

4. Угодчиков А. Г. Определение напряжений при запрессовке круглых шайб в пластинку, ограниченную кривой частного вида // ДАН СССР.— 1951.— Т. 77, № 2.
5. Перлин П. И., Толченова Л. Ф. Контейнеры для плоских слитков // Тр. ВНИИметмаш.— 1960.— № 1.
6. Колесов В. С., Смирнов Л. Г. Температурные напряжения в полуплоскости с произвольным включением // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1982.— Вып. 2.

г. Подольск

Поступила 24/V 1989 г.

УДК 539.3

А. О. Ватульян, А. Я. Кацевич

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ОРТОТРОПНОГО СЛОЯ С ПОЛОСТЬЮ

В настоящее время в связи с развитием методов вибротомографии, дефектометрии чрезвычайно актуальными стали проблемы расчета волновых полей в упругой среде с полостями, трещинами, включениями. Отметим, что некоторые испытываемые материалы являются анизотропными (стали аустенитного класса, композиты, грунты), что требует соответствующей математической модели, учитывающей анизотропию механических свойств.

1. Исследуются установившиеся антиплоские волны в ортотропном упругом слое толщины h с цилиндрической полостью, направляющая которой — гладкая замкнутая кривая l_0 . Считаем, что колебания в слое возбуждаются касательной нагрузкой $p(x_1)$, приложенной к границе $x_3 = h$ слоя. Оси упругой симметрии совпадают с осями координат, из компонент вектора перемещений отлична от нуля компонента $u_2 = u(x_1, x_3) \times \exp(-i\omega t)$, а из компонент тензора напряжений — $\sigma_{12} = c_{66}u_{,1}$, $\sigma_{23} = c_{44}u_{,3}$. Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} c_{66}u_{,11} + c_{44}u_{,33} + \rho\omega^2u &= 0, \\ x_3 = h, c_{44}u_{,3} = p(x_1), x_3 = 0, u &= 0, \\ (x_1, x_3) \in l_0, c_{66}u_{,1}n_1 + c_{44}u_{,3}n_3 &= 0 \end{aligned}$$

(n_1, n_3 — компоненты единичного вектора нормали к кривой l_0 , внешнего по отношению к области, занятой упругой средой). Замыкают постановку задачи условия излучения, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения.

Введем в рассмотрение вспомогательную краевую задачу относительно функции $U(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3)$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} c_{66}U_{,11} + c_{44}U_{,33} + \rho\omega^2U &= -\delta(x_1 - \xi_1, x_3 - \xi_3), \\ x_3 = h, U_{,3} = 0, x_3 = 0, U &= 0. \end{aligned}$$

Решение задачи (1.2) строится при помощи интегрального преобразования Фурье в рамках принципа предельного поглощения:

$$(1.3) \quad U(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) = \frac{1}{4\pi c_{44}} \int_{\sigma} \exp(i\alpha_1(\xi_1 - x_1)) \lambda^{-1} \left[\exp(-\lambda|\xi_3 - x_3|) - \exp(-\lambda\xi_3) \operatorname{ch} \lambda x_3 + \frac{\operatorname{sh} \lambda x_3}{\operatorname{ch} \lambda h} \langle \exp(\lambda(\xi_3 - h)) + \operatorname{sh} \lambda h \exp(-\lambda\xi_3) \rangle \right] d\alpha_1,$$

где $\lambda = (\nu\alpha_1^2 - k^2)^{1/2}$; $\nu = c_{66}/c_{44}$; $k^2 = \rho\omega^2/c_{44}$; контур σ выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения и огибает положительные полюса и точки ветвления подынтегральной функции снизу, а отрицательные — сверху [1]. Используя теорему взаимности [2], трудно получить представление поля перемещений в среде

$$(1.4) \quad u(\xi_1, \xi_3) = \int_{R_1} p(x_1) U(x_1, h, \xi_1, \xi_3) dx_1 - \\ - \int_{l_0} \left[c_{66} n_1 \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) + c_{44} n_3 \frac{\partial U}{\partial x_3}(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3) \right] u(x_1, x_3) dl_x.$$

Если определить $u(x_1, x_3)$ при $(x_1, x_3) \in l_0$, то (1.4) позволит находить перемещение всюду внутри области, занятой упругой средой.

