

В. С. Хандецкий, В. А. Пашенко, Н. А. Матвеева

(Днепропетровск, Украина)

КОРРЕКЦИЯ ИСКАЖЕНИЙ  
ДЕЛЬТА-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ  
С ПОМОЩЬЮ АДАПТИВНЫХ ФИЛЬТРОВ УОЛША

Определены передаточные и импульсные характеристики фильтров Уолша, обеспечивающие выделение (для четырех уровней помехозащищенности) синдрома искажений короткой скользящей выборки, содержащей характерный фрагмент огибающей дельта-модулированного измерительного импульса, с целью ее одношагового порогового декодирования. Предложенный алгоритм коррекции искажений с адаптацией к интенсивности шумов обладает линейной сложностью вычислений и адекватен архитектуре современных процессоров цифровой обработки сигналов.

**Введение.** Непосредственное преобразование аналоговых сигналов в дельта-модулированную цифровую форму осуществляется быстрее и обеспечивает более высокую помехоустойчивость, чем в случае импульсно-кодовой модуляции, что важно при проведении измерений быстропротекающих процессов с оперативной адаптацией к интенсивности шумов. Такой подход позволяет улучшить информативность и достоверность в сферах измерений, управления, неразрушающего контроля и т. д.

В работе [1] предложена методология пофрагментной идентификации характерных участков огибающей дельта-модулированных [2, 3] сигналов дефектов, искаженных шумами, с помощью диадной свертки скользящей выборки с эталонами. В [4] множество эталонов для характерных фрагментов расширено до 16, что позволило детально анализировать мультимодальные сигналы; предложено использовать четыре уровня помехозащищенности, причем переход к более высокому уровню достигается за счет сокращения количества распознаваемых фрагментов. Расширение функциональных возможностей достигнуто, с одной стороны, благодаря тому, что эталоны (рис. 1, *a-e*) образуют групповой код с трехкратным иерархическим вложением групповых подкодов [5]:

$$\{\{\{f_0, f_1\}f_4, f_5\}f_2, f_3, f_6, f_7\} \quad 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}. \quad (1)$$

С другой стороны, эталоны образуют код-произведение двух подкодов [5], что позволяет корректировать в составе скользящей выборки длины  $2^n$

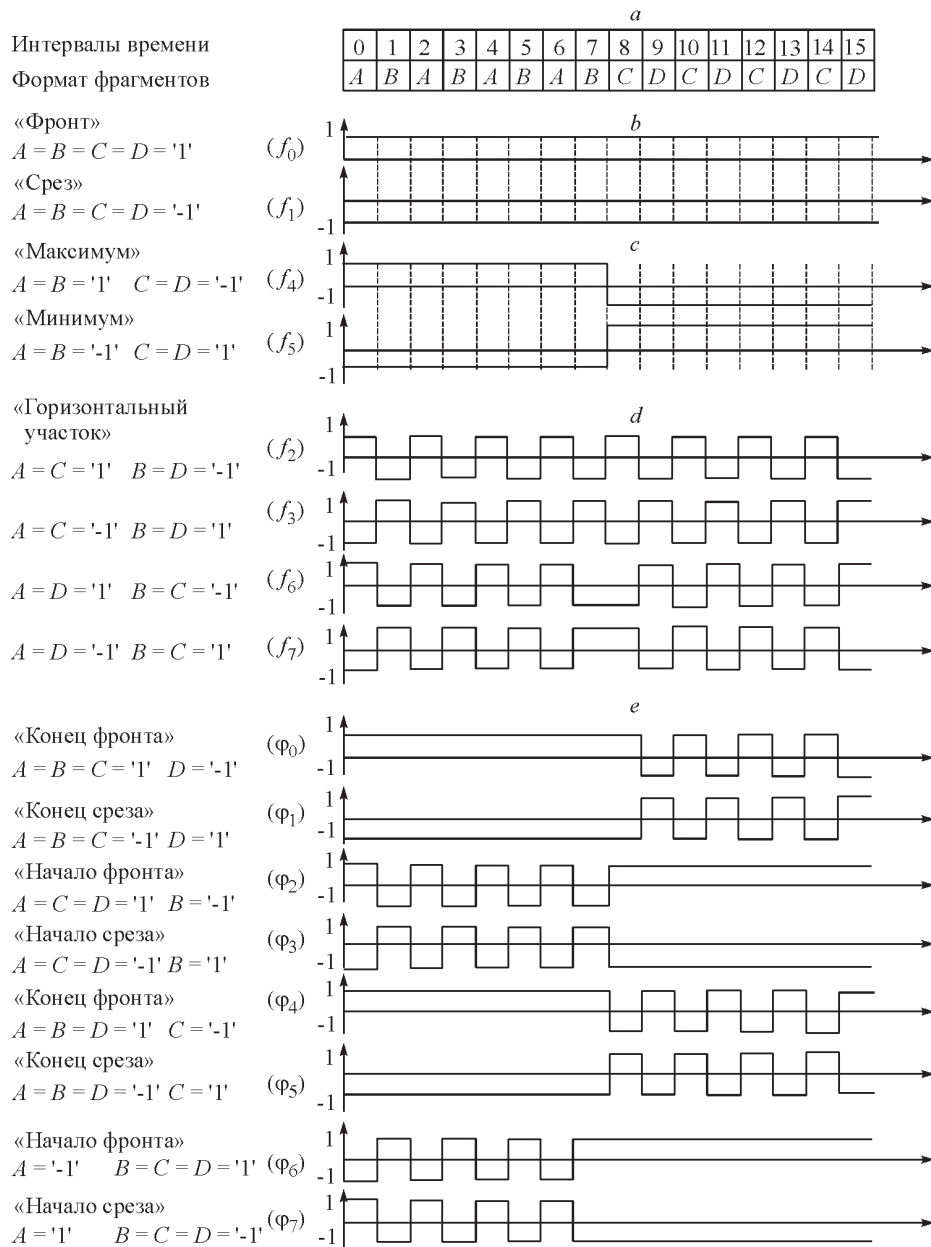


Рис. 1

пакеты ошибок, причем их максимально допустимая кратность на уровнях помехозащищенности I, II, III, IV составляет

$$\begin{aligned}
 &4(2^{n-3} - 1) \cdot 2^{n-1} - 4 \text{ (I);} & 2(2^{n-2} - 1) \cdot 2^{n-1} - 2 \text{ (III);} \\
 &3(2^{n-3} - 1) \cdot 2^{n-3} - 2^{n-1} - 3 \text{ (II);} & 2^{n-1} - 1 \text{ (IV).}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Использование в данной работе режекторной фильтрации в базисе функций Уолша посредством предложенных передаточных характеристик и с привлечением редуцированных быстрых алгоритмов с целью выделения синдрома искажений для одношагового порогового декодирования скользящей выборки дельта-модулированного сигнала позволяет значительно уменьшить сложность вычислений и повысить корректирующую способность. Разработанный алгоритм с адаптивным подбором требуемого уровня помехозащищенности ориентирован на архитектуру и вычислительные ресурсы современных процессоров цифровой обработки сигналов (ЦОС).

