

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробкин А. А. Фундаментальное решение задачи Коши — Пуассона для бассейна с неровным дном // ПМТФ.— 1990.— № 2.
2. Протопопов Б. Е., Стурова И. В. Генерация плоских поверхностных волн при наличии малой неровности дна // ПМТФ.— 1989.— № 1.
3. Федорюк М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.

г. Новосибирск

Поступила 22/VI 1988 г.,
в окончательном варианте — 20/1 1989 г.

УДК 532.5

А. В. Воеводин, Г. Г. Судаков

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН ТЕЛ И КРЫЛЬЕВ

Для равномерно точного описания течения идеальной жидкости около пространственных тел необходимо знать характер его асимптотического поведения в окрестностях особых точек, каковыми являются, например, вершины тел и крыльев. Известно, что в окрестностях острых вершин потенциал течения степенным образом зависит от расстояния до вершины.

В настоящей работе предложен алгоритм решения задач на собственные значения с использованием метода «вихревых рамок» и панельного метода, позволяющий находить собственные значения показателя степени и собственные функции задачи. Приведены примеры применения предложенного метода для задач обтекания треугольной вершины крыла и вершины тела в виде кругового конуса, имеющих точное решение (задачи сводятся к решению обыкновенного дифференциального уравнения). Дано сравнение результатов расчетов с точными решениями.

1. Рассмотрим задачу о безвихревом обтекании идеальной жидкостью вершины тела или угловой точки крыла с полууглом при вершине θ . Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с осью x , направленной вдоль линии симметрии тела (крыла), осью z , лежащей в плоскости крыла (в случае конуса — произвольно, перпендикулярно оси x), и осью y , перпендикулярной осям x и z . Потенциал исследуемого течения должен удовлетворять трехмерному уравнению Лапласа с граничным условием непротекания на поверхности тела (крыла). В силу граничных условий задача автомодельная, и, следуя [1—3], отыщем ее решение в виде

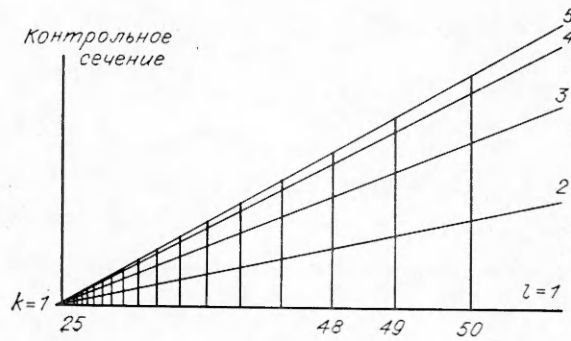
$$(1.1) \quad \Phi = Cx^n \varphi(y/x, z/x, \theta)$$

(φ — безразмерная функция, подлежащая определению, C — размерная постоянная, которая находится только из условия сращивания с решением внешней задачи об обтекании тела (крыла) конечных размеров).

Так как зависимость от продольной координаты дается формулой (1.1), условие непротекания достаточно поставить лишь в одном произвольном поперечном сечении тела (крыла). В [1—3] задача Неймана для уравнения Лапласа в случае угловой точки крыла решалась методом разделения переменных в сферической системе координат. Как показано в [4, 5], исследуемая задача сводится к решению линейного сингулярного интегрального уравнения. В данном случае в силу граничных условий это уравнение однородное, C в выражении (1.1) выпадает из дальнейшего рассмотрения, а нетривиальные решения существуют лишь при некоторых n (задача на собственные значения). Отметим, что искомое автомодельное решение является также асимптотикой решений более широких классов невырожденных неавтомодельных задач об обтекании тел конечных размеров [6].

Для численного решения интегрального уравнения использовался метод «вихревых рамок» (в случае угловой точки крыла) или панельный метод (в случае вершины тела), которые приводят к линейной однородной

системе уравнений. Условие вырожденности этой системы определяет неизвестную величину n в формуле (1.1). Данная задача — представитель класса задач на собственные значения, ранее не решавшихся методом «дискретных вихрей», «вихревых рамок» или панельным методом. Например, эта проблема не упомянута в [4, 7], где содержится подробный анализ постановок задач, решаемых методом «дискретных вихрей».