На основе (1.4) можно сформулировать граничное интегральное уравнение по границе области l_0 , поскольку граничные условия при $x_3 = 0$, h выполнены автоматически за счет специального выбора фундаментального решения $U(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3)$. Осуществив в (1.4) предельный переход $(\xi_1, \xi_3) \rightarrow (y_1, y_3) \in l_0$. Введем локальную систему координат в (y_1, y_3) , проведем окружность l_ε радиусом $\varepsilon > 0$ и найдем интеграл по ее части, лежащей внутри исходной упругой области. Вычисляя встречающиеся при этом интегралы и учитывая, что основной вклад в предельное значение дает первое слагаемое в (1.3), в пределе получим граничное интегральное уравнение

$$(1.5) \quad \frac{1}{2} u(y_1, y_3) = \int_{R_1} p(x_1) U(x_1, h, y_1, y_3) dx_1 - \\ - \int_{l_0} \left[c_{66} n_1 \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_3, y_1, y_3) + c_{44} n_3 \frac{\partial U}{\partial x_3}(x_1, x_3, y_1, y_3) \right] u(x_1, x_3) dl_x, (y_1, y_3) \in l_0,$$

причем интеграл по l_0 понимается в смысле главного значения по Коши.

2. Численная реализация сингулярного интегрального уравнения (1.5) проводится на основе метода граничных элементов (МГЭ). Различные варианты численной реализации уравнений типа (1.5) подробно изложены в [2, 3].

Используем простейший вариант МГЭ, считая, что гладкая граница разбита прямолинейными отрезками на N_1 элементов, в пределах которого $u(x_1, x_3)$ постоянно, а узлами являются середины соответствующих отрезков. Обозначим через (x_{1k}^-, x_{3k}^-) и (x_{1k}^+, x_{3k}^+) координаты начала и конца k -го элемента в соответствии с выбранной ориентацией. Тогда координаты узлов находятся в виде $y_{1k} = \frac{1}{2}(x_{1k}^- + x_{1k}^+)$, $y_{3k} = \frac{1}{2}(x_{3k}^- + x_{3k}^+)$. При $u_k = u(y_{1k}, y_{3k})$ уравнение (1.5) сводится к линейной алгебраической системе

$$(2.1) \quad \frac{1}{2} u_k = b_k - \sum_{m=1}^{N_1} H_{km} u_m, \quad k = 1, 2, \dots, N_1;$$

$$(2.2) \quad b_k = \int_{R_1} p(x_1) U(x_1, h, y_{1k}, y_{3k}) dx_1,$$

$$H_{km} = \int_{l_m} \left[c_{66} n_{1m} \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_3, y_{1k}, y_{3k}) + c_{44} n_{3m} \frac{\partial U}{\partial x_3}(x_1, x_3, y_{1k}, y_{3k}) \right] dl_x.$$

Отметим, что основную трудность составляет формирование матрицы системы, поскольку фундаментальное решение $U(x_1, x_3, \xi_1, \xi_3)$ не имеет явного представления и при вычислении H_{km} необходимо вычислять кратные интегралы. Поэтому (2.2) требует предварительного упрощения.

Введем на элементе l_m параметризацию

$$(2.3) \quad x_1 = y_{1m} + \beta_{1m} t, \quad \beta_{1m} = \frac{1}{2}(x_{1m}^+ - x_{1m}^-), \quad x_3 = y_{3m} + \beta_{3m} t, \\ \beta_{3m} = \frac{1}{2}(x_{3m}^+ - x_{3m}^-).$$