Режекторные фильтры Уолша для нахождения синдрома искажений скользящей выборки исключают из нее эталоны тех характерных фрагментов, которые идентифицируемы на данном уровне помехозащищенности. Благодаря этому выходной сигнал фильтра зависит для таких фрагментов лишь от компонент вектора ошибок, искажающих скользящую выборку, представляя собой их синдром – однозначную характеристику искажений, подлежащих коррекции.

Бинарная форма представления огибающей позволяет представить эталоны ее характерных фрагментов с помощью функций Уолша, задаваемых выражением

$$W_k(t) = W_{k_1, \dots, k_n}(t_1, \dots, t_n) = W_{k_1}(t_1) \dots W_{k_n}(t_n) \quad (1)^{k_1 t_1} \dots (1)^{k_n t_n}, \quad (3)$$

где  $k_1, \dots, k_n$  и  $t_1, \dots, t_n$  – компоненты записи в двоичной системе счисления:

$$k = 2^{n-1} k_1 \dots 2 k_{n-1} k_n \quad (k = 0, \dots, 2^n - 1); \quad (4)$$

$$t = 2^{n-1} t_1 \dots 2 t_{n-1} t_n \quad (t = [0, 2^n - 1])$$

(здесь  $k$  – номера функции и  $t$  – номера дискретного момента времени).

Так, функции Уолша  $W_0(t)$  и  $W_{2^n-1}(t)$  непосредственно описывают эталоны фрагментов «фронт» и «максимум», а взятые со знаком « $\rightarrow$ » задают комбинации-признаки для фрагментов «срез» и «минимум» (см. рис. 1, *b, c* для случая  $n = 4$ ). Четыре различных эталона фрагмента «горизонтальный участок» тождественны функциям  $W_1(t)$  и  $W_{2^n-1}(t)$  со знаками « $\leftarrow$ » и « $\rightarrow$ » (см. рис. 1, *d*).

Каждый из двух признаков характерных фрагментов: «начало фронта», «конец фронта», «начало среза», «конец среза» (см. рис. 1, *e*) определяется соответствующей комбинацией четырех функций Уолша с номерами  $0, 1, 2^{n-1}, 2^n - 1$  [4].

Анализ спектров Уолша (табл. 1) характерных фрагментов, вычисленных с помощью быстрого преобразования Уолша, задаваемого следующей скобочной формой записи [6, 7]:

$$G(k_1, \dots, k_n) = \prod_{t_1=0}^{1} W_{k_1}(t_1) \prod_{t_2=0}^{1} W_{k_2}(t_2) \dots \prod_{t_{n-1}=0}^{1} W_{k_{n-1}}(t_{n-1}) \prod_{t_n=0}^{1} W_{k_n}(t_n) g(t_1, \dots, t_n) \dots,$$

Т а б л и ц а 1

Спектры Уолша характерных фрагментов огибающей дельта-модулированного импульса для различных уровней помехозащищенности и предлагаемые передаточные функции для формирования синдромов ошибок

Время $t$	Фрагмент $g(t)$	Уровни помехозащищенности				Обобщенные частоты Уолша $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n)$	Передающие функции			
		$s(t)(s \overline{0,7})$	$f_2, f_3, f_6, f_7$ (A B C D 0)	$f_4, f_5$ (A B, C D)	$f_0, f_1$ (A B C D)		$H_I$	$H_{II}$	$H_{III}$	$H_{IV}$
0	A	$2^{n-2}(A B C D)$	0	$2^{n-1}(A C)$	$2^{n-1}A$	(0, 0, ..., 0, 0)	0	0	0	0
1	B	$2^{n-2}(A B C D)$	0	0	0	(0, 0, ..., 0, 1)	0	0	0	1
2	A	0	0	0	0	(0, 0, ..., 1, 0)	1	1	1	1
3	B	0	0	0	0	(0, 0, ..., 1, 1)	1	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$2^{n-1} - 2$	A	0	0	0	0	(0, 1, ..., 1, 0)	1	1	1	1
$2^{n-1} - 1$	B	0	0	0	0	(0, 1, ..., 1, 1)	1	1	1	1
$2^{n-1}$	C	$2^{n-2}(A B C D)$	0	$2^{n-1}(A C)$	0	(1, 0, ..., 0, 0)	0	1	0	1
$2^{n-1} + 1$	D	$2^{n-2}(A B C D)$	0	0	0	(1, 0, ..., 0, 1)	0	0	1	1
$2^{n-1} + 2$	C	0	0	0	0	(1, 0, ..., 1, 0)	1	1	1	1
$2^{n-1} + 3$	D	0	0	0	0	(1, 0, ..., 1, 1)	1	1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$2^n - 2$	C	0	0	0	0	(1, 1, ..., 1, 0)	1	1	1	1
$2^n - 1$	D	0	0	0	0	(1, 1, ..., 1, 1)	1	1	1	1

показывает, что среди спектральных коэффициентов  $G(k_1, k_2, \dots, k_n)$  имеется лишь четыре нетождественных нулю, локализованных на обобщенных частотах:  $(0, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $(0, 0, \dots, 0, 1)$ ,  $(1, 0, \dots, 0, 0)$  и  $(1, 0, \dots, 0, 1)$ . Тогда обратное преобразование Уолша

$$g(t_1, \dots, t_n) = 2^{-n} \prod_{k_1=0}^1 \dots \prod_{k_n=0}^1 G(k_1, \dots, k_n) W_{k_1}(t_1) \dots W_{k_n}(t_n) \quad (5)$$

позволяет записать произвольный фрагмент в виде (см. рис. 1, а)

$$g(t) = 2^{-2} \{ (A \ B \ C \ D) \ (A \ B \ C \ D) \ (1)^{t_n} \ (A \ B \ C \ D) \ (1)^{t_1} \ (A \ B \ C \ D) \ (1)^{t_1 \dots t_n} \}. \quad (6)$$