Р и с. 1

При исследовании обтекания тел и крыльев конечных размеров решение в окрестности вершины представимо в виде суммы полученных собственных функций, умноженных на размерные постоянные, связанные с характерными размерными величинами полной неоднородной задачи.

2. Рассмотрим задачу о течении жидкости в окрестности угловой точки крыла. Потенциал течения можно представить в виде потенциала двойного слоя, при этом условие непротекания на поверхности крыла $y = 0$ (см. [4, 5])

$$(2.1) \quad \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\Gamma(\xi, \zeta) d\xi d\zeta}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} = 0,$$

где $\Gamma(\xi, \zeta)$ — интенсивность скачка потенциала двойного слоя; S — часть плоскости $y = 0$; $x > 0$; $|z/x| < \lambda$; $\lambda = \operatorname{tg} \theta$. В силу предположения (1.1)

$$(2.2) \quad \Gamma(\xi, \zeta) = \xi^n \gamma(\zeta/\xi).$$

Уравнение (2.1) с учетом (2.2) приводит к линейному однородному сингулярному интегральному уравнению относительно функции γ . Для того чтобы это уравнение имело нетривиальное решение, необходимо сформулировать условие его вырожденности, откуда и находится неизвестная величина n .

Всю область S разобьем на совокупность четырехугольников $s_{k,l}$ с помощью сетки, образованной лучами, выходящими из начала координат, и линиями $x = \text{const}$ (рис. 1). Если положить $\Gamma(\xi, \zeta) = \Gamma_{k,l} = \text{const}$ при $\xi, \zeta \in s_{k,l}$, то, следуя [4], для численного решения уравнения (2.1) можно воспользоваться методом «вихревых рамок», причем циркуляция вихревой рамки, расположенной по границе $s_{k,l}$, будет $\Gamma_{k,l}$. Так как поперечный размер крыла линейно увеличивается с ростом x , было выбрано неравномерное разбиение по оси x . По оси z сетка строилась по закону косинуса. Таким образом, координаты узловых точек выбирались следующим образом:

$$(2.3) \quad x_k = e^{-x_0 + k\Delta x}, \quad z_{k,l} = -\lambda x_k \cos(\pi l / (L + 1)), \quad k = 1, \dots, K, \quad l = 1, \dots, L$$

($x_0, \Delta x, K, L$ — заданные числа). Аналогично выражаются координаты контрольных точек:

$$(2.4) \quad \tilde{x}^* = e^{-x_0 + (k_* + 0,5)\Delta x}, \quad \tilde{z}_l^* = -\lambda \tilde{x}^* \cos(\pi(l - 0,5)/L), \quad l = 1, \dots, L,$$

где k_* — некоторое заданное число, причем $k_* < K$. В расчетах использовались параметры: $K = 50$, $L = 10$, $k_* = 25$, $\Delta x = \lambda/K$, $x_0 = -5$.

Итак, панель $s_{k,l}$ представляет собой четырехугольник с координатами $(x_k, z_{k,l+1})$, $(x_{k+1}, z_{k+1,l+1})$, $(x_{k+1}, z_{k+1,l})$ и $(x_k, z_{k,l})$, $k = 1, \dots, K$, $l = 1, \dots, L$. Исключение составляет последняя панель на каждом луче

$s_{K,l}$, для которой $x_{K+1} = \infty$ (см. рис. 1). Тогда в соответствии с (2.2) вдоль луча

$$(2.5) \quad \Gamma_{k,l} = G_l(x_k^*)^n, \quad l = 1, \dots, L, \quad k = 1, \dots, K-1, \\ x_k^* = e^{-x_0 + (k+0,5)\Delta x}.$$

На последней панели s_K полагалось

$$(2.6) \quad \Gamma_{K,l} = G_l x^n, \quad x > x_K, \quad l = 1, \dots, L.$$

Условие непротекания в конечно-разностной аппроксимации (2.3)–(2.6) примет вид

$$(2.7) \quad \sum_{l=1}^L A_{m,l} G_l = 0, \quad m = 1, \dots, L, \quad A_{m,l} = \sum_{k=1}^K V_{m,k,l} (x_k^*)^{n-1} + V_{m,l}^{ac},$$