Вычисляя в (2.2) интегралы по t , получим выражение для коэффициентов линейной алгебраической системы в виде интегралов по контуру σ

$$(2.4) \quad H_{km} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \exp(i\alpha_1(y_{1k} - y_{1m})) \lambda^{-1} \{ \exp(-i\alpha_1\beta_{1m}t_*) (g(t_{km}^-, \alpha_1) - g(t_{km}^+, \alpha_1)) + \exp(-i\alpha_1\beta_{1m} - \lambda|t_{km}^+|) g(t_{km}^+, \alpha_1) - \exp(i\alpha_1\beta_{1m} - \lambda|t_{km}^-|) g(t_{km}^-, \alpha_1) + 2 \exp(\lambda(y_{3m} - h)) \frac{\operatorname{sh} \lambda y_{3k} \operatorname{sh} (\lambda\beta_{3m} - i\alpha_1\beta_{1m})}{\operatorname{ch} \lambda h} g(1, \alpha_1) + 2 \exp(-\lambda y_{3m}) \frac{\operatorname{ch} \lambda (h - y_{3k}) \operatorname{sh} (\lambda\beta_{3m} + i\alpha_1\beta_{1m})}{\operatorname{ch} \lambda h} g(1, \alpha_1) \} d\alpha_1,$$

$$g(t, \alpha_1) = \frac{\lambda \operatorname{sgn} t\beta_{1m} + i\alpha_1\nu\beta_{3m}}{\lambda \operatorname{sgn} t\beta_{3m} - i\alpha_1\beta_{1m}}, \quad t_* = \frac{y_{3k} - y_{3m}}{\beta_{3m}}, \quad t_{km}^{\pm} = y_{3k} - y_{3m} \mp \beta_{3m}.$$

Интегралы в (2.3) по контуру σ в комплексной плоскости вычисляются по квадратурным формулам Гаусса. На основе расчетов по (1.5) построено волновое поле на поверхности слоя

$$(2.5) \quad u(\xi_1, h) = -TU(0, h, \xi_1, h) - \sum_{m=1}^{N_1} F_m(\xi_1) u_m$$

$$\left(F_m(\xi_1) = \int_{l_m} \left[c_{66} n_{1m} \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_3, \xi_1, h) + c_{44} n_{3m} \frac{\partial U}{\partial x_3}(x_1, x_3, \xi_1, h) \right] dl_x \right)$$

при действии сосредоточенной нагрузки $p(x_1) = -T\delta(x_1)$ в начале координат.

При расчетах принято, что полость l_0 есть эллипс с центром в середине слоя $(0, h/2)$, полуоси его a_1 и a_3 параллельны координатным осям, а число граничных элементов — 8 и 16, упругие постоянные (в Н/м²) $c_{44} = 7,93 \cdot 10^{10}$, $c_{66} = 5,05 \cdot 10^{10}$, $T = 10^7$. Рассчитано перемещение поверхности слоя по (2.5) в ближней зоне для различных значений безразмерного параметра $\kappa = \omega h (\rho/c_{44})^{1/2}$, отвечающего за число распространяющихся мод в слое. Отметим, что частоты запертия для сплошного волновода [1] $\kappa_n = \pi(n - 1/2)$, $n = 1, 2, \dots$

На рисунке сплошной линией изображено $\operatorname{Re} u(\xi_1, h)$, штриховой — $\operatorname{Im} u(\xi_1, h)$ для следующих значений параметров: $a_1/h = 0,1$, $a_3/h = 0,2$, причем цифре 1 отвечает $\kappa^2 = 2$, а 2 — $\kappa^2 = 20$. При первом значении κ волновод заперт, смещения убывают экспоненциальным образом при удалении от источника колебаний и волновое поле локализовано в окрестности полости. Второе значение κ соответствует одной распространяющейся моде. Отметим, что в обоих случаях относительная погрешность расчета перемещений при переходе от $N_1 = 8$ к $N_1 = 16$ не превосходила 8 %.

На основе соотношений (1.5) и (2.5) может быть сформулирована обратная задача об определении параметров полости по волновому полю на поверхности слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. — М.: Наука, 1979.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. — М.: Мир, 1984.
3. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. — М.: Мир, 1987.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 15/XII 1988 г.,
в окончательном варианте — 20/VII 1989 г.