На уровне помехозащищенности II, когда среди величин  $A, B, C, D$  имеется четное количество '+1' и/или '-1' (см. табл. 1), каждый из используемых фрагментов задается не всеми четырьмя составляющими, как  $s(t)$  ( $s = 0, 1, \dots, 7$ ) для уровня I, а единственной спектральной компонентой, например:

- 1)  $G(0, 0, \dots, 0, 0)$  определяются значениями  $f_0$  (если  $A \ B \ C \ D$  '+1') и  $f_1$  ( $A \ B \ C \ D$  '-1');
- 2)  $G(0, 0, \dots, 0, 1)$  задаются значениями  $f_2$  (при  $A \ C$  '+1' и  $B \ D$  '-1') и  $f_3$  ( $A \ C$  '-1' и  $B \ D$  '+1');
- 3)  $G(1, 0, \dots, 0, 0)$  задаются значениями  $f_4$  ( $A \ B$  '+1' и  $C \ D$  '-1') и  $f_5$  ( $A \ B$  '-1' и  $C \ D$  '+1');
- 4)  $G(1, 0, \dots, 0, 1)$  задаются значениями  $f_6$  ( $A \ D$  '+1' и  $B \ C$  '-1') и  $f_7$  ( $A \ D$  '-1' и  $B \ C$  '+1').

Переход к уровню помехозащищенности III достигается введением более жесткого ограничения:  $A \ B, C \ D$ , что сужает количество ненулевых спектральных составляющих до двух, локализованных на обобщенных частотах  $(0, 0, \dots, 0, 0)$  и  $(1, 0, \dots, 0, 0)$ .

На уровне помехозащищенности IV оба фрагмента «фронт» и «срез» однозначно задаются спектральной компонентой  $G(0, 0, \dots, 0, 0)$ .

В табл. 1 представлены также передаточные функции фильтров Уолша, которые обеспечивают исключение из скользящей выборки эталонов следующих фрагментов:

- а) всех шестнадцати, идентифицируемых на уровне помехозащищенности I с помощью  $H_I(k_1, \dots, k_n)$ ;
- б) «горизонтального участка» ( $f_2, f_3, f_6, f_7$ ), а также «фронта» ( $f_0$ ) и «среза» ( $f_1$ ), распознаваемых на уровне помехозащищенности II посредством передаточной функции  $H_{II}(k_1, \dots, k_n)$ , которая по сравнению с  $H_I(k_1, \dots, k_n)$  имеет единичное значение вместо нулевого на обобщенной частоте  $(1, 0, \dots, 0, 0)$ , что предполагает равенство нулю спектральной компоненты  $G(1, 0, \dots, 0, 0)$   $A \ B \ C \ D = 0$ , самостоятельно задающей фрагменты «максимум» ( $f_4$ ) и «минимум» ( $f_5$ ), а также участвующей в формировании фрагментов  $s(t)$  ( $s = 0, 1, \dots, 7$ );
- в) «фронта» ( $f_0$ ), «среза» ( $f_1$ ), «максимума» ( $f_4$ ) и «минимума» ( $f_5$ ), идентифицируемых на уровне помехозащищенности III с помощью  $H_{III}(k_1, \dots, k_n)$ ;

г) только «фронта» и «среза», распознаваемых на уровне IV посредством  $H_{IV}(k_1, \dots, k_n)$ .

Аналитически передаточные функции из табл. 1 задаются следующими выражениями:

$$H_I(k_1, \dots, k_n) = 1 - (k_2) \dots (k_{n-1}), \quad (7)$$

$$H_{II}(k_1, \dots, k_n) = 1 - (k_1) \dots (k_n) - (k_2) \dots (k_{n-1}) (k_n - 1), \quad (8)$$

$$H_{III}(k_1, \dots, k_n) = 1 - (k_2) \dots (k_n), \quad (9)$$

$$H_{IV}(k_1, \dots, k_n) = 1 - (k_1) \dots (k_n), \quad (10)$$

причем

$$(k_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } k_i = 0 \ (i = 1, \dots, n); \\ 0, & \text{если } k_i = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Далее с целью представления получаемых результатов посредством целых чисел опускается нормирующий множитель  $2^{-n}$  в обратном преобразовании Уолша (5).

Осуществляя подстановку выражений (7)–(10) последовательно в (5) и производя разложение сумм, можно показать, что режекторные фильтры Уолша с передаточными функциями (7)–(10) обладают импульсными переходными характеристиками:

$$h^I(t) = 2^n h_I^1(t_1, \dots, t_n) = 2^n (t_1) \dots (t_n) = 2^2 (t_1) (t_n), \quad (12)$$

$$h^{II}(t) = 2^n h_{II}^1(t_1, \dots, t_n) = 2^n (t_1) \dots (t_n) = 2^2 (t_1) (t_n) = 2 (t_1) = 1, \quad (13)$$

$$h^{III}(t) = 2^n h_{III}^1(t_1, \dots, t_n) = 2^n (t_1) \dots (t_n) = 2 (t_1), \quad (14)$$

$$h^{IV}(t) = 2^n h_{IV}^1(t_1, \dots, t_n) = 2^n (t_1) \dots (t_n) = 1, \quad (15)$$

причем  $(t_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) удовлетворяет выражению (11).

В табл. 2 представлены значения импульсных характеристик (12)–(15) для  $n = 4$ . Импульсные характеристики (12)–(15) не только отфильтровывают идентифицируемые фрагменты огибающей, но и предоставляют в каждой компоненте выходного сигнала вес соответствующей составляющей вектора ошибок, получаемый с помощью компоненты  $h(0)$ , которая последовательно перемножается со всеми составляющими входного сигнала при всевозможных диадных сдвигах  $h(0_{-1}, \dots, 0_{-n})$ , используемых в процессе вычисления диадной свертки (см., например, (16)).

Формирование синдромов искажений скользящей выборки производится с помощью режекторных фильтров Уолша с предложенными характеристиками.

Диадная свертка скользящей выборки  $x(t)$  из  $2^n$  бинарных отсчетов и импульсной переходной характеристики  $h(t)$  фильтра Уолша определяется выражением

$$y(t) = x(t) \underset{t_1=0}{\overset{1}{\cdot}} \dots \underset{t_n=0}{\overset{1}{\cdot}} h(t_{1-1}, \dots, t_{n-1}), \quad (16)$$

где  $t_1, \dots, t_{n-1}, \dots, t_n$  – компоненты представления  $t$  и соответственно в двоичной системе счисления;  $\cdot$  – знак свертки, а  $+$  – знак суммы по модулю 2.