где $V_{m,k,l}$ — вертикальная составляющая скорости от «вихревой рамки» единичной интенсивности (панель $s_{k,l}$) в контрольной точке x^* , z_m^* ; $V_{m,l}^{ac}$ — асимптотическая оценка интеграла в (2.1) по панели $s_{k,l}$, которая получается с помощью разложения в ряд подынтегрального выражения в (2.1) с учетом (2.6) по малому параметру x^*/ξ , $\xi \in s_{k,l}$. Пусть панель $s_{K,l}$ образована лучами $z = \lambda_l x$, $z = \lambda_{l+1} x$, $|\lambda_{l+1} - \lambda_l| \ll 1$, а также прямой $x = x_K$. Тогда для скорости $V_{m,l}^{ac}$ в контрольной точке с номером m получим оценку:

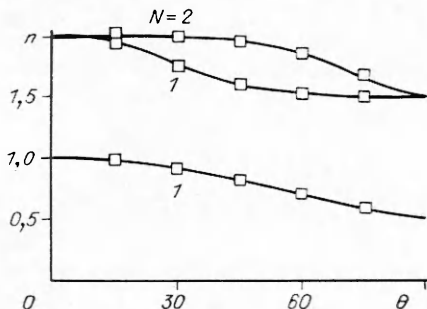
$$(2.8) \quad V_{m,l}^{ac} = \frac{(x_K)^{n-1}}{4\pi} \frac{\lambda_{l+1} - \lambda_l}{(1 + \lambda_l^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{3B}{2(2-n)x_K} x^* + \left(\frac{15}{8} B^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{3-n} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{x^*}{x_K} \right)^2 + \dots \right], \quad B = -\frac{2(1 + \lambda_m^* \lambda_l)}{1 + \lambda_l^2}, \quad \lambda_m^* = z_{K,m}^*/x_K, \quad \lambda_l = z_{K,l}/x_K.$$

Итак, приходим к системе линейных уравнений (2.7) с нулевой правой частью. Анализ вырожденности этой системы, произведенный численно, позволяет определить неизвестное собственное значение задачи n , а также найти собственную функцию $\Gamma_{k,l}$ из (2.5).

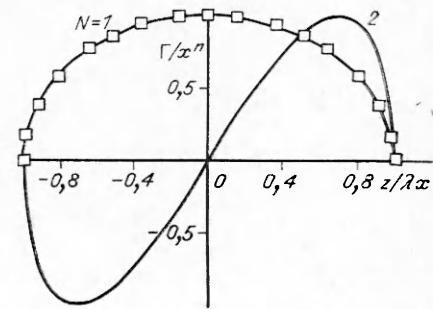
Следует отметить, что введение $V_{m,l}^{ac}$ в (2.7) является существенным, так как в его отсутствие приходится брать очень большие K (при фиксированном номере контрольного сечения k_*), неприемлемые для ЭВМ. В расчетах удерживалось три члена в $V_{m,l}^{ac}$. При увеличении n количество членов в разложении (2.8) также должно возрастать.

На рис. 2, 3 показаны результаты расчета собственных значений и собственных функций в диапазоне $0 < n < 2$ в сравнении с результатами [2, 3] (сплошные линии — данная работа, квадраты — численный метод [3], N — номер собственной функции). Всюду совпадение можно признать хорошим.

3. Исследуем задачу о течении идеальной жидкости в окрестности вершины кругового конуса. Для ее численного решения разобьем поверхность конуса при $x \leq x_K$ на четырехугольные панели плоскостями $x = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$ ($\text{tg } \sigma = y/z$). Разбиение по углу σ выберем равномер-



