

**ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ДИССОЦИИРОВАННОГО ГАЗА
В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ТРУБЫ**

А. И. Леонтьев, Б. П. Миронов, А. В. Фифурин
(Новосибирск)

Исследованию турбулентного пограничного слоя в начальном участке канала посвящено много теоретических и экспериментальных работ [1-4].

Однако в большинстве исследований рассматривается течение несжимаемой жидкости с постоянными физпараметрами. Для многих практических задач представляет интерес анализ развития турбулентного пограничного слоя газа в начальном участке трубы в условиях существенной неизотермичности. Решение такой задачи, основанное на использовании теории предельных законов, приводится в работе [1]. В настоящей статье это решение распространяется на случай течения высокотемпературного газа, когда необходимо учитывать влияние диссоциации газа на характеристики турбулентного пограничного слоя. Рассматривается течение смеси из i газов, которая находится в «замороженном» состоянии внутри пограничного слоя и в равновесном — на его границах. Выводятся формулы для законов трения и теплообмена и дается решение уравнений турбулентного пограничного слоя для начального участка трубы при постоянной температуре стенки в области дозвуковых скоростей течения газа.

§ 1. Относительный закон трения для турбулентного пограничного слоя диссоциированного газа. Согласно работе [1], относительный коэффициент турбулентного трения определяется выражением

$$\Psi = \left[\frac{1}{Z} \int_{w_1}^1 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\tau_0^*}{\tau^*} \right)^{1/2} d\omega \right]^2, \quad Z = \left(\frac{c_{f_0}}{2} \right)^{1/2} \int_{\xi_1}^1 \left(\frac{\tau_0^*}{1-\beta} \right)^{1/2} \frac{d\xi}{l} \quad (1.1)$$

$$\Psi = \left(\frac{c_f}{c_{f_0}} \right)_{R^{++}}, \quad c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_0 w_0^2}, \quad c_{f_0} = \frac{2\tau_{w0}}{\rho_0 w_0^2}$$

Здесь Ψ — отношение коэффициента трения в рассматриваемых условиях к коэффициенту трения в стандартных условиях при одинаковых значениях R^{++} .

Из уравнений

$$p = \rho RT, \quad h_0 = \sum_i \alpha_{i0} h_{i0}, \quad h_i = \int_0^T c_{pi} dT + h_i^0 \quad (1.2)$$

можно получить связь между плотностью газа и энтальпией.

Степень диссоциации воздуха для низкотемпературной плазмы ($T = 5000^\circ \text{K}$) порядка 0.3. Для этой области параметр μ_{cp} можно принять постоянным по сечению пограничного слоя. Тогда

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{h_0 - \sum \alpha_{i0} h_i^0}{h - \sum \alpha_i h_i^0} \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем суммирование ведется по индексу i . Подставляя (1.2) в (1.3) и принимая подобие полей скоростей, энтальпий и концентраций, [2] получаем

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1 - \sum \alpha_{i0} \Psi_i}{\Psi_h - \sum \alpha_{wi} \Psi_i + \{1 - \Psi_h - \sum (\alpha_0 - \alpha_w)_i \Psi_i\} \omega} \quad (1.4)$$

$$\left(\Psi_h = \frac{h_w}{h_0}, \quad \Psi_i = \frac{h_i^0}{h_0} \right)$$

В уравнениях (1.1) — (1.4) приняты обозначения: p — давление, ρ — плотность, h — энтальпия, h_i^0 — теплота образования i -го компонента, d — степень диссоциации, l — относительная длина пути перемешивания, ω — безразмерная скорость, T — температура, R — газовая постоянная; индексы: w — параметры на стенке, 0 — параметры в ядре потока.

Уравнение (1.4) устанавливает связь между плотностью и скоростью газа в данной точке при заданных параметрах газа на границах пограничного слоя. Строго говоря, уравнение (1.4) является точным только для безградиентного течения газа, при постоянном значении энтальпии на стенке и числе Прандтля $Pr = 1.0$.

Однако, как показывают расчеты, это уравнение, с достаточной для практических целей точностью, можно использовать и для более сложных граничных условий, в частности, при течении газа в начальном участке трубы.

