УДК 532.59+539.3:534.1

ПОВЕДЕНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Рассматриваются колебания полубесконечного ледяного покрова в идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под действием локальной периодической во времени нагрузки осесимметричного вида. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной постоянной толщины. С помощью метода Винера — Хопфа построено аналитическое решение задачи. Исследована асимптотика амплитуд колебаний пластины и жидкости в дальнем поле. Показано, что распространение волн в дальнем поле неравномерно, выделяются направления, по которым волны распространяются со значительно большей амплитудой.

Ключевые слова: поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, упругая пластина, дисперсионные соотношения, преобразование Фурье, метод Винера — Хопфа.

DOI: 10.15372/PMTF20170408

Для решения многих проблем, связанных со строительством и эксплуатацией гидротехнических сооружений, необходимо исследовать динамические процессы, происходящие в ледяном покрове при внешнем механическом воздействии. Поведение бесконечного ледяного покрова, полностью покрывающего поверхность жидкости, при таких воздействиях хорошо изучено. Имеется большое число работ, посвященных исследованию поведения ледяного покрова при постоянной и периодической во времени, неподвижной и движущейся нагрузках, при нестационарном воздействии. Обзоры полученных результатов приведены в [1–9].

В случае ограниченного ледяного покрова необходимо учитывать взаимодействие изгибно-гравитационных волн с поверхностными, их отражение и преломление. Задача дифракции плоских поверхностных и изгибно-гравитационных волн на краях пластин и трещинах также достаточно хорошо изучена [10–13].

Задача о динамическом воздействии на ограниченный ледяной покров находится на начальной стадии изучения. В [14] методом конечных элементов изучалось напряженно-деформированное состояние полубесконечного ледяного покрова под действием движущейся нагрузки. В [15, 16] путем численного решения системы интегральных уравнений методом граничных элементов исследовалось воздействие периодического во времени давления на плавающую упругую пластину конечных размеров. В [17] изучалось поведение упругой плавающей пластины большого размера, моделирующей плавающий аэропорт при взлете и посадке самолета. В [18] построено решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову в канале. Исследование поведения полубесконечного ледяного покрова при динамическом воздействии в приближении мелкой воды проведено в [19].

В данной работе получено аналитическое решение задачи о воздействии периодического во времени давления на полубесконечную упругую пластину, плавающую на поверхности жидкости конечной глубины. С помощью метода стационарной фазы исследована асимптотика распространения волн в дальнем поле.

1. Постановка задачи. Ледяной покров моделируется упругой полубесконечной пластиной постоянной толщины h, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H. Рассматриваются совместные колебания пластины и жидкости под действием приложенного в локальной области периодического во времени давления с частотой ω:

$$q(x,y,t) = Q(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,.$$

Задача решается в линейной постановке. Введем декартову систему координат $Oxyz$ с центром O на кромке пластины, осью Ox, перпендикулярной кромке, осью Oy, направленной вдоль кромки, и осью Oz, направленной вертикально вверх.

Потенциал скорости течения жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Колебания пластины описываются уравнением

$$D\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^2 + \rho_0 h\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p + Q\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad p = -\rho(\varphi_t + gw).$$

На верхней границе жидкости выполнено кинематическое соотношение

$$w_t = \varphi_z.$$

Осадка пластины в воду не учитывается. Граничные условия на верхней границе жидкости сносятся на плоскость $z = 0$. На свободной поверхности давление равно нулю, т. е. выполнено соотношение

$$\varphi_t + gw = 0 \qquad (z = 0),$$

на дне — условие непротекания

$$\varphi_z = 0 \qquad (z = -H).$$

Здесь $w(x,y)$ — нормальный прогиб пластины или возвышение свободной поверхности; ρ_0, ρ — плотности льда и жидкости; p — гидродинамическое давление; g — ускорение свободного падения; D — цилиндрическая жесткость пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; t — время. Край пластины свободен:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0 \qquad (x = 0, \quad z = 0).$$

На бесконечности ставится условие излучения (условие отсутствия приходящих волн).