Вследствие свойства линейности эту свертку можно рассматривать как сумму двух диадных свертки с той же переходной характеристикой  $h(t)$ , а именно вектора ошибки  $e(t)$  и идентифицируемого фрагмента  $g(t)$ , составляющих в сумме скользящую выборку

$$y(t) = x(t) \underset{t_1=0}{\overset{1}{\cdot}} \dots \underset{t_n=0}{\overset{1}{\cdot}} h(t) \oplus x(t) \underset{t_1=0}{\overset{1}{\cdot}} \dots \underset{t_n=0}{\overset{1}{\cdot}} h(t) g(t) \underset{t_1=0}{\overset{1}{\cdot}} \dots \underset{t_n=0}{\overset{1}{\cdot}} h(t),$$

где под  $g(t)$  подразумевается или  $f_m(t)$  ( $m = 0, 1, \dots, 7$ ), или  $s_s(t)$  ( $s = 0, 1, \dots, 7$ ).

Аддитивный вектор ошибки  $e(t) = (e_0, e_1, \dots, e_{2^n-1})$  имеет в качестве ненулевых компонент числа ‘2’, суммирование которых с соответствующими составляющими скользящей выборки преобразует ‘-1’ в ‘+1’, а ‘+1’ в ‘-1’. Количество ненулевых компонент вектора ошибки определяет кратность искажения скользящей выборки: одно-, дву-, трехкратное и т. д. Заметим, что во всех  $2^{n-2}$  позициях локализации одного из параметров  $A, B, C, D$  (см. рис. 1)

компоненты вектора ошибки имеют одинаковый знак, поскольку значение базового параметра может быть искажено только путем замены на альтернативное:

$$\begin{aligned} e_0, e_2, e_4, \dots, e_{2^n-2} &= e_A; \\ e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2^n-1} &= e_B; \\ e_{2^{n-1}}, e_{2^{n-1}+2}, e_{2^{n-1}+4}, \dots, e_{2^n-2} &= e_C; \\ e_{2^{n-1}-1}, e_{2^{n-1}-3}, e_{2^{n-1}-5}, \dots, e_{2^{n-1}-1} &= e_D. \end{aligned}$$

Режекторные фильтры Уолша с импульсными переходными характеристиками (12)–(15) преобразуют скользящую выборку  $x(t) \oplus g(t) \oplus e(t)$  в выходные сигналы соответственно:

$$y^1(t_{1-1}, \dots, t_{n-1}) \underset{t_2=0}{\overset{1}{\cdot}} \dots \underset{t_n=0}{\overset{1}{\cdot}} 2^n e(t_{1-1}, \dots, t_{n-1}), \quad (17)$$

Т а б л и ц а 2  
Импульсные переходные характеристики режекторных фильтров Уолша для  $2^n = 16$

t	$h^I(t)$	$h^{II}(t)$	$h^{III}(t)$	$h^{IV}(t)$
0	12	13	14	15
1	0	1	-2	-1
2	-4	-3	-2	-1
3	0	1	-2	-1
4	-4	-3	-2	-1
5	0	1	-2	-1
6	-4	-3	-2	-1
7	0	1	-2	-1
8	0	-1	0	-1
9	0	-1	0	-1
10	0	-1	0	-1
11	0	-1	0	-1
12	0	-1	0	-1
13	0	-1	0	-1
14	0	-1	0	-1
15	0	-1	0	-1

$$\begin{aligned}
y^{\text{II}}(t_1, \dots, t_n) &= 2^n e(t_1, \dots, t_n) \int_{t_2=0}^1 \dots \int_{t_{n-1}=0}^1 e(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n) \\
&\quad \int_{t_2=0}^1 \dots \int_{t_n=0}^1 e(t_1, t_2, \dots, t_n) \\
&\quad \int_{t_1=0}^1 \dots \int_{t_n=0}^1 e(t_1, \dots, t_n) = 2^n \cdot 2^{-(n-1)} G(1, 0, \dots, 0), \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^{\text{III}}(t_1, \dots, t_n) &= 2^n e(t_1, \dots, t_n) \int_{t_2=0}^1 \dots \int_{t_n=0}^1 e(t_1, t_2, \dots, t_n) \\
&= 2^n \cdot 2^{-(n-1)} \{(A \ B \ C \ D) \ (A \ B \ C \ D) \ (1)^{-1}\}, \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^{\text{IV}}(t_1, \dots, t_n) &= 2^n e(t_1, \dots, t_n) \int_{t_1=0}^1 \dots \int_{t_n=0}^1 e(t_1, \dots, t_n) \\
&= 2^n \cdot 2^{-(n-1)} [(A \ B \ C \ D) \ (1)^{-n} \ (A \ B \ C \ D) \ (1)^{-1} \\
&\quad (A \ B \ C \ D) \ (1)^{-1-n}]. \tag{20}
\end{aligned}$$

Доказательство осуществляется путем подстановки (12)–(15) в (16), раскрытия скобок под знаком суммы по  $t_1, \dots, t_n$  и использования определения дельта-функции (11). Затем, применяя выражение (6) для характерного фрагмента и раскрывая скобки под знаками сумм, после преобразований получаем доказываемое.

При  $n = 4$  компоненты диадной свертки (17) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
&y_0^1 = 12e_0 - 4(e_2 + e_4 + e_6); \quad y_8^1 = 12e_8 - 4(e_{10} + e_{12} + e_{14}); \\
&y_1^1 = 12e_1 - 4(e_3 + e_5 + e_7); \quad y_9^1 = 12e_9 - 4(e_{11} + e_{13} + e_{15}); \\
&y_2^1 = 12e_2 - 4(e_0 + e_4 + e_6); \quad y_{10}^1 = 12e_{10} - 4(e_8 + e_{12} + e_{14}); \\
&y_3^1 = 12e_3 - 4(e_1 + e_5 + e_7); \quad y_{11}^1 = 12e_{11} - 4(e_9 + e_{13} + e_{15}); \tag{21} \\
&y_4^1 = 12e_4 - 4(e_0 + e_2 + e_6); \quad y_{12}^1 = 12e_{12} - 4(e_8 + e_{10} + e_{14}); \\
&y_5^1 = 12e_5 - 4(e_1 + e_3 + e_7); \quad y_{13}^1 = 12e_{13} - 4(e_9 + e_{11} + e_{15}); \\
&y_6^1 = 12e_6 - 4(e_0 + e_2 + e_4); \quad y_{14}^1 = 12e_{14} - 4(e_8 + e_{10} + e_{12}); \\
&y_7^1 = 12e_7 - 4(e_1 + e_3 + e_5); \quad y_{15}^1 = 12e_{15} - 4(e_9 + e_{11} + e_{13}),
\end{aligned}$$



где использована индексная форма записи составляющих выходного сигнала  $y = y(1, \dots, n)$  и вектора ошибки  $e = e(1, \dots, n)$ , причем  $(1, \dots, n)$  – двоичное представление согласно (4).