Для оценки параметра Z сделаем предположения, обычно принимаемые в полуэмпирических теориях турбулентности: $\beta = 0$, $l = \kappa \xi$ и $\tau_0^* = 1.0$, тогда

$$Z = - \sqrt{1/2 c_{f0}} \kappa^{-1} \ln \xi_1 \quad (1.5)$$

Из анализа экспериментальных данных по распределению скоростей по сечению турбулентного пограничного слоя при существенной неизотермичности [4-6] следует, что безразмерная скорость на границе вязкого подслоя и относительная толщина вязкого подслоя сохраняют такие же значения, как и для несжимаемой жидкости, если физические параметры газа определять по температуре стенки.

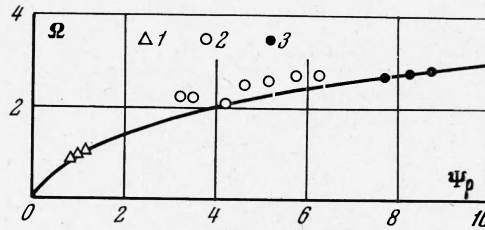
Следовательно,

$$\frac{w_1}{w_0 \sqrt{1/2 c_{f0}}} = \frac{\delta_{11} w_0 \sqrt{1/2 c_{f0}} \Psi_\rho}{v_w} = 11.6 \quad (1.6)$$

Отсюда

$$\omega_1 = 11.6 \sqrt{1/2 c_{f0}} \Psi_\rho, \quad \xi_1 = \frac{135 \Psi_\rho \delta^{++}}{\omega_1 R^{++} \delta} \quad (1.7)$$

$$R^{++} = \frac{\rho_0 w_0 \delta^{++}}{\mu_w}, \quad \Psi_\rho = \frac{\rho_0}{\rho_w} \quad (1.8)$$



Фиг. 1. Влияние неизотермичности на параметры вязкого подслоя. Кривая — расчет по формуле (1.7), точки 1, 2, 3 соответствуют опытам работ [4-6]

Сопоставление формулы (1.7) с опытами различных авторов [4-6] приведено на фиг. 1, где $\Omega = w_1 / 11.6 \cdot w_0 \sqrt{1/2 c_{f0}}$.

Подставляя (1.7) в (1.5), имеем

$$Z = - \frac{\sqrt{1/2 c_{f0}}}{\kappa} \ln \frac{135 \Psi_\rho \delta^{++}}{\omega_1 R^{++} \delta} \quad (1.9)$$

Коэффициент трения c_{f0} в стандартных условиях определяется формулой Кармана

$$1/2 c_{f0} = (2.5 \ln R^{++} + 3.8)^{-2} \quad (1.10)$$

Как показано в работах [7,8], число Рейнольдса R^{++} , входящее в формулу (1.10), следует определить по (1.8).

Для стандартных условий имеем [1]

$$Z = 1 - \omega_{10} \quad (1.11)$$

Фиг. 2. Влияние неизотермичности на параметр $Z = z / (1 - \omega_1)$. Вычисления Z и ω_1 — по формулам (1.9) и (1.7); при этом точка 1 — $R^{++} = 500$, 2 — $R^{++} = 10^4$, 3 — $R^{++} = 10^6$

Можно ожидать, что такая простая связь между Z и ω_1 сохранится и для более сложных условий. Действительно, сопоставление результатов расчета (фиг. 2) по формуле (1.9) с формулой (1.11) с использованием для распределения скоростей закона «одной седьмой», предельной зависимости функции Ψ и (1.3) для различных значений Ψ_ρ и R^{++} показывает, что для практической области изменения Ψ_ρ и R^{++} можно использовать формулу

$$Z = 1 - 11.6 \sqrt{1/2 c_{f0}} \Psi_\rho \quad (1.12)$$

Подставляя уравнения (1.4), (1.7) и (1.12) в уравнение (1.1) и предполагая, что (1.9) будет справедливо при диссоциации, после интегрирования получаем относительный закон трения турбулентного пограничного слоя для рассматриваемых условий

$$\Psi_h = \frac{(1 - \sum \alpha_{i0} \Psi_i) (2 - \sqrt{\Psi})^2 + \Psi \sum \alpha_{wi} \Psi_i - [1 - \sum (\alpha_0 - \alpha_w)_i \Psi_i] 8.2 \sqrt{c_{f0} \Psi_\rho \Psi \Psi}}{\Psi (1 - 8.2 \sqrt{c_{f0} \Psi_\rho \Psi})} \quad (1.13)$$

Если $\alpha_0 = \alpha_w = 0$, то

$$\Psi_h = 1 + \frac{4(1 - \sqrt{\Psi})}{\Psi (1 - 8.2 \sqrt{c_{f0} \Psi_\rho \Psi_h})} \quad (1.14)$$