Р и с. 2



Р и с. 3

ным, а расстояние между сечениями по x такое, чтобы $R_{k+1} - R_k = \frac{\pi R_{k+1}}{2L} \sin \theta$, $R_K = 10$, $R_{k+1} - R_k \leq R_k$ (R — расстояние от вершины конуса, L — количество разбиений по углу на четверти конуса, K — вдоль оси x , $k = 1, \dots, K$). При $R > R_K$ имеем $4L$ полубесконечных панелей. На поверхностях панелей введем распределение источников. Тогда условие непротекания можно записать в виде

$$(3.1) \quad (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = 0,$$

где
$$\mathbf{V} = \frac{1}{4\pi} \int \int \frac{Q[(x-\xi)\mathbf{i} + (y-\eta)\mathbf{j} + (z-\zeta)\mathbf{k}] ds}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}},$$

$\mathbf{n} = \sin \theta \mathbf{i} - \cos \theta \sin \sigma \mathbf{j} - \cos \theta \cos \sigma \mathbf{k}$ — внутренняя нормаль; $Q(x, \sigma) = R^{n-1} q(\sigma)$ — плотность распределения источников. Контрольные точки в сечении $k = k_*$ расположим в точках $R^* = (R_k + R_{k+1})/2$, $k = k_*$, $y_l^* = R^* \sin \theta \sin \sigma_l^*$, $z_l^* = R^* \sin \theta \cos \sigma_l^*$, $\sigma_l^* = \frac{\pi(2l-1)}{4L}$, $l = 1, \dots, L$.

Плотность распределения источников в расчетах постоянная по панели:

$$(3.2) \quad Q(x, \sigma) = (R_k^*)^{n-1} q_l \text{ при } x \leq x_K, \\ R_k^* = (R_k + R_{k+1})/2, k = 1, \dots, K.$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим систему уравнений типа (2.7):

$$\sum_{l=1}^L A_{m,l} q_l = 0, m = 1, \dots, L, A_{m,l} = \sum_{k=1}^K V_{m,k,l} (R_k^*)^{n-1} + V_{m,l}^{ac}.$$

Здесь $V_{m,k,l}$ — нормальная к поверхности конуса в точке $x^* = R^* \cos \theta$, y_m^* , z_m^* составляющая скорости, индуцированная четырехугольной панелью с индексами k, l и плотностью источников, равной единице; $V_{m,l}^{ac}$ — асимптотическая оценка при малых R^*/R нормальной составляющей скорости, индуцируемой узкой полубесконечной панелью источников ($R > R_K$), плотность распределения которых меняется как R^n . Если просуммировать вклады в нормальную составляющую скорости от четырех таких панелей, расположенных при $\arctg(y/z) = \sigma, -\sigma, \pi - \sigma, \pi + \sigma$, то для трех членов разложения $V_{m,l}^{ac}$ имеем

$$V_{m,l}^{ac} = \frac{q_l}{2L} \sin \sigma_l^* \sin \sigma_m^* \sin^2 \theta \cos \theta R_K^{n-1} \left\{ -\frac{1}{n-1} - \frac{3 \cos 2\theta}{n-2} \frac{R^*}{R_K} + \right. \\ \left. + \left[\frac{3}{2} - \frac{15}{2} \cos^4 \theta + \frac{15}{2} \sin^2 2\theta - 15 \sin^4 \theta \cos^2 \sigma_l^* \cos^2 \sigma_m^* - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{15}{2} \sin^2 \theta (\cos^2 \sigma_l^* \cos^2 \sigma_m^* + \sin^2 \sigma_l^* \sin^2 \sigma_m^*) \right] \frac{1}{n-3} \left(\frac{R^*}{R_K} \right)^2 + \dots \right\}$$

при $q(\sigma) = -q(-\sigma)$ или

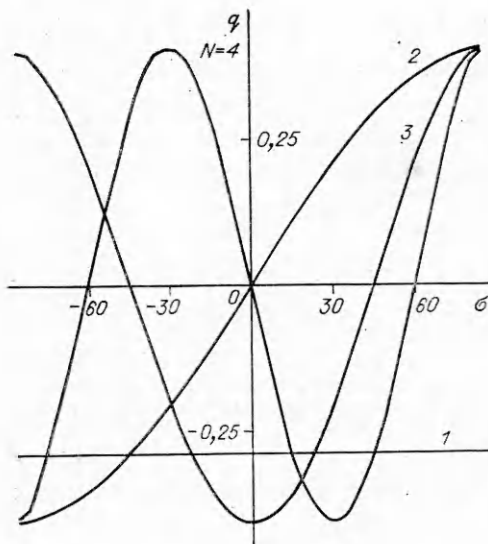
$$V_{m,l}^{ac} = \frac{q_l}{2L} \sin^2 \theta \cos \theta R_K^{n-1} \left\{ \frac{1}{n-1} + \frac{3}{n-2} \left[\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\cos^2 \sigma_l^* \cos^2 \sigma_m^* + \sin^2 \sigma_l^* \sin^2 \sigma_m^*) \right] \frac{R^*}{R_K} - \frac{3}{2(n-3)} \left(\frac{R^*}{R_K} \right)^2 \times \right.$$