Запись компонент диадной свертки в два столбца, причем со смещением влево четных строк, иллюстрирует четыре независимые системы проверочных соотношений для обнаружения двойных и исправления одиночных ошибок в позициях  $\{0, 2, 4, 6\}$ ,  $\{1, 3, 5, 7\}$ ,  $\{8, 10, 12, 14\}$ ,  $\{9, 11, 13, 14\}$ .

**Пример.** Если при  $n = 4$  ненулевые компоненты вектора ошибки  $e_0 = 2, e_3 = 2, e_4 = 2$ , то составляющие выходного сигнала режекторного фильтра Уолша с переходной характеристикой (12) следующие:

$$\begin{array}{cccc} y_0^1 = 16, & y_1^1 = 8, & y_8^1 = 0, & y_9^1 = 0, \\ y_2^1 = 16, & y_3^1 = 24, & y_{10}^1 = 0, & y_{11}^1 = 0, \\ y_4^1 = 16, & y_5^1 = 8, & y_{12}^1 = 0, & y_{13}^1 = 0, \\ y_6^1 = 16; & y_7^1 = 8; & y_{14}^1 = 0; & y_{15}^1 = 0. \end{array}$$

Значения приведенных систем проверочных соотношений типичны для случаев с двойной и одиночной ошибками, а также их отсутствием. Двойная ошибка лишь обнаруживается, так как две проверки принимают значение 16, а две другие – значение  $(-16)$ . Одиночная ошибка  $e_3 = 2$  индицируется величиной  $y_3 = 24$ , которая по абсолютной величине больше  $2^4 = 16$  и может быть скорректирована путем прибавления  $+2$  к третьему разряду выборки.

В случае произвольной длины  $2^n$  скользящей выборки четные и нечетные компоненты как первой, так и второй половины вектора диадной свертки (17) являются значениями четырех систем проверочных соотношений для соответствующих групп разрядов выборки:  $\{0, 2, 4, \dots, 2^{n-1} - 2\}$ ,  $\{1, 3, 5, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ ,  $\{2^{n-1}, 2^{n-1} + 2, 2^{n-1} + 4, \dots, 2^n - 2\}$ ,  $\{2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 3, 2^{n-1} + 5, \dots, 2^n - 1\}$ . Если кратность ошибки в некоторой группе равна  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, 2^{n-3}$ ), то среди  $2^{n-2}$  одноименных компонент свертки содержится  $r$  значений  $\pm 8r$ , указывающих положительные ошибки  $+2$  (или  $\pm 8r$  значений, выделяющих отрицательные ошибки  $-2$ ), а также  $2^{n-2} - r$  значений  $\mp 8r$ , отвечающих неискаженным разрядам, причем алгебраическая сумма всех  $2^{n-2}$  этих компонент равна нулю. При  $r = 1, 2, \dots, 2^{n-3} - 1$  значения  $\pm 8r$  больше, а значения  $\mp 8r$  меньше по абсолютной величине чем  $2^n$ ; равенство модулей этих значений числу  $2^n$  достигается при  $r = 2^{n-3}$ . Максимальная кратность исправимых ошибок составляет  $4(2^{n-3} - 1) = 2^{n-1} - 4$ , как указано в (2) для уровня помехозащищенности I.

Для  $n = 4$  компоненты диадной свертки (18) в случае выполнения условия

$$G(1, 0, 0, 0) \quad A \quad B \quad C \quad D \quad 0 \quad (22)$$

представляют собой систему из  $2^n$  16 проверочных соотношений для коррекции ошибок скользящей выборки:

$$\begin{aligned}
 y_0^{\text{II}} & 13e_0 e_1 3e_2 e_3 3e_4 e_5 3e_6 e_7 e_8 e_9 e_{10} e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_2^{\text{II}} & 3e_0 e_1 13e_2 e_3 3e_4 e_5 3e_6 e_7 e_8 e_9 e_{10} e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_4^{\text{II}} & 3e_0 e_1 3e_2 e_3 13e_4 e_5 3e_6 e_7 e_8 e_9 e_{10} e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_6^{\text{II}} & 3e_0 e_1 3e_2 e_3 3e_4 e_5 13e_6 e_7 e_8 e_9 e_{10} e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0); \\
 \\
 y_1^{\text{II}} & e_0 13e_1 e_2 3e_3 e_4 3e_5 e_6 3e_7 e_8 e_9 e_{10} e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_3^{\text{II}} & e_0 3e_1 e_2 13e_3 e_4 3e_5 e_6 3e_7 e_8 e_9 e_{10} e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_5^{\text{II}} & e_0 3e_1 e_2 3e_3 e_4 13e_5 e_6 3e_7 e_8 e_9 e_{10} e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_7^{\text{II}} & e_0 3e_1 e_2 3e_3 e_4 3e_5 e_6 13e_7 e_8 e_9 e_{10} e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0);
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 y_8^{\text{II}} & e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 13e_8 e_9 3e_{10} e_{11} 3e_{12} e_{13} 3e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_{10}^{\text{II}} & e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 3e_8 e_9 13e_{10} e_{11} 3e_{12} e_{13} 3e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_{12}^{\text{II}} & e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 3e_8 e_9 3e_{10} e_{11} 13e_{12} e_{13} 3e_{14} e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_{14}^{\text{II}} & e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 3e_8 e_9 3e_{10} e_{11} 3e_{12} 13e_{13} 13e_{14} 3e_{15} 4G(1, 0, 0, 0);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_9^{\text{II}} & e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 13e_9 e_{10} 3e_{11} e_{12} 3e_{13} e_{14} 3e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_{11}^{\text{II}} & e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 3e_9 e_{10} 13e_{11} e_{12} 3e_{13} e_{14} 3e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_{13}^{\text{II}} & e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 3e_9 e_{10} 3e_{11} e_{12} 13e_{13} e_{14} 3e_{15} 4G(1, 0, 0, 0), \\
 y_{15}^{\text{II}} & e_0 e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7 e_8 3e_9 e_{10} 3e_{11} e_{12} 3e_{13} e_{14} 13e_{15} 4G(1, 0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

С помощью фигурных скобок выделены четыре зависимые друг от друга подсистемы, содержащие по четыре проверки;  $j$ -е проверочное соотношение системы (23) предназначено для коррекции одноименного бинарного отсчета скользящей выборки, так как выражение для  $e_j$  ( $j = 0, \dots, 15$ ) имеет наибольший множитель '13', однако эта проверка существенно зависит от ошибок в позициях локализации того же базового параметра: или  $A$ , или  $B$ , или  $C$ , или  $D$ , которые умножаются на '-3', а также зависит, но в меньшей степени, от ошибок в прочих разрядах скользящей выборки. Последние, принимая значения '2', имеют в (23) множитель '1', поэтому их влияния на величину проверки  $y_j^{\text{II}}$  могут взаимно компенсироваться, поддерживая ее значение большим  $2^n$ , что способствует повышению корректирующих возможностей.