При $R^{++} \rightarrow \infty$, $Z \rightarrow 1$, $\omega_1 \rightarrow 0$ и из уравнения (1.13) следует

$$\Psi_{\infty} = 4 \left[1 + \left(\frac{\psi_h - \sum \alpha_{wi} \psi_i}{1 - \sum \alpha_{0i} \psi_i} \right)^{1/2} \right]^{-2} \quad (1.15)$$

Для недиссоциированного газа получаем известный результат [1]

$$\Psi_{\infty} = 4(\sqrt{\psi_h} + 1)^{-2} \quad (1.16)$$

Максимальное расхождение между формулами (1.14) и (1.16) для $R^{++} = 300$ $\psi_h = 0.1$ составляет около 25%. Таким образом, для практических расчетов можно использовать предельный относительный закон трения в виде (1.15).

На фиг. 3 дается сопоставление результатов расчета по формуле (1.13) с опытами Н. М. Белянина [3]. Можно отметить удовлетворительное соответствие предлагаемой теории и эксперимента.

§ 2. Развитие динамического турбулентного пограничного слоя на начальном участке трубы. Интегральное уравнение импульсов для входного участка трубы представим в виде [1]

$$\frac{dR^{++}}{dX} + \frac{R^{++}}{W_0} \frac{dW_0}{dX} (1 + H) = \tilde{r}_{D1} \Psi \frac{c_{f0}}{2} \quad (2.1)$$

Здесь $W_0 = v_0 / w_{01}$ — относительная скорость в невозмущенном ядре потока, W_{01} — скорость на входе в трубу.

В уравнение (2.1) входит параметр H , который равен отношению толщины вытеснения к толщине потери импульсов. Проанализируем влияние неизотермичности и диссоциации на величину этого параметра. Физическая толщина вытеснения δ^+ связана с толщиной вытеснения в переменных Дороднищина δ_{1^+} соотношением

$$\delta^+ = \delta_{1^+} - \int_0^{\delta} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{y}{R_0} \right) dy \quad (2.2)$$

С учетом уравнений (1.4) имеем

$$\delta^+ = \delta_{1^+} - \int_0^{\delta} \frac{(h - \sum \alpha_i h_i^{\circ}) - (h_0 - \sum \alpha_{i0} h_i^{\circ})}{h_0 - \sum \alpha_{i0} h_i^{\circ}} \left(1 - \frac{y}{R_0} \right) dy$$

$$\delta^+ = \delta_{1^+} \left\{ 1 - \frac{1}{1 - \sum \alpha_{i0} \psi_i} [1 - \psi_h - \sum_i (\alpha_0 - \alpha_w)_i \psi_i] \right\} \quad (2.4)$$

Отсюда

$$H = H_1 \Psi_{\alpha}, \quad \Psi_{\alpha} = \frac{\psi_h - \sum \alpha_{wi} \psi_i}{1 - \sum \alpha_{0i} \psi_i} \quad (2.5)$$

Формпараметр H_1 слабо зависит от неизотермичности и может быть принят постоянным, равным $H_{10} = 1.347$.

На фиг. 4 показаны результаты расчета параметров осесимметричного турбулентного пограничного слоя при допущении стенового профиля скоростей ($n = 1/2$) и с использованием формулы (1.4) для плотности.

Как видно из графика, параметры δ_{1^+} и δ^{++} существенно зависят от неизотермичности, однако величина H_1 практически остается постоянной и равной 1.347. На фиг. 5 приводится сопоставление результатов расчета формпараметра H при тех же предположениях с формулой (2.5). Отчетливо видно влияние диссоциации воздуха на величину формпараметра H .

Фиг. 3. Сопоставление расчетов по формуле (1.13) с опытами Н. М. Белянина; расчет — по формуле (1.13); кривая 1 — для $R^{++} = 300$, кривая 2 — для $R^{++} = \infty$, 3 — область опытов Н. М. Белянина

Для отсутствия диссоциации из уравнения (2.5) получаем $H = H_1 \Psi_h$.

Таким образом, для граничных условий $\psi_{\alpha} = \text{const}$ формпараметр H может быть принят постоянным по длине трубы.