$\left. \times \left[1 - 5 \cos^4 \theta - 5 \sin^2 \theta (1 - 3 \cos^2 \theta) (\cos^2 \sigma_l^* \cos^2 \sigma_m^* + \sin^2 \sigma_l^* \sin^2 \sigma_m^*) \right] + \dots \right\}$
при $q(\sigma) = q(-\sigma)$.

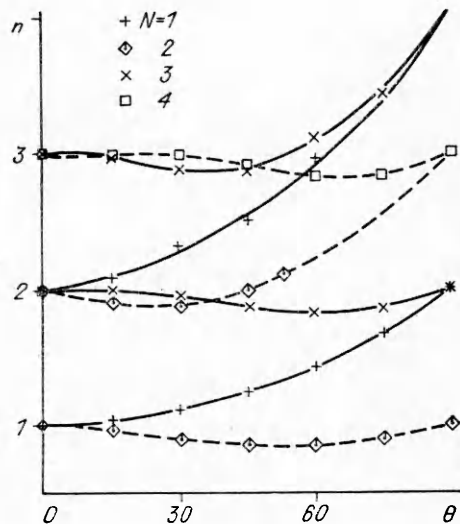
На рис. 4 показаны рассчитанные собственные функции для различных n (N — номер собственной функции).

Задача об обтекании вершины кругового конуса может быть сведена к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Запишем уравнение Лапласа в сферических координатах R, β, σ ($x = R \cos \beta$, $y = R \sin \beta \sin \sigma$, $z = R \sin \beta \cos \sigma$)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \beta}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} = 0.$$



Р и с. 4



Р и с. 5

Подставляя в это уравнение потенциал в виде $\Phi = CR^n h(\sigma) f(\beta)$, получим

$$-\frac{\sin^2 \beta}{f} [n(n+1)f + \operatorname{ctg} \beta f' + f''] = \frac{h''}{h} = p^2$$

($p = \text{const}$). В силу периодичности потенциала по σ $h(\sigma) = \sin(p\sigma + \Delta\sigma)$, $p = 0, 1, \dots$, где $\Delta\sigma = 0$ при $\Phi(\sigma) = -\Phi(-\sigma)$, $\Delta\sigma = \pi/2$ при $\Phi(\sigma) = \Phi(-\sigma)$. Для функции f запишем уравнение

$$(3.3) \quad f'' + \operatorname{ctg} \beta f' + [n(n+1) - p^2/\sin^2 \beta] f = 0.$$

Граничные условия для (3.3) — условия непротекания на поверхности конуса $f'(\theta) = 0$ и ограниченности потенциала на оси x при $x < 0$ ($|f(\pi)| < \infty$). Вообще говоря, уравнению (3.3) с указанными граничными условиями удовлетворяет только функция $f(\beta) = 0$, и лишь при некоторых значениях n имеются нетривиальные решения (задача на собственные значения). Решение этой задачи может быть получено численно с большой точностью.

На рис. 5 приведено сравнение рассчитанных панельным методом собственных чисел (маркеры) с зависимостями $n(\theta)$, полученными из решения уравнения (3.3). В исследованном диапазоне чисел n наблюдается хорошее совпадение результатов.

4. Важным аспектом применения предложенной методики является конструирование существенно трехмерных тест-задач для оценки точности численных методов (метод «вихревых рамок», панельный метод и т. д.), так как в двух частных случаях (вершина треугольного крыла и кругового конуса) имеются точные решения соответствующих задач (см. [3] и п. 3 настоящей работы).