Ограничимся изучением случая осесимметричной нагрузки. Предполагается, что давление

$$Q(x,y) = \rho g H f(r_0)$$

зависит только от радиуса $r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}$, $(x_0, 0)$ — центр локальной области $r_0 < a$, в которой приложено давление, $f(r_0)$ — безразмерная функция. В [19] рассмотрены два вида распределения нагрузки: постоянное $f(r_0) = C$ и давление, распределенное по параболическому закону $f(r_0) = 1-(r_0/a)^2$ (a — радиус области, в которой приложено давление).

Предполагалось, что сила, действующая на пластину, в обоих случаях одна и та же. Тогда в случае равномерно распределенной нагрузки $C = 1/2$. Показано, что характер распределения нагрузки оказывает незначительное влияние на поведение пластины, если радиус области действующей нагрузки порядка характерной длины $l = (D/(\rho g))^{1/4}$, зависящей от упругости пластины. Поэтому в данной работе будем рассматривать параболическое распределение давления.

2. Метод решения. Введем безразмерные переменные и параметры

$$x' = \frac{x}{H}, \quad y' = \frac{y}{H}, \quad z' = \frac{z}{H}, \quad \beta = \frac{D}{\rho g H^4}, \quad \lambda = \omega\sqrt{\frac{H}{g}}, \quad \delta = \frac{\rho_0 h}{\rho H}\,\lambda^2.$$

Далее штрихи будем опускать. Потенциал течения жидкости и прогиб пластины будем искать в виде

$$\varphi = \sqrt{gH}\,H\phi(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \qquad w = HW(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}.$$

Тогда для функции $\phi(x,y,z)$ получаем уравнения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (z < 0),\\
\phi_z = 0 \qquad (z = -1),\\
\phi_z - \lambda^2\phi = 0 \qquad (z = 0,\ x < 0),\\
(\beta\Delta_2^2 + 1 - \delta)\phi_z - \lambda^2\phi = -i\lambda f \qquad (z = 0,\ x > 0),\\
\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2-\nu)\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi_z = 0 \qquad (x = 0,\ z = 0),
\end{gathered} \tag{1}$$

где Δ_2 — оператор Лапласа по горизонтальным координатам.

Вводя преобразование Фурье по переменным x и y:

$$\Phi_-(\alpha,s,z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\,dy \int\limits_{-\infty}^{0} \phi(x,y,z)\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,dx,$$

$$\Phi_+(\alpha,s,z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\,dy \int\limits_{0}^{\infty} \phi(x,y,z)\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,dx, \qquad \Phi(\alpha,s,z) = \Phi_-(\alpha,s,z) + \Phi_+(\alpha,s,z),$$

из уравнения Лапласа и условия непротекания получаем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - (\alpha^2 + s^2)\Phi = 0 \qquad (-1 < z < 0),\\
\Phi_z = 0 \qquad (z = -1).
\end{gathered}$$

Тогда

$$\Phi(z) = C(\alpha,s)Z(\alpha,s,z), \qquad Z(\alpha,s,z) = \operatorname{ch}\big((z+1)\sqrt{\alpha^2+s^2}\,\big)/\operatorname{ch}\big(\sqrt{\alpha^2+s^2}\,\big). \tag{2}$$

Применяя метод Винера — Хопфа [20] и вводя функции $D_\pm$, $G_\pm$ следующим образом:

$$D_-(\alpha,s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\,dy \int\limits_{-\infty}^{0} (\phi_z - \lambda^2\phi)\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,dx,$$

$$D_+(\alpha, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\, dy \int\limits_{0}^{\infty} (\phi_z - \lambda^2\phi)\, \mathrm{e}^{i\alpha x}\, dx,$$

$$G_-(\alpha, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\, dy \int\limits_{-\infty}^{0} [(\beta\Delta_2^2 + 1 - \delta)\phi_z - \lambda^2\phi]\, \mathrm{e}^{i\alpha x}\, dx,$$

$$G_+(\alpha, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isy}\, dy \int\limits_{0}^{\infty} [(\beta\Delta_2^2 + 1 - \delta)\phi_z - \lambda^2\phi]\, \mathrm{e}^{i\alpha x}\, dx,$$

