определяют динамику капли. Далее ищем асимптотику решения для достаточно больших времен с момента начала растекания капли, когда среди начальных условий существенным является только один параметр — объем  $V$  капли.

Известно приближенное решение задачи о течении капли для случая, когда в центральной области капли влияние вязких сил на форму капли относительно мало и она определяется в главном приближении по малому  $Ca$  балансом гравитации и капиллярных сил из уравнения статики. Квазистатическая в центральной области капля образует динамический краевой угол с твердой поверхностью. На рис. 1 изображены статическая форма капли при  $B = 100$  (сплошная кривая) и параболический профиль при  $B = 0$  (штриховая). В рамках асимптотической модели в [5] найдено внешнее решение, близкое к квазистатическому, с учетом слагаемых вида  $CaB$  и  $CaB^2$  в выражении для толщины слоя  $h$ .

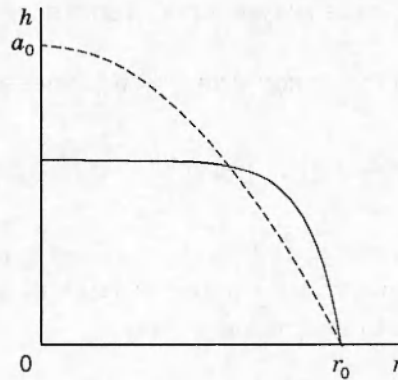


Рис. 1

В отличие от [5] ищем решение с учетом слагаемых порядка  $Ca$  для произвольных чисел Бонда  $B$  [9], чтобы расширить диапазон применимости решения.

Решение внешней задачи для (2.1) ищем в виде

$$h = h_{(0)}(r, t) + h_{(1)}(r, t) + \dots, \quad h_{(1)} = Ca f_1(r, t), \quad |h_{(1)}| \ll h_{(0)}, \quad Ca = \frac{\mu v}{\sigma}, \quad v = \frac{dr_0}{dt}, \quad (2.2)$$

причем  $h_{(0)}$  и  $f_1$  зависят от времени только параметрически и не зависят от скорости (от числа  $Ca$ ),  $h_{(1)}$  в линейном приближении учитывает влияние вязкого течения на форму капли. Подстановка (2.2) в (2.1) и пренебрежение малыми  $Ca^2$  позволяют найти

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \xi \frac{\partial h_{(0)}}{\partial \xi} - \frac{B}{4} \frac{\partial h_{(0)}}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = \frac{r^2}{r_0^2}; \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \xi \frac{\partial h_{(1)}}{\partial \xi} - \frac{B}{4} \frac{\partial h_{(1)}}{\partial \xi} = -F(\xi, t) = -\frac{1}{\xi} \frac{3}{16} \frac{\mu r_0^4}{\sigma h_{(0)}^3} \int_0^\xi \frac{\partial' h_{(0)}}{\partial t} d\xi. \quad (2.4)$$

Здесь  $\partial'/\partial t$  — производная функции от  $r, t$ ;  $B = \rho g r_0^2 / \sigma$ .

На краю капли толщина равна нулю:

$$h_{(0)} = 0, \quad h_{(1)} = 0, \quad \xi = 1. \quad (2.5)$$

Условие регулярности решения в центре требует ограниченности  $\partial h_{(0)}/\partial \xi, \partial h_{(1)}/\partial \xi$  при  $\xi = 0$ .

Принимаем, что объем капли  $V$  определяется невозмущенным решением  $h_{(0)}$ :

$$V = \pi r_0^2 \int_0^1 h_{(0)} d\xi = \frac{\pi}{2} r_0^2 a_0, \quad \int_0^1 h_{(1)} d\xi = 0. \quad (2.6)$$

Решение уравнения (2.3) с условием (2.5) выразим через модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого порядка  $I_0(x)$  [5]:

$$h_{(0)} = \frac{a_0 \Omega}{2} [I_0(\sqrt{B}) - I_0(\sqrt{\xi B})], \quad \Omega^{-1} = I_0(\sqrt{B}) - \int_0^1 I_0(\sqrt{\xi B}) d\xi, \quad B = \rho g r_0^2 / \sigma. \quad (2.7)$$

При помощи (2.6), (2.7) и определения  $B$  находим правую часть (2.4):

$$F = \frac{3}{8} Ca \frac{\alpha_0 r_0^2}{\xi a_0 h_{(0)}^3} \int_0^\xi \left( \frac{a_0}{2} - h_{(0)} \right) d\xi, \quad \alpha_0 = -\frac{\partial h}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{\Omega}{2} \sqrt{B} I_0'(\sqrt{B}) \frac{a_0}{r_0}. \quad (2.8)$$

Здесь  $\alpha_0$  — краевой угол капли, не возмущенной вязким течением ( $h = h_{(0)}$ );  $I'_0$  — производная от функции Бесселя.