Для расчета турбулентного пограничного слоя при внешнем обтекании тел уравнений (2.1), (1.15), (1.10) достаточно, так как скорость на внешней границе пограничного слоя W_0 определяется из условий потенциального обтекания тела и является известной функцией продольной координаты. При течении газа в начальном участке

трубы скорость в ядре потока является искомой функцией, и для ее определения необходимо использовать уравнение неразрывности. Уравнение неразрывности для круглой трубы удобно записать в виде [1]

$$\rho_{01}W_{01} = \rho_0W_0 (1 - 2\delta^+ / R_0) \quad (2.6)$$

Вводя формпараметр H , имеем

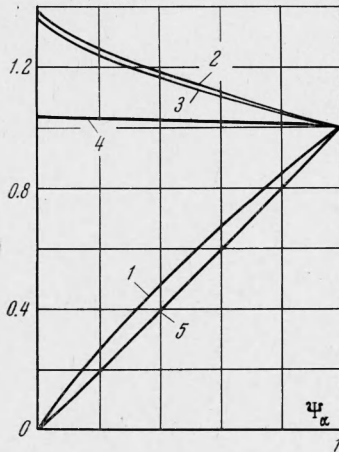
$$R^{++} = 1/4 R_{D1} (W_0 - 1) / H \quad (2.7)$$

Система уравнений (2.1), (1.15), (1.10) и (2.7) является замкнутой, и в результате ее решения получаем искомую связь между параметрами W_0 , R^{++} , $1/2c_f$ и длиной трубы x/D .

Закон трения для стандартных условий (1.10) удобно аппроксимировать степенной зависимостью вида

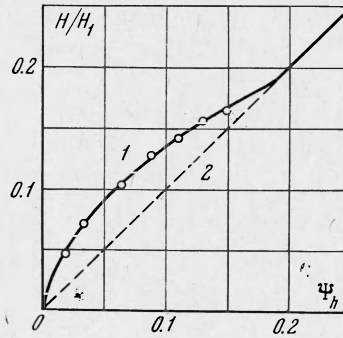
$$c_{f0} = B / (R^{++})^m \quad (2.8)$$

Здесь значения коэффициентов B и m зависят от диапазона изменения R^{++} .



Фиг. 4

Фиг. 4. Влияние неизотермичности на параметры осесимметричного турбулентного пограничного слоя 1 — $\delta^+ / \delta^{+\circ}$, 2 — $\delta_{1++}^+ / \delta_{1+}^+$, 3 — $\delta^{++} / \delta^{+\circ}$, 4 — $H_1 / H_{1из}$, 5 — $\delta^+ / \delta^{+\circ}$



Фиг. 5

Фиг. 5. Влияние диссоциации воздуха на величину форм-параметра: 1 — расчет по уравнению (2.5), 2 — без учета диссоциации; точки — расчет через интегральные параметры. Все расчеты выполнены для $T_w = 300^\circ \text{K}$

Для R^{++} от 300 до 10^4 можно принять $1/2 B = 0.0128$ и $m = 0.25$.

В этом случае удается получить аналитическое решение исходной системы уравнений для условий $h_w = \text{const}$. С учетом уравнений (2.7) и (2.8) уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\left[\frac{(W_0 - 1)^m}{W_0} + \frac{(W_0 - 1)^{m+1}}{W_0^2} (1 + H) \right] \frac{dW_0}{dX} = \Psi \frac{B}{2} \frac{(4H)^{1+m}}{(R_{D1})^m} \quad (2.9)$$

принимая на входе в трубу равномерный профиль скоростей и учитывая, что для условий $h_w = \text{const}$, $\Psi = \text{const}$ и $H = \text{const}$ (рассматривается случай дозвуковых скоростей течения газа), а также принимая $1/2 B = 0.0128$ и $m = 0.25$, из уравнения (2.9) получаем

$$\left[(1 + H) \frac{5}{4} + 1 \right] \left[4(W_0 - 1)^{0.25} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{(W_0 - 1)^{0.5} + \sqrt{2}(W_0 - 1)^{0.25} + 1}{(W_0 - 1)^{0.5} - \sqrt{2}(W_0 - 1)^{0.25} + 1} - \sqrt{2} \arctg \frac{\sqrt{2}(W_0 - 1)^{0.25}}{1 - (W_0 - 1)^{0.5}} \right] - (1 + H) \frac{(W_0 - 1)^{1.25}}{W_0} = \Psi \frac{0.0725 H^{1.25}}{R_{D1}^{0.25}} X \quad (2.10)$$

Для области дозвуковых скоростей течения недиссоциированного газа уравнение (2.10) приводится к уравнению (6.35) работы [1], только вязкость газа, входящая в R_{D1} , определяется по температуре стенки.