из уравнений (1) получаем

$$D_-(\alpha, s) = 0, \qquad G_+(\alpha, s) = -i\lambda F(\alpha, s)\, \mathrm{e}^{i\alpha x_0}; \tag{3}$$

$$F(\alpha, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(r)\, \mathrm{e}^{i(\alpha x + sy)}\, dx$$

и из (2) находим

$$\begin{aligned} D(\alpha, s) &= D_-(\alpha, s) + D_+(\alpha, s) = C(\alpha, s) K_1(\alpha, s), \\ G(\alpha, s) &= G_-(\alpha, s) + G_+(\alpha, s) = C(\alpha, s) K_2(\alpha, s), \end{aligned} \tag{4}$$

где $K_1(\alpha, s)$, $K_2(\alpha, s)$ — дисперсионные функции для жидкости со свободной поверхностью и жидкости, находящейся под упругой пластиной:

$$\begin{aligned} K_1(\alpha, s) &= \sqrt{\alpha^2 + s^2}\ \mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2 + s^2}\,) - \lambda^2, \\ K_2(\alpha, s) &= [\beta(\alpha^2 + s^2)^2 + 1 - \delta]\sqrt{\alpha^2 + s^2}\ \mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2 + s^2}\,) - \lambda^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Известно, что для гравитационных волн дисперсионное соотношение

$$K_1(\gamma) \equiv \gamma\, \mathrm{th}\, \gamma - \lambda^2 = 0$$

имеет два действительных корня $\pm\gamma_0$ и счетное множество мнимых корней $\pm\gamma_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Для изгибно-гравитационных волн под упругой пластиной дисперсионное соотношение

$$K_2(\mu) \equiv (\beta\mu^4 + 1 - \delta)\mu\, \mathrm{th}\, \mu - \lambda^2 = 0$$

имеет два действительных корня $\pm\mu_0$, четыре комплексных корня, которые обозначим $\pm\mu_{-1}$, $\pm\mu_{-2}$, $\mu_{-2} = -\bar{\mu}_{-1}$ (черта означает операцию комплексного сопряжения), и счетное множество чисто мнимых корней $\pm\mu_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда корни дисперсионных соотношений (5) соответственно равны $\pm\chi_m$, $\pm\alpha_m$:

$$\chi_m = \sqrt{\gamma_m^2 - s^2}, \qquad \alpha_m = \sqrt{\mu_m^2 - s^2}.$$

Далее будем использовать значения корней в верхней полуплоскости. Если $|s| < \gamma_0$, то χ_0 — вещественный корень, в противном случае все корни чисто мнимые. Если $|s| < \mu_0$, то α_0 — вещественный корень, в противном случае все корни комплексные.

При $x \to -\infty$ функция $\Phi_-(\alpha, s, z)$ представляет собой линейную комбинацию функций вида

$$\mathrm{e}^{-i(\chi_m x + sy)}\, \mathrm{ch}\,(\gamma_m(z + 1))/\,\mathrm{ch}\,(\gamma_m).$$

Следовательно, она аналитична во всей нижней полуплоскости $\mathrm{Im}\,(\alpha) < \sigma_1$, за исключением возможного вещественного полюса в точке χ_0 ($\sigma_1 = |\chi_1|$ при $s \leqslant \gamma_0$, $\sigma_1 = |\chi_0|$ при $s > \gamma_0$). При $x \to \infty$ функция $\Phi_+(\alpha, s, z)$ представляет собой линейную комбинацию функций вида

$$\mathrm{e}^{i(\alpha_m x - sy)} \,\mathrm{ch}\,(\mu_m(z+1))/\,\mathrm{ch}\,(\mu_m).$$

Следовательно, она аналитична во всей верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,(\alpha) > -\sigma_2$, за исключением возможного вещественного полюса в точке α_0 ($\sigma_2 = \min|\,\mathrm{Im}\,(\alpha_m)|$, $m \neq 0$ при $s \leqslant \mu_0$, $\sigma_2 = |\,\mathrm{Im}\,(\alpha_0)|$ при $s > \mu_0$).