В случае произвольной длины скользящей выборки  $2^n$  нечетные и четные компоненты как первой, так и второй половины вектора диадной свертки (18) являются значениями четырех зависимых друг от друга подсистем проверок для одноименных отсчетов выборки с номерами:  $\{0, 2, \dots, 2^{n-1} - 2\}$ ,  $\{1, 3, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ ,  $\{2^{n-1}, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n - 2\}$ ,  $\{2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 3, \dots, 2^n - 1\}$ . Если первая группа разрядов выборки искажена  $r_A$ -кратной ошибкой  $e_A$ , вторая группа –  $r_B$ -кратной ошибкой  $e_B$ , а остальные группы –  $r_C$ - и  $r_D$ -кратными ошибками  $e_C$  и  $e_D$  соответственно, где  $r_A, r_B, r_C, r_D = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-3}$ , а

$e_A, e_B, e_C, e_D \in \{2, 2\}$ , то, например, первая группа разрядов свертки содержит в  $r_A$ -позициях значение  $'e_A(2^n - 3r_A) - e_B r_B - e_C r_C - e_D r_D'$  и в  $2^{n-2} - r_A$  разрядах – значение  $'3e_A r_A - e_B r_B - e_C r_C - e_D r_D'$ , причем противоположные по знаку. По модулю первое значение больше, а второе меньше чем  $2^n$  при выполнении неравенств:

$$3r_A - 2^{n-1} > r_B - r_C - r_D; \quad 3r_A - 2^{n-1} < r_B - r_C - r_D;$$

$$3r_A - 2^{n-1} > r_B - r_C - r_D$$

в случае наличия характерных фрагментов  $f_0$  и  $f_1, f_2$  и  $f_3, f_6$  и  $f_7$  в составе скользящей выборки соответственно.

Тогда исправление ошибок кратности  $r_A - 2^{n-3}$  оказывается возможным, если количества искажений в других группах разрядов удовлетворяют одному из неравенств:

$$r_B - r_C - r_D < 2^{n-3}; \quad r_B - r_C - r_D > 2^{n-3}; \quad r_B - r_C - r_D < 2^{n-3}. \quad (24)$$

Вследствие неопределенности относительно типа характерного фрагмента в составе скользящей выборки и способа распределения ошибок по ее группам разрядов одновременное выполнение требований (24) достигается лишь в  $2^{3n-10} - 1$  случаях из  $2^{n-3} - 2^{n-3} - 2^{n-3} - 2^{3n-9}$  возможных, например в 5 из 8 при  $n = 4$  и в 33 из 64 при  $n = 5$ , когда  $r_B, r_C, r_D = 0, 1, \dots, 2^{n-3} - 1$ .

Однако при отсутствии ошибок в других группах разрядов (т. е. при  $r_B - r_C - r_D = 0$ ), например вследствие коррекции на уровне помехозащитности I, в данной группе разрядов можно исправлять искажения кратности  $r_A = \lfloor 2^{n-1} / 3 \rfloor$ , где  $\lfloor x \rfloor$  – ближайшее к 'x' снизу целое число. В результате возможна коррекция ошибок кратности, большей  $2^{n-3}$ , в  $2^{n-2}$ -разрядной группе, например пятикратных в 8 разрядах локализации при  $n = 5$ .

Таким образом, скоординированное использование уровней помехозащитности I, а затем и II в случае применения фильтров Уолша с передаточными функциями (7) и (8) повышает при  $n = 4$  максимальную корректирующую способность до  $3(2^{n-3} - 1) = \lfloor 2^{n-1} / 3 \rfloor$  ошибок по сравнению с  $2^{n-1} - 3$ , как в (2).

При  $n = 4$  компоненты диадной свертки (19) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} y_0^{\text{III}} &= 14e_0 - 2(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7) - 2^{4-1}(A - B), \\ y_1^{\text{III}} &= 14e_1 - 2(e_0 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7) - 2^{4-1}(A - B), \\ y_2^{\text{III}} &= 14e_2 - 2(e_0 - e_1 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7) - 2^{4-1}(A - B), \\ y_3^{\text{III}} &= 14e_3 - 2(e_0 - e_1 - e_2 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7) - 2^{4-1}(A - B), \\ y_4^{\text{III}} &= 14e_4 - 2(e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_5 - e_6 - e_7) - 2^{4-1}(A - B), \\ y_5^{\text{III}} &= 14e_5 - 2(e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_6 - e_7) - 2^{4-1}(A - B), \\ y_6^{\text{III}} &= 14e_6 - 2(e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_7) - 2^{4-1}(A - B), \\ y_7^{\text{III}} &= 14e_7 - 2(e_0 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6) - 2^{4-1}(A - B); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
y_8^{\text{III}} &= 14 e_8 \quad 2(e_9 \quad e_{10} \quad e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad e_{15}) \quad 2^4 \quad {}^1(C \quad D), \\
y_9^{\text{III}} &= 14 e_9 \quad 2(e_8 \quad e_{10} \quad e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad e_{15}) \quad 2^4 \quad {}^1(C \quad D), \\
y_{10}^{\text{III}} &= 14 e_{10} \quad 2(e_8 \quad e_9 \quad e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad e_{15}) \quad 2^4 \quad {}^1(C \quad D), \\
y_{11}^{\text{III}} &= 14 e_{11} \quad 2(e_8 \quad e_9 \quad e_{10} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad e_{15}) \quad 2^4 \quad {}^1(C \quad D), \\
y_{12}^{\text{III}} &= 14 e_{12} \quad 2(e_8 \quad e_9 \quad e_{10} \quad e_{11} \quad e_{13} \quad e_{14} \quad e_{15}) \quad 2^4 \quad {}^1(C \quad D), \\
y_{13}^{\text{III}} &= 14 e_{13} \quad 2(e_8 \quad e_9 \quad e_{10} \quad e_{11} \quad e_{12} \quad e_{14} \quad e_{15}) \quad 2^4 \quad {}^1(C \quad D), \\
y_{14}^{\text{III}} &= 14 e_{14} \quad 2(e_8 \quad e_9 \quad e_{10} \quad e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad e_{15}) \quad 2^4 \quad {}^1(C \quad D), \\
y_{15}^{\text{III}} &= 14 e_{15} \quad 2(e_8 \quad e_9 \quad e_{10} \quad e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13} \quad e_{14}) \quad 2^4 \quad {}^1(C \quad D).
\end{aligned}$$