Интегрируя (2.4), найдем регулярное при  $\xi = 0$  решение

$$-\frac{\partial h_{(1)}}{\partial \xi} = y_{(0)} \left[ D + \int_0^\xi \frac{1}{\xi_2^2 y_{(0)}^2(\xi_2)} d\xi_2 \int_0^{\xi_2} \xi_1 y_{(0)}(\xi_1) F(\xi_1) d\xi_1 \right], \quad y_{(0)} = -\frac{\partial h_{(0)}}{\partial \xi}, \quad D = \text{const.} \quad (2.9)$$

Время  $t$  входит в  $F(\xi)$  и правую часть (2.9) как параметр, от которого зависят  $\text{Ca}$ ,  $a_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $h_{(0)}$ ,  $y_{(0)}$ . Для краткости зависимость от  $t$  в явном виде не записываем.

Условие (2.6) для  $h_{(1)}$  легко приводится к виду

$$\int_0^1 \xi \frac{\partial h_{(1)}}{\partial \xi} d\xi = 0. \quad (2.10)$$

Исключая  $D$  из (2.9) с помощью (2.10), после подстановки (2.8) и ряда преобразований, включающих интегрирование по частям, получим

$$\frac{\partial h_{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial h_{(0)}}{\partial \xi} \text{Ca} \frac{3\alpha_0 r_0^4}{8a_0^2} \int_0^\xi \left[ \frac{1}{a_0} \int_0^\zeta y_{(0)}(\xi_1) \xi_1 d\xi_1 \right] \frac{W_2(\zeta)}{\zeta^2 y_{(0)}^2(\zeta)} d\zeta; \quad (2.11)$$

$$W_2(\xi) = \frac{1}{Y^2} \int_0^\xi \left( \frac{1}{2} - Y \right) d\xi - \int_0^\xi \frac{1}{Y^2} \left( \frac{1}{2} - Y \right) d\xi, \quad Y = \frac{h_{(0)}}{a_0}. \quad (2.12)$$

Рассмотрим решение вблизи края капли. Устремляя  $\xi \rightarrow 1$  ( $r \rightarrow r_0$ ) и учитывая, что  $h = (1 - \xi)\alpha_0 r_0/2 + \dots$ , преобразуем (2.11) к виду

$$\alpha = -\frac{dh}{d\xi} \frac{2}{r_0} \sqrt{\xi} = \alpha_0 \left[ 1 - \frac{3\text{Ca}}{\alpha_0^2} \left( \ln \left( \frac{a_0}{h} \right) - C_1 \right) \right] + \dots,$$

$$C_1 = -\ln k + \int_0^1 \left[ k^2 W_1 W_2 + \frac{1}{1 - \xi} \right] \frac{W_2(\xi)}{\xi^2 y_{(0)}^2} d\xi, \quad k = \frac{r_0 \alpha_0}{2a_0} = \frac{1}{4} \sqrt{B} I'_0(\sqrt{B}) \Omega(B), \quad (2.13)$$

$$W_1 = \frac{2}{\xi} \left( -\xi Y + \int_0^\xi Y d\xi \right) \left[ \frac{I'_0(\sqrt{B})}{I'_0(\sqrt{\xi B})} \right]^2.$$

При переходе от (2.11) к (2.13) выделена расходящаяся при  $\xi \rightarrow 1$  часть интеграла (2.11). Угол  $\alpha_0$  в (2.13) в соответствии с (2.7) и (2.8) есть известная функция числа Бонда  $\alpha_0(B)$ . Формулы (2.12), (2.13) вместе с (2.7) завершают решение внешней задачи. Привлекая асимптотическое условие (1.4), найдем

$$\alpha_0 = \alpha_{(0)}(h_0), \quad h_0 = a_0 \exp(-C_1), \quad (2.14)$$

где  $\alpha_{(0)}(h_0)$  — асимптотика (1.2), записанная с точностью  $s_0^{-2}$ . Отсюда для полностью смачиваемой поверхности следует  $\alpha_0^3(B) = 9\text{Ca}(s_0 - (1/3) \ln s_0)$ ,  $s_0 = \ln(h_0/h'_m)$ . Соответствующее уравнение изменения радиуса  $r_0$  основания капли запишется в виде

$$\frac{\mu}{\sigma} \frac{dr_0}{dt} = \frac{\alpha_0^3(B)}{9 \ln(h_0/h'_m) - 3 \ln \ln(h_0/h'_m)}, \quad a_0 = \frac{2V}{\pi r_0^2}, \quad B = \frac{\rho g r_0^2}{\sigma};$$