Исключая из соотношений (3), (4) $C(\alpha, s)$, выводим уравнение

$$G_-(\alpha, s) - i\lambda F(\alpha, s)\,\mathrm{e}^{i\alpha x_0} = D_+(\alpha, s) K(\alpha, s), \qquad K(\alpha, s) = K_2(\alpha, s)/K_1(\alpha, s). \tag{6}$$

В соответствии с методом Винера — Хопфа факторизуем функцию $K(\alpha, s)$:

$$K(\alpha, s) = K_-(\alpha, s) K_+(\alpha, s)$$

(функции K_- и K_+ аналитичны по α соответственно в нижней и верхней полуплоскостях). Функции $K_\pm(\alpha, s)$ определяются формулами

$$K_\pm(\alpha, s) = \frac{(\alpha \pm \alpha_{-1})(\alpha \pm \alpha_{-2})}{\mu_{-1}\mu_{-2}} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha \pm \alpha_j)\gamma_j}{\mu_j(\alpha \pm \chi_j)}.$$

Разделив левую и правую части уравнения (6) на $K_-(\alpha, s)$, получаем

$$\frac{G_-(\alpha, s)}{K_-(\alpha, s)} - i\lambda\, \frac{F(\alpha, s)\,\mathrm{e}^{i\alpha x_0}}{K_-(\alpha, s)} = D_+(\alpha, s) K_+(\alpha, s).$$

С использованием представления [20]

$$\frac{F(\alpha, s)\,\mathrm{e}^{i\alpha x_0}}{K_-(\alpha, s)} = L_-(\alpha, s) + L_+(\alpha, s), \qquad L_\pm(\alpha, s) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty \mp i\sigma}^{\infty \mp i\sigma} \frac{F(\zeta)\,\mathrm{e}^{i\zeta x_0}}{K_-(\zeta, s)(\zeta - \alpha)}\, d\zeta,$$

где функции $L_\pm$ аналитичны по α соответственно в верхней и нижней полуплоскостях; $\sigma < \min(\sigma_1, \sigma_2)$, получаем уравнение

$$\frac{G_-(\alpha, s)}{K_-(\alpha, s)} - i\lambda L_-(\alpha, s) = D_+(\alpha, s) K_+(\alpha, s) + i\lambda L_+(\alpha, s),$$

в левой части которого содержится функция, аналитическая в нижней полуплоскости, а в правой части — функция, аналитическая в верхней полуплоскости. Следовательно, эти функции представляют аналитическую функцию во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля данная функция является полиномом, степень которого определяется поведением функции на бесконечности по α. Имеем

$$K_\pm(\alpha, s) = O(|\alpha|^2), \qquad L_\pm(\alpha, s) = O(|\alpha|^{-1}).$$

Вблизи кромки пластины градиент потенциала имеет интегрируемую особенность $O(r^{-\eta})$ ($\eta < 1$; r — расстояние до кромки пластины). Тогда при $|\alpha| \to \infty$

$$G_-(\alpha, s) = O(|\alpha|^{\eta+3}), \qquad D_+(\alpha, s) = O(|\alpha|^{\eta-1}).$$

Следовательно, степень полинома равна единице и

$$D_+(\alpha, s) K_+(\alpha, s) + i\lambda L_+(\alpha, s) = i(b_1(s)\alpha + b_2(s)),$$

где $b_1(s)$, $b_2(s)$ — неизвестные функции, которые определяются из условий на кромке пластины.

В результате получаем

$$\Phi(\alpha,s,z)=i\,\frac{(b_1\alpha+b_2-\lambda L_+(\alpha,s))Z(\alpha,s,z)}{K_+(\alpha,s)K_1(\alpha,s)},$$

$$\Phi(x,s,z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}(b_1\alpha+b_2-\lambda L_+(\alpha,s))Z(\alpha,s,z)}{K_+(\alpha,s)K_1(\alpha,s)}\,d\alpha,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,s,0)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}(b_1\alpha+b_2-\lambda L_+(\alpha,s))\sqrt{\alpha^2+s^2}\ \mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2+s^2}\,)}{K_+(\alpha,s)K_1(\alpha,s)}\,d\alpha.$$