Эти системы проверочных соотношений предназначены для коррекции одно-, дву- и трехкратных ошибок, а также обнаружения четырехкратных искажений в разрядах скользящей выборки с номерами  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  и  $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ , где локализованы базовые параметры  $A, B$  и  $C, D$  ее характерного фрагмента соответственно. Заметим, что системы (25) не зависят от вида фрагмента в составе скользящей выборки при  $A = B$  и  $C = D$ , соответствующего одному из эталонов  $\{f_0, f_1, f_4, f_5\}$  (см. табл.1).

Для произвольного  $n$  на уровне помехозащищенности III компоненты первой и второй половины вектора диадной свертки (19) скользящей выборки бинарных отсчетов и переходной характеристики (14) являются значениями двух систем проверок для разрядов  $\{0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$  и  $\{2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n - 1\}$  выборки. Если кратность ошибки в первой и второй половине вектора выборки составляет  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, 2^{n-2}$ ), то среди  $2^{n-1}$  одноименных составляющих свертки содержится  $r$  значений  $\pm(2^{n-1} - 4r)$  и  $2^{n-1} - r$  значений  $\mp 4r$ , причем сумма всех этих компонент равна нулю. При  $r = 1, 2, \dots, 2^{n-2} - 1$  значения  $\pm(2^{n-1} - 4r)$  больше, а значения  $\mp 4r$  меньше по модулю чем  $2^n$ ; равенство абсолютных величин этих значений числу  $2^n$  имеет место при  $r = 2^{n-2}$ . Максимальная кратность исправимых ошибок составляет  $2(2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} - 2$ , как и указано в (2) для уровня помехозащищенности III.

На уровне помехозащищенности IV, когда базовые параметры фрагментов удовлетворяют условию  $A = B = C = D$ , компоненты вектора диадной свертки (20) скользящей выборки и переходной характеристики (13) являются значениями системы проверок для ее двоичных отсчетов. Если кратность вектора ошибки составляет  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ ), то в соответствующих разрядах свертка содержит значения  $\pm(2^{n-1} - 2r)$ , а в остальных  $2^{n-1} - r$  разрядах  $\mp 2r$ , причем сумма всех этих значений равна нулю. При  $r = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$  значение  $\pm(2^{n-1} - 2r)$  больше, а значение  $\mp 2r$  меньше по абсолютной величине чем  $2^n$ ; равенство модулей этих значений числу  $2^n$  достигается при  $r = 2^{n-1}$ .

Следствие. Если некоторая компонента диадной свертки (17)–(20) больше  $2^n$  (или меньше  $-2^n$ ), то одноименную составляющую скользящей выборки следует скорректировать путем суммирования с  $-2$  (или  $+2$ ); повы-

шение помехозащищенности необходимо в случае равенства ‘ $2^n$ ’ или ‘ $2^n$ ’, всех компонент свертки в составе:

а) одной или более следующих групп разрядов:

$$\{0, 2, 4, \dots, 2^{n-1} - 2\}, \{1, 3, \dots, 2^{n-1} - 1\},$$

$$\{2^{n-1}, 2^{n-1} - 2, 2^{n-1} - 4, \dots, 2^n - 2\}, \{2^{n-1} - 1, 2^{n-1} - 3, 2^{n-1} - 5, \dots, 2^n - 1\}$$

для уровней I и II;

б) одной или обеих половин выборки:

$$\{0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1\}, \{2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 2, \dots, 2^n - 1\}$$

для уровня III.

Быстродействующая процедура одношагового порогового декодирования с подбором уровня помехозащищенности. Наиболее общим является случай использования трех из четырех возможных уровней помехозащищенности, а также увеличения длины  $2^n$  выборки в определенных пределах. При этом сначала предпринимается попытка скорректировать все ошибки на самом низком уровне, а при неудачной или неполной коррекции осуществляется переход на более высокий уровень и/или увеличивается значение  $2^n$ .

Редукция быстрых преобразований Уолша, используемых при нахождении синдрома искажений, возможна благодаря тому, что в передаточных функциях (7)–(10) преобладают единицы. Тогда в составе  $n$ -мерных прямого и обратного преобразований попарно избыточны многие из одноименных одно-, дву- и т. д.  $(n - 1)$ -мерных их компонент. Это особенно наглядно в случае следующих последовательностей привлечения двоичных переменных для организации вычислений  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и  $k_n, k_{n-1}, \dots, k_1$  при нахождении значений прямого и обратного преобразований соответственно, как на

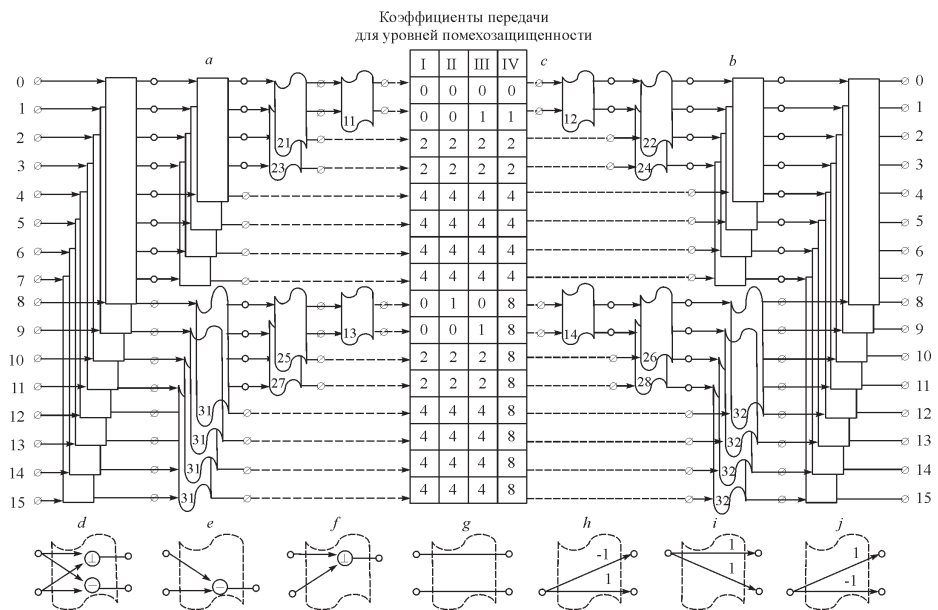


Рис. 2

Т а б л и ц а 3

Двухточечные преобразования подстройки (см. рис. 2, *d*–*j*)  
к уровням помехозащищенности