функция  $\alpha_0(B)$  определена (2.8),  $h_0$  известно из (2.14),  $C_1 = C_1(B)$ . Выражая  $r_0$  через  $\alpha_0$ , можно записать уравнение для  $\alpha_0$ . Интегрирование этого уравнения не представляет затруднений и дает  $r_0(t)$  и  $\alpha_0(t)$ .

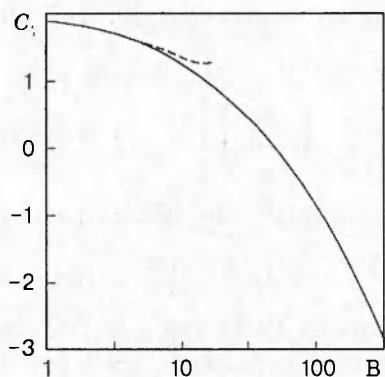


Рис. 2

Когда гравитация несущественна ( $B = 0$ ) и капля в центральной области близка к сферическому сегменту, формулы (2.13) дают  $C_1 = 2$ . В [5] найдены поправки в (2.13) порядка  $B^2$ . Формула (4.12) в [5], аналогичная (2.13), имеет вид

$$\alpha^3 = \alpha_0^3(B) + 9Ca \left[ 2 + \ln(1 - \xi) - \frac{5}{4} \frac{B}{24} + \frac{7}{5} \left( \frac{B}{24} \right)^2 + \dots \right],$$

откуда для постоянной (2.13) следует

$$C_1 = 2 - \frac{5}{4} \frac{B}{24} + \frac{7}{6} \left( \frac{B}{24} \right)^2 - \ln k + \dots \quad (2.15)$$

Результаты расчета  $C_1(B)$  представлены на рис. 2 (сплошная кривая соответствует (2.13), штриховая — (2.15)). В области умеренных значений числа Бонда ( $B < 20$ ) (2.13) и (2.15) согласуются. Для больших значений ( $B \gg 20$ ) расчет по (2.13) дает отрицательные значения  $C_1 < 0$ . Возрастание  $h_0$  по (2.14) из-за монотонного убывания  $C_1$  отражает увеличение роли вязкой диссипации энергии во внешней области течения относительно основной диссипации вблизи линии контакта трех фаз.

Оценим числа Бонда, до которых справедливы полученное решение и квазиравновесная модель. Учитывая (2.14) и замечание к (1.3), условие применимости теории можно записать в виде  $|C_1| \ll s_0 + C_1 = \ln(a_0/h_m)$ . В опытах с макроскопическими каплями обычно  $\ln(a_0/h_m) \sim 10$  [1, 6–8]. Если для оценок взять границу применимости  $|C_1| \sim 0,3 \ln(a_0/h_m)$ , то модель можно использовать до  $C_1 \sim -3$ , чему соответствует критическое число  $B_*$  порядка 300. Характерное критическое число относительно слабо зависит от размера капли и не может превысить 500. Диапазон применимости по числу  $B$  рассматриваемой модели заметно меньше для мелких капель с высотой в центре порядка  $10^{-3}$  см.

Возможность применения квазиравновесной модели течения капли до чисел Бонда порядка нескольких сотен не противоречит оценке [5] потери ее применимости в области  $B > 24$  и повышает ее ценность для описания процесса растекания тяжелой капли. Чтобы убедиться в правильности оценок, имеет смысл рассмотреть предельный случай  $B \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ), когда капиллярные силы дают второстепенный вклад в растекание капли по сравнению с гравитацией.

**3. Растекание капли под действием гравитационных сил, близкое к авто-модельному.** При достаточно большом радиусе капли  $r_0$  влияние капиллярных сил на течение в центральной ее области должно быть пренебрежимо мало. Интересно найти влияние капиллярных сил на структуру течения при  $B \rightarrow \infty$  и определить границу по числу  $B$ , выше которой может реализоваться соответствующее предельное решение.