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown S. N., Stewartson K. Flow near the apex at a plane delta wing // J. Inst. Math. Appl. — 1969. — V. 5, N 2.
2. Medan R. T. Aerodynamic loads near cranks, apexes and tips of thin, lifting wings in incompressible flow. — S. l., 1977. — (AGARD CP 204).
3. Молчанов В. Ф. Метод разделения переменных в задаче о пространственном течении идеальной жидкости около угловой точки тонкого крыла // Учен. зап. ЦАГИ. — 1983. — Т. 14, № 5.
4. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. — М.: Наука, 1985.

5. Лифанов П. К., Михайлов А. А. Математические вопросы расчета безотрывного обтекания тел // Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов. — М., 1986. — (Сб. науч. тр./ВВИА им. Н. Е. Жуковского; вып. 1313).
6. Баренблатт Г. П. Автомодельные решения. — Л.: Судостроение, 1978.
7. Воробьев Н. Ф. Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке. — М.: Наука, 1985.

г. Жуковский

Поступила 7/IV 1988 г.,
в окончательном варианте — 31/I 1989 г.

УДК 532.526

Ю. Г. Гуревич

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СТРУЙ

Столкновение пристенных струй на гладкой поверхности рассматривалось многими авторами [1, 2]. В рамках теории потенциальных струйных течений в этой задаче остается неопределенным положение области взаимодействия, а направление результирующей струи определяется однозначно. Учет вязкости позволяет найти положение области взаимодействия [3]. Важно заметить, что для установления направления результирующей струи достаточно интегральных законов сохранения и предположения о том, что вязкость незначительна в области взаимодействия. При этом не нужно знать распределения давления на поверхности.

Особенностью задачи о столкновении струй в окрестности угла является то, что интегральные законы сохранения не позволяют установить направление результирующей струи, если неизвестно распределение давления по поверхности в области взаимодействия. Решение этой задачи в рамках теории потенциальных струйных течений также неединственно и не позволяет однозначно определить направление результирующей струи.

В данной работе в рамках приближения бесконечно тонкой струи представлено простое приближенное решение задачи о столкновении плоских затопленных несжимаемых пристенных струй в окрестности угла. Рассматривается ламинарное и турбулентное течение в квазиламинарном приближении. Отмечено, что небольшие изменения параметров взаимодействующих струй могут сильно менять направление результирующей струи. Показана также целесообразность использования приближения бесконечно тонкой струи в других задачах струйных течений. Проведено качественное рассмотрение задач об ударе струи в угол и о столкновении нескольких струй в пространстве.

1. Пусть вдоль двух пересекающихся плоскостей Ω_1 и Ω_2 (рис. 1) распространяются две плоские пристенные затопленные струи, направленные к линии пересечения плоскостей. Угол между плоскостями γ , координаты x_1 и x_2 взяты соответственно вдоль поверхностей Ω_1 и Ω_2 по нормали к линии пересечения, на которой $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Допустим, что область взаимодействия струй лежит вблизи точки с координатами $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и что на некотором расстоянии от угла параметры струй не зависят от течения в области взаимодействия. Полагается, что источники струй находятся достаточно далеко от области взаимодействия. Предположим, что течение в ней стационарно и имеет следующую структуру: вблизи угла каждая из струй отрывается от поверхности (x_1^0 и x_2^0 — координаты точек отрыва струй на поверхностях Ω_1 и Ω_2); перед точкой отрыва течение невозмущенное; за точкой отрыва формируется область с малыми изменениями давления и малыми скоростями, которая считается застойной; в результате столкновения формируется одна результирующая струя. Полагая, что параметры струй вне области взаимодействия при $x_1 > x_1^0$ и $x_2 > x_2^0$ известны, определим направление результирующей струи, давление в застойной зоне и ее характерные размеры.

Для решения сформулированной задачи необходимо рассмотреть вопрос о движении оторвавшихся струй. В дальнейшем движение струй после отрыва исследуется в приближении бесконечно тонкой струи (БТС).

2. Пусть ξ — векторная линия поля импульса, вне этой линии импульс равен нулю. Запишем закон сохранения импульса в системе коор-