

8. Кутателадзе С. С., Боришанский В. М. Справочник по теплопередаче.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1959.
9. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений.— М.: Физматгиз, 1962.
10. Гликман Л. А., Тэкт В. П. К вопросу о физической природе процесса усталости металла // Некоторые вопросы усталостной прочности стали.— М.; Л.: Машигиз, 1953.
11. Киялбаев Д. А., Чудновский А. И. О разрушении деформируемых тел // ПМТФ.— 1970.— № 3.
12. Ферми Э. Термодинамика.— Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973.

г. Новосибирск

Поступила 9/II 1987 г.,
в окончательном варианте — 10/X 1987 г.

УДК 539.3

И. П. Шацкий

РАСТЯЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ РАЗРЕЗ С ШАРНИРНО СОЕДИНЕННЫМИ КРОМКАМИ

Рассмотрим бесконечную изотропную пластину толщиной $2h$, содержащую прямолинейный сквозной разрез длиной $2l$ (рис. 1). Берега разреза $y = \pm 0$ соединены вдоль острых кромок шарнирами в одной из лицевых поверхностей $z = sh$ ($s = -1$ либо $s = +1$). Лицевые поверхности пластины и берега разреза свободны от внешней нагрузки. Исследуем влияние разреза на напряженное состояние пластины, вызванное равномерно распределенными на бесконечности усилиями $p = \text{const}$.

Поскольку система несимметрична относительно срединной плоскости пластины, следует ожидать появления местного изгиба в окрестности концентратора напряжений. Поэтому упругое равновесие пластины вне разреза помимо уравнения обобщенного плоского напряженного состояния

$$(1) \quad \Delta \Delta \phi = 0$$

опишем и уравнением изгиба пластин в рамках теории Кирхгофа

$$(2) \quad \Delta \Delta w = 0.$$

Здесь ϕ — функция Эри; w — прогиб пластины; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа.

Для мембранных усилий и изгибающих моментов на бесконечности потребуем выполнения условий

$$(3) \quad N_x = N_{xy} = 0, \quad N_y = p, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

Учитывая симметрию задачи относительно оси x , остановимся на вопросе о краевых условиях на разрезе.

В произвольном сечении $x = \text{const} \in (-l, l)$ (рис. 2) кроме раскрытия разреза $[v]$ в срединной поверхности пластины появляется и скачок угла поворота нормали $[\vartheta_y]$. Здесь $\vartheta_y = \partial w/\partial y$, $[f] = f(x, +0) - f(x, -0)$. Следуя гипотезам Кирхгофа о жестком нормальном элементе, из условий непрерывности упругих перемещений на соединенных кромках получаем зависимость

$$(4) \quad [v] - sh[\vartheta_y] = 0, \quad x \in (-l, l),$$

на концах разреза

$$(5) \quad [v](\pm l) = 0, \quad [\vartheta_y](\pm l) = 0.$$

Статическая схема контакта представлена на рис. 3. Незвестную реакцию шарнира R заменяем статически эквивалентной ей системой:

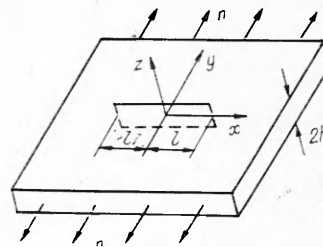


Рис. 1

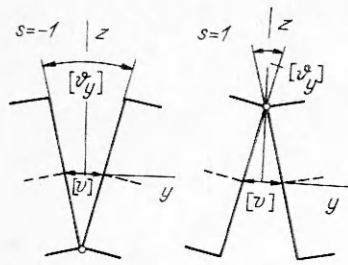


Рис. 2

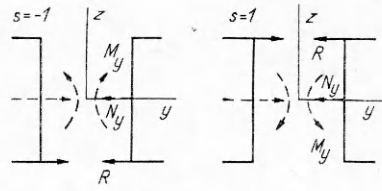


Рис. 3

мембранными усилиями $N_y = R$ и изгибающим моментом $M_y = shR$. Исключая R , приходим к условию

$$(6) \quad M_y - shN_y = 0, \quad y = 0, \quad x \in (-l, l).$$

Кроме того, на разрезе отсутствуют касательное и обобщенное перерезывающее усилия

$$(7) \quad N_{xy} = 0, \quad Q_y^* = 0, \quad y = 0, \quad x \in (-l, l).$$

Для построения решения задачи (1)–(7) воспользуемся методом интегральных уравнений. Общие решения уравнений (1), (2), удовлетворяющие условиям (3), (7), представим в виде [1]

$$(8) \quad \varphi(x, y) = \varphi^0(x, y) + \frac{B}{8\pi} \int_{-l}^l [v](\xi) \left(2 \ln r + 1 + 2 \frac{y^2}{r^2} \right) d\xi,$$