Уравнение (2.1) в отсутствие капиллярных сил ( $\sigma = 0$ ) имеет автомодельное решение вида [10]

$$h = \frac{1}{t_1^{1/4}} f\left(\frac{r}{t_1^{1/8}}\right), \quad t_1 = \frac{\rho g}{3\mu} t. \quad (3.1)$$

Решение  $h(r, t)$  локализовано в конечной области  $r < r_0$ :

$$h = (f_0/t_1^{1/4})(1 - r^2/r_0^2)^{1/3}, \quad r_0 = (4/\sqrt{3}) f_0^{3/2} t_1^{1/8}, \quad (3\pi/4) h(0, t_1) r_0^2 = V, \quad 4\pi f_0^4 = V. \quad (3.2)$$

Будем искать решение уравнения (2.1) при  $t \rightarrow \infty$ , близкое к точному решению (3.1), (3.2) в области с исключенной малой окрестностью края капли ( $r = r_0$ ). В малой окрестности края решение квазистационарное, зависящее от переменной  $r - r_0(t)$ . Решение (3.2) можно переписать в виде

$$h = \left(\frac{9\mu v}{\rho g}\right)^{1/3} \left(\frac{r_0^2 - r^2}{2r_0}\right)^{1/3}, \quad v = \frac{dr_0}{dt},$$

откуда для малой окрестности края капли следует квазистационарная зависимость

$$r \rightarrow r_0, \quad h = \left(\frac{9\mu v}{\rho g}\right)^{1/3} (r_0 - r)^{1/3}, \quad v = \frac{dr_0}{dt}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим (3.3) как условие на границе малой окрестности  $r = r_0$ , внутри которой динамика пленки описывается полным уравнением (2.1) ( $\sigma \neq 0$ ). В этой окрестности решение вида  $h(r - r_0, t)$  удовлетворяет квазистационарному уравнению

$$-v \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{h^3}{3\mu} r \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho g h - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right). \quad (3.4)$$

Оставляя в (3.4) при  $r \sim r_0$  главные слагаемые, соответствующие приближению плоской задачи, оправданному при  $r_0 - r \ll r$ , найдем

$$\frac{\partial^3 h}{\partial r^3} - \frac{\rho g}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{3Ca}{h^2}. \quad (3.5)$$

Введем масштабы вдоль осей  $h$  и  $r$

$$H = L(3Ca)^{1/3}, \quad L = (\sigma/(\rho g))^{1/2} \quad (3.6)$$

и перепишем (3.5) в безразмерном виде

$$\frac{\partial^3 y}{\partial \zeta^3} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \frac{1}{y^2}, \quad y = \frac{h}{H}, \quad \zeta = \frac{r - r_0}{L}. \quad (3.7)$$

Согласно (3.3) решение уравнения (3.7) должно удовлетворять условию

$$y = 3^{1/3} (-\zeta)^{1/3} + \dots \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow -\infty, \quad (3.8)$$

которое оправданно при больших числах В.

Для относительно малых значений  $y$  слагаемое  $-\partial y/\partial \zeta$  в (3.7) несущественно и приближенным решением является асимптотика (1.2), из которой в главном приближении следует

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = -(3)^{1/3} (\ln(y/y_m))^{1/3}, \quad y_m = h'_m/H, \quad y \ll 1, \quad \ln(y/y_m) \gg 1. \quad (3.9)$$

Обозначим через  $y_+$  характерное значение  $y$ , при котором происходит переход от решения (3.8) к решению (3.9). Учитывая, что  $\ln(y_+/y_m) \gg 1$  (это соответствует условию

справедливости (3.9)), переход от (3.9) к (3.8) можно приближенно описать, пренебрегая правой частью (3.7), при помощи уравнения равновесия с граничными условиями

$$y''' - y' = 0; \quad y = 0, \quad \zeta = \zeta_+; \quad \bar{y} \rightarrow y_+, \quad \zeta \rightarrow -\infty. \quad (3.10)$$