На фиг. 6 приводятся результаты расчетов зависимости W_0 от $\xi = X/R_{D1}^m$ по уравнению (2.10) для различных степеней диссоциации и неизотермичности. Уравнение (2.10) справедливо только для начального участка трубы, пока динамические и тепловые пограничные слои не сомкнулись.

Определим длину начального участка из условия, что в конце участка стабилизации толщина пограничного слоя становится равной радиусу трубы. Тогда

$$R_H^{++} = R_D \frac{1}{2} \frac{\delta^{++}}{R_0} = R_{D1} \frac{W_{0H} \delta^{++}}{2 R_0} \quad (2.11)$$

с другой стороны,

$$R_H^{++} = \frac{R_{D1}(W_{0H} - 1)}{4H} \quad (2.12)$$

Из уравнений (2.11) и (2.12) получаем

$$W_{0H} = \frac{1}{1 - 2\delta^{++}H/R_0} \quad (2.13)$$

Параметры δ^{++}/R_0 и H в первом приближении можно определить из фиг. 4. Подставляя величину W_{0H} в уравнение (2.10), определяем длину начального участка

$$X_H = \frac{R_{D1}^{0.25}}{\Psi^{0.0725} H^{1.25}} \left\{ \left[(1+H) \frac{5}{4} + 1 \right] \left[4(W_{0H} - 1)^{0.25} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{(W_{0H} - 1)^{0.5} + \sqrt{2}(W_{0H} - 1)^{0.25} + 1}{(W_{0H} - 1)^{0.5} - \sqrt{2}(W_{0H} - 1)^{0.25} + 1} - \sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}(W_{0H} - 1)^{0.25}}{1 - (W_{0H} - 1)^{0.5}} \right] - (1+H) \frac{(W_{0H} - 1)^{1.25}}{W_0} \right\} \quad (2.14)$$

Пунктирная линия на фиг. 6, рассчитанная по уравнениям (2.13) и (2.14), определяет длину начального участка и область применения полученных соотношений. Следует отметить существенное влияние диссоциации газа на длину участка стабилизации.

Последовательность расчета динамического турбулентного пограничного слоя в начальном участке трубы следующая.

1. По заданным параметрам α_w , α_0 и h_w по формулам (1.15) и (2.5) определяются параметры Ψ_∞ и H .

2. По уравнениям (2.13) и (2.14) определяется длина участка стабилизации X_H .

3. По уравнению (2.10) или графику на фиг. 6 подсчитывается зависимость W_0 от X .

4. По уравнению (2.7) определяются значения R^{++} и по уравнению (2.8) и (1.15) или (1.13) подсчитываются значения коэффициентов трения.

§ 3. Развитие теплового турбулентного пограничного слоя на начальном участке трубы. Интегральное уравнение энергии для входного участка трубы удобно записать в виде [1]

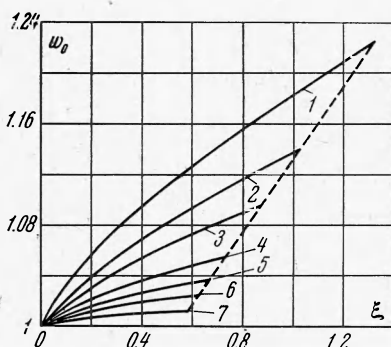
$$\frac{dR_h^{++}}{dX} + \frac{R_h^{++}}{\Delta h} \frac{d(\Delta h)}{dX} = R_{D1} W_0 \Psi_s S_0 \quad (3.1)$$

Здесь S_0 — критерий Стентона в стандартных условиях. Для случая $h_w = \text{const}$

$$dR_h^{++}/dX = R_{D1} W_0 \Psi_s S_0 \quad (3.2)$$

при принятых допущениях закон теплообмена имеет такой же вид, как и закон трения, т. е.

$$\Psi_s = 4 \left[1 + \left(\frac{\Psi_h - \sum \alpha_{wi} \Psi_i}{1 - \sum \alpha_{oi} \Psi_i} \right)^{1/2} \right]^{-2} \quad (3.3)$$



Фиг. 6. Зависимость безразмерной величины скорости W_0 в ядре потока от длины трубы $\xi = XR^{-0.25}$ при различных значениях Ψ_α ; кривые 1, ..., 7 соответствуют значениям $\Psi_\alpha = 1.06, 0.4, 0.2, 0.137, 0.0875, 0.044$

Пунктирная линия определяет границу начального участка (расчет по формуле (2.14))