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \int_{-l}^l [\vartheta_y](\xi) \left(2(1 + \nu) \ln r + 1 + 3\nu + 2(1 - \nu) \frac{y^2}{r^2} \right) d\xi,$$

где $\varphi^0(x, y) = ny^2/2$ — функция напряжений в растягиваемой пластине без разреза; $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}$; $B = 2Eh$; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины.

Соответствующие выражения (8) интегральные представления нормальных усилий и моментов на линии разреза через производные от неизвестных функций скачка даются формулами

$$(9) \quad N_y(x, 0) = n + \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l [v]'(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x},$$

$$M_y(x, 0) = -\frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l [\vartheta_y]'(\xi) \frac{3 - 2\nu - \nu^2}{\xi - x} d\xi$$

($D = 2Eh^3/(3(1 - \nu^2))$ — цилиндрическая жесткость пластины).

Подставляя выражения (9) в краевое условие (6) и исключая посредством (4) функцию $[\vartheta_y]$, приходим к интегродифференциальному уравнению

$$(10) \quad \frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l [v]'(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} = -n, \quad x \in (-l, l) \quad (\kappa = 3(1 + \nu)/(3 + \nu)).$$

Решение уравнения (10), удовлетворяющее первому условию (5), общеизвестно: $[v] = (4n\kappa \sqrt{l^2 - x^2})/[B(1 + \kappa)]$. Скачок угла поворота определяется из (4): $[\vartheta_y] = (4snh \sqrt{l^2 - x^2})/[D(3 - 2\nu - \nu^2)(1 + \kappa)]$, а неизвестные реакции на разрезе — по формулам (9):

$$N_y(x, 0) = n/(1 + \kappa), \quad M_y(x, 0) = snh/(1 + \kappa), \quad x \in (-l, l).$$

По известным скачкам перемещений и угла поворота нормали на основе представлений (8) можно определить напряженно-деформированное состояние пластины во всей области.

Укажем на одно из возможных приложений полученных результатов. Описанная схема моделирует задачу растяжения пластины с разрезом, покрытой с одной стороны прочной гибкой пленкой, деформирующейся совместно с пластиной. Оценим влияние шарнирного соединения кромок разреза на несущую способность пластины, основываясь на энергетической концепции линейной механики разрушения.

Коэффициенты интенсивности усилий и моментов [2] в окрестности концов разреза подсчитываются по формулам

$$(11) \quad K_1 = -\frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow l} \sqrt{l^2 - x^2} [v]' = \frac{\kappa}{1 + \kappa} n \sqrt{l},$$

$$K_3 = (3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_y]' = -\frac{snh\sqrt{l}}{1 + \kappa}.$$

Выражение для потока энергии в вершину трещины при комбинированном растяжении и изгибе имеет вид [3] $G = \frac{\pi}{4h^3 E} \left\{ K_1^2 + \kappa \left(\frac{K_3}{h} \right)^2 \right\}$. Предполагая, что при подрастании трещины пленка и адгезионная связь остаются неразрушенными, на основании выражений (11) находим $G = \frac{\pi l n^2}{4h^3 E} \frac{\kappa}{1 + \kappa}$. Отметим, что при отсутствии пленки $K_1' = n \sqrt{l}$, $K_3' = 0$, $G' = \pi l n^2 / (4h^3 E)$.

Таким образом, нанесение гибкого подкрепления на одну из лицевых поверхностей растягиваемой пластины с трещиной в рамках рассмотренной постановки приводит к уменьшению потока энергии в $G'/G = (\kappa + 1)/\kappa$ раз и увеличению несущей способности пластины в $\sqrt{(\kappa + 1)/\kappa} \approx 1,33 - 1,41$ раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1981.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев: Наук. думка, 1976.
3. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами.— Киев: Наук. думка, 1985.

г. Ивано-Франковск

Поступила 13/V 1988 г.