Уровни помехо- защищенности	Номер блока на рис. 2, <i>a</i> , <i>b</i>													
	11	12	13	14	21	22	23	24	25	26	27	28	31	32
I	–	–	–	–	e	j	e	j	e	j	e	j	d	d
II	–	–	f	i	e	j	e	j	d	d	d	d	d	d
III	e	j	e	j	d	d	d	d	d	d	d	d	g	g
IV	e	j	g	g	d	d	d	d	g	g	g	g	g	g

рис. 2, *a*, *b*, при  $n = 4$ . Так, если классический алгоритм Уолша на каждом из  $n$  шагов содержит  $2^{n-1}$  сложений и  $2^{n-1}$  вычитаний, то предлагаемый редуцированный алгоритм требует такого же числа операций лишь на одном шаге, а на других шагах их количество значительно меньше и варьируется в зависимости от используемого уровня помехозащищенности. При этом для уровней I, II, III и IV необходимо соответственно  $3 \cdot 2^n$ ,  $3 \cdot 2^{n-1}$ ,  $3 \cdot 2^{n-2}$  и  $2^{n-1}$  операций сложения (вычитания) для прямого, а также  $3 \cdot 2^n$ ,  $3 \cdot 2^{n-1}$ ,  $3 \cdot 2^{n-2}$  и  $2^{n-1}$  операций для обратного преобразований.

По сравнению с классическим алгоритмом Уолша [6, 7] с объемом вычислений  $\sim n2^n$  суммарный выигрыш при нахождении диадной свертки посредством редуцированных преобразований пропорционален  $\sim 2n/3$  для достаточно больших  $n$ .

Представленные на рис. 2, *a*, *b* своими графами при  $n = 4$  прямое и обратное преобразования Уолша адаптируемы к любому из четырех уровней помехозащищенности путем соответствующего выбора согласно табл. 3 элементарных двухточечных преобразований подстройки (рис. 2, *d*–*j*) для варьируемых блоков (пронумерованных на рис. 2, *a*, *b*).

Устранение пар одноименных одно-, дву- и т. д.  $(n-1)$ -мерных компонент как прямого, так и обратного  $n$ -мерных преобразований следует компенсировать умножением на  $2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$  (реализуемых посредством передач со сдвигом на  $1, 2, \dots, (n-1)$  двоичных разрядов) соответствующих единичных составляющих передаточных функций (7)–(10). Формируемые таким образом коэффициенты передачи представлены на рис. 2, с при  $n = 4$  для четырех уровней помехозащищенности.

Предложенный адаптивный алгоритм обработки дельта-модулированных импульсов адекватен архитектуре современных процессоров ЦОС и с их помощью может быть реализован при незначительных стоимостных затратах.

Заключение. Для коррекции искажений огибающей дельта-модулированного измерительного импульса разработан и обоснован эффективный метод адаптивной фильтрации в базисе функций Уолша, обеспечивающий выделение для четырех уровней помехозащищенности синдрома искажений короткой скользящей выборки с целью ее последующего одношагового порогового декодирования.

Анализ спектров Уолша эталонов характерных фрагментов огибающей, содержащихся в искаженной шумами выборке, позволил установить передаточные функции фильтров, которые пропускают лишь часть спектра вектора ошибок, не суммирующуюся со спектрами режектурируемых фрагментов, идентифицируемых на выбранном из четырех возможных уровне помехозащищенности.

Для режекторных фильтров получены импульсные переходные характеристики, диадная свертка которых со скользящей выборкой бинарных отсчетов представляет собой синдром ошибок для соответствующего уровня помехозащищенности.

Анализ установленных выражений для синдромов позволяет найти их численные значения в случае различной кратности ошибок для произвольной длины  $2^n$  скользящей выборки, а также обосновать алгоритм коррекции искажений. Достигнуто повышение корректирующей способности при  $n = 4$  на нижних уровнях помехозащищенности, где идентифицируется большая часть фрагментов огибающей.

С целью сокращения объема вычислений быстрый алгоритм Уолша редуцирован и применен при формировании синдрома искажений. По сравнению с классическим алгоритмом с объемом вычислений, пропорциональным  $n^2$ , суммарный выигрыш в результате его двукратного применения достигается при  $n = 2$  и возрастает пропорционально  $2n/3$  при увеличении длины выборки.

Создан ориентированный на вычислительные ресурсы современных процессоров ЦОС алгоритм адаптивной коррекции искажений с подстройкой к интенсивности шумов путем подбора как уровня помехоустойчивости, так и длины выборки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ханецкий В. С. Идентификация модуляционных импульсов дефектов, искаженных шумами, с помощью бинарных корреляционных преобразований // Дефектоскопия. 1997. № 7. С. 43.
2. Стил Р. Принципы дельта-модуляции. М.: Связь, 1979.
3. Погребной В. А. Дельта-модуляция в цифровой обработке сигналов. М.: Радио и связь, 1990.
4. Ханецкий В. С., Пащенко В. А., Матвеева Н. А. Адаптивная к уровню помех идентификация характерных фрагментов огибающей измерительного импульса при помощи диадной свертки. Ч. I. Распознавание типа характерного фрагмента посредством диадной корреляции // Дефектоскопия. 2002. № 8. С. 71.
5. Ханецкий В. С., Пащенко В. А., Матвеева Н. А. Коррекция искажений выборки, скользящей вдоль огибающей модуляционного импульса, с помощью табличного декодирования // Дефектоскопия. 2002. № 9. С. 53.
6. Дагман Э. Е., Кухарев Г. А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск: Наука, 1983.
7. Литвин А. И. Вычисление спектральных коэффициентов Уолша, Фурье и Хартли // Автометрия. 1997. № 2. С. 83.