Здесь  $\zeta_+$  — неизвестная величина. Решение (3.10)

$$y = y_+(1 - \exp(\zeta - \zeta_+)), \quad \zeta < \zeta_+ \quad (3.11)$$

описывает полубесконечную пленку с постоянной толщиной  $y_+$  вдали от  $\zeta = \zeta_+$ . Формула (3.11) верна при ограничении  $y_+^3 \exp(\zeta - \zeta_+) \gg (1 - \exp(\zeta - \zeta_+))^{-2}$ , при котором  $|y'| \gg y^{-2}$  и справедливо (3.10). Если  $y_+ \gg 1$ , то для  $\zeta - \zeta_+ \sim 0$  достаточно ограничения  $y^2 \gg 1/y_+$ , чтобы (3.11) было приближенным решением (3.7). Предполагая  $y_+ \gg 1$ , вычислим при  $\zeta \rightarrow \zeta_+$  из (3.11)  $\bar{y}' = -y_+$ . Приравнивая эту величину к приближенно постоянной величине (3.9) (производя сращивание углов наклона), найдем

$$y_+ = 3^{1/3}(\ln(y_+/y_m))^{1/3} \gg 1, \quad y_m = h'_m/H. \quad (3.12)$$

Это уравнение легко решается итерациями, так как  $\ln(1/y_m) \gg 1$ .

Для сращивания (3.11) с (3.8) рассмотрим (3.11) как решение в пограничном слое для уравнения (3.7). Действительно, если в (3.8)  $y \rightarrow \infty$ , то масштаб  $\zeta$ , на котором изменяется  $y$  в (3.8), также неограниченно растет ( $dy/d\zeta \rightarrow 0, y \rightarrow \infty$ ). Поэтому при  $y = y_+ \gg 1$  (3.8) можно рассматривать как внешнее решение (большого масштаба по сравнению с масштабом (3.11)), а (3.11) — как погранслоное решение. Из (3.8) и (3.12) найдем

$$|\zeta_+| = (1/3)y_+^3 = \ln(y_+/y_m). \quad (3.13)$$

Согласно (3.6)–(3.8), (3.13) автомодельное решение (3.1), (3.2) неприменимо в следующей малой окрестности линии смачивания:

$$r_0 - r < L_*, \quad L_* = L|\zeta_+| = (\sigma/(\rho g))^{1/2} \ln(y_+/y_m), \quad (3.14)$$

причем при  $r = r_0 - L_*$  автомодельный профиль толщины (3.2) резко обрывается до нуля при критической толщине (рис. 3)

$$h_+ = (\sigma/(\rho g))^{1/2} (9Ca)^{1/3} \ln(h_+/h'_m)^{1/3} = \alpha_0(\sigma/(\rho g))^{1/2}. \quad (3.15)$$

На рис. 3 профиль капли приближенно описывается при  $h > h_+$  сплошной кривой, соответствующей (3.2), при  $h < h_+$  — штриховой. Значение  $r_0$  приближенно соответствует второй формуле (3.2).

Величина  $\alpha_0$  — динамический краевой угол квазиравновесного участка пленки (3.11), на котором происходит обрыв профиля (3.2). Квазиравновесный участок профиля пленки

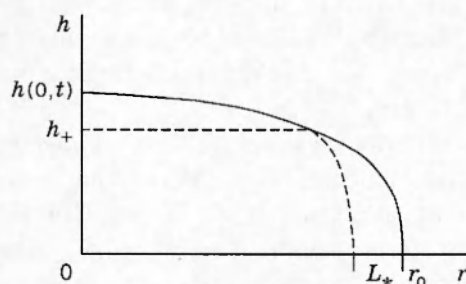


Рис. 3

расположен между двумя областями, в которых важно влияние динамики пленки. Полученные формулы описывают эффект усечения автомодельного профиля на краю капли под действием капиллярных сил. Расстояние усечения  $L_*$  слабо зависит от времени. Толщина усечения, отнесенная к толщине в центре, убывает как радиус капли в степени  $-1/3$ .

Эффект капиллярного усечения автомодельного профиля (3.2) позволяет оценить условия выхода на это решение при  $t \rightarrow \infty$ . Очевидно, решение справедливо только тогда, когда длина  $L_*$  усеченного участка профиля по (3.14) мала по сравнению с радиусом капли:

$$r_0 \gg L_* \quad \text{или} \quad B^{1/2} \gg \ln(h_+/h'_m). \quad (3.16)$$

Заметим, что для достаточно крупных капель, для которых важно влияние гравитации, и условий земных экспериментов величина  $\ln(h_+/h'_m)$  порядка  $8 \div 10$ .

С учетом большого значения  $\ln(h_+/h'_m)$  из (3.16) следует, что капиллярные силы оказывают сильное влияние на структуру течения в капле, растекающейся под преимущественным действием гравитации. Вследствие эффекта капиллярного усечения гравитационно-вязкого профиля капли в окрестности линии смачивания ( $h = 0$ ) решение (3.2) справедливо только для очень больших значений числа Бонда  $B \gg 100$  (реально для  $B > 1000$ ). Это согласуется с результатами п. 2 и важно для понимания вывода о применимости квазиравновесной (или уточненной) модели растекания капли до чисел Бонда порядка сотен. Для мелких капель (с толщиной в центре менее 0,001 см) значения  $\ln(h_+/h'_m)$  могут быть заметно меньше 10, и, следовательно, модель течения, определяемого динамическим краевым углом, справедлива до меньших значений числа  $B$ .

Для случая  $\rho$  и  $\sigma$ , как у воды, условие  $B \gg 100$  эквивалентно  $2r_0 \gg 6$  см. Диаметр основания капли должен составлять десятки сантиметров, чтобы течение в ней описывалось автомодельным решением (3.2).

Если в эксперименте радиус основания капли имеет порядок 1 см, то решение (3.2) неприменимо для его описания. В работе [10] автомодельное решение (3.2) привлекалось для интерпретации опытов с относительно мелкими каплями ( $r_0 < 1$  см). Из изложенного выше следует, что все эксперименты, обсуждаемые в [10], относятся к случаю справедливости модели квазистатической (в центральной области) капли с динамическим краевым углом [1, 2].

Течение в достаточно крупной капле состоит из большого числа характерных областей, в которых проявляются различные силы. Асимптотическое описание этих областей в тонкой капле (пленке) возможно благодаря большому параметру  $s_0$  (1.4). Значение  $h'_m$  в (3.9), (3.15) может определяться силами Ван-дер-Ваальса по (1.3) (максимальная толщина прекурсионной пленки). При этом для  $h > h'_m$  важны капиллярные силы, а в области малых толщин  $h \ll h'_m$  пленка движется под действием сил Ван-дер-Ваальса, причем течение может быть существенно нестационарным (соответствующая математическая модель дана в [11]).

**Заключение.** 1. Найдено решение задачи растекания капли во втором приближении по малому капиллярному числу  $Ca$  для произвольных чисел Бонда. Решение описывает режим растекания, определяемый динамическим краевым углом, когда вязкое течение играет основную роль вблизи края капли. Решение справедливо для чисел Бонда  $B < 300$  (до диаметров капли порядка 10 см).

2. Определена структура течения на больших временах, когда решение близко к автомодельному. Капиллярные силы существенно влияют на течение и форму макроскопической капли вплоть до чисел Бонда порядка  $10^3$  и более. Происходит капиллярное усечение автомодельного профиля капли на ее краю. Важно, что оценки радиусов капли (десятки сантиметров), при которых решение на больших временах приближается к автомодельному, согласуются с оценками радиусов, до которых работает квазиравновесная модель капли с динамическим краевым углом.



## ЛИТЕРАТУРА

1. **Воинов О. В.** Гидродинамика смачивания // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 5. С. 76–84.
2. **Воинов О. В.** Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // ПМТФ. 1977. № 2. С. 92–99.
3. **Huh C., Scriven L. E.** Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line // J. Colloid Interface Sci. 1971. V. 35. P. 85–101.
4. **Де Жен П. Ж.** Смачивание: статика и динамика // Успехи физ. наук. 1987. Т. 151, вып. 4. С. 619–681.
5. **Воинов О. В.** О растекании капли вязкой жидкости по поверхности под действием капиллярных сил // Прикл. математика и механика. 1995. № 5. С. 767–775.
6. **Ogarev V. A., Timonina T. N., Arslanov V. V., Trapetsnikov A. A.** Spreading of polydimethylsiloxane drops on solid horizontal surfaces // J. Adhesion. 1974. V. 6. P. 337–355.
7. **Welygan D. G., Burns Ch. M.** Spreading of viscous, well-wetting liquids on plane surfaces // J. Adhesion. 1979. V. 10. P. 123–138.
8. **Lelah M. D., Marmur A.** Spreading kinetics of drops on glass // J. Colloid Interface Sci. 1981. V. 82. P. 518–525.
9. **Воинов О. В.** О растекании капли вязкой жидкости по горизонтальной поверхности. Тюмень, 1995. Деп. в ВИНТИ 28.12.95, № 3495-В95.
10. **Lopez J., Miller C. A., Ruckenstein E.** Spreading kinetics of liquid drops on solids // J. Colloid Interface Sci. 1976. V. 56. P. 460–468.
11. **Воинов О. В.** Динамическая теория смачивания твердого тела вязкой жидкостью под действием сил Ван-дер-Ваальса // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 69–85.

*Поступила в редакцию 16/XII 1996 г.*

---