Домножая при $x>0$ числитель и знаменатель последнего подынтегрального выражения на $K_-(\alpha,s)$, находим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,s,0)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\alpha(x_0-x)}\,F(\alpha,s)\sqrt{\alpha^2+s^2}\ \mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2+s^2}\,)}{K_2(\alpha,s)}\,d\alpha-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-i\alpha x}(b_1\alpha+b_2+\lambda L_-(\alpha,s))\sqrt{\alpha^2+s^2}\ \mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha^2+s^2}\,)K_-(\alpha,s)}{K_2(\alpha,s)}\,d\alpha.$$

Все интегралы по α вычисляем с помощью теории вычетов:

$$L_-(\alpha,s)=-\sum_{m=-2}^{\infty}\frac{F(\alpha_m,s)\,\mathrm{e}^{i\alpha_m x_0}}{K_-'(\alpha_m,s)(\alpha_m-\alpha)},\qquad K_-'(\alpha_m,s)=\frac{K_2'(\alpha_m,s)}{K_+(\alpha_m,s)K_1(\alpha_m,s)}.\tag{7}$$

Краевые условия на кромке пластины запишем в виде

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\nu s^2\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial z}(0,s,0)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(2-\nu)\,s^2\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial z}(0,s,0)=0.$$

Подставляя в эти условия выражение для потенциала и вычисляя интегралы с помощью теории вычетов, получаем систему уравнений для определения функций $b_1(s)$, $b_2(s)$

$$\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{(\alpha_j^2+\nu s^2)\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\ \mathrm{th}\big(\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\big)K_+(\alpha_j,s)(-b_1\alpha_j+b_2+\lambda L_-(-\alpha_j,s))}{K_2'(\alpha_j,s)}-$$

$$-\lambda\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{(\alpha_j^2+\nu s^2)\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\ \mathrm{th}\big(\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\big)F(\alpha_j,s)\,\mathrm{e}^{i\alpha_j x_0}}{K_2'(\alpha_j,s)}=0,$$

$$\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\alpha_j(\alpha_j^2+(2-\nu)s^2)\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\ \mathrm{th}\big(\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\big)K_+(\alpha_j,s)(-b_1\alpha_j+b_2+\lambda L_-(-\alpha_j,s))}{K_2'(\alpha_j,s)}+$$

$$+\lambda\sum_{j=-2}^{\infty}\frac{\alpha_j(\alpha_j^2+(2-\nu)s^2)\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\ \mathrm{th}\big(\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\big)F(\alpha_j,s)\,\mathrm{e}^{i\alpha_j x_0}}{K_2'(\alpha_j,s)}=0.$$

Ряды по j можно вычислить точно. Выполним подстановку

$$\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\ \mathrm{th}\big(\sqrt{\alpha_j^2+s^2}\,\big)=-\frac{K_1(\alpha_j,s)}{\beta(\alpha_j^2+s^2)^2-\delta}\tag{8}$$

и преобразуем полученные соотношения, выражая их через вычеты в корнях многочлена в знаменателе формулы (8):

$$\eta_k = \pm(\pm\sqrt{\delta/\beta} - s^2)^{1/2}.$$

Учитывая, что $K_+(-\eta_k, s) = K_-(\eta_k, s) = 1/K_+(\eta_k, s)$, так как $K(\eta_k, s) = 1$, получаем систему линейных алгебраических уравнений второго порядка

$$\sum_{j=1}^{2} A_{ij} b_j = B_i, \qquad i = 1, 2, \tag{9}$$

где

$$A_{11} = -\frac{1}{4\beta} \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k^2 + s^2} \Big(K_+(\eta_k, s) + \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \Big),$$

$$A_{12} = \frac{1}{4\beta} \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k(\eta_k^2 + s^2)} \Big(K_+(\eta_k, s) - \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \Big),$$

$$A_{21} = -\frac{1}{4\beta} \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k(\eta_k^2 + (2-\nu)s^2)}{\eta_k^2 + s^2} \Big(K_+(\eta_k, s) - \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \Big),$$

$$A_{22} = \frac{1}{4\beta} \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + (2-\nu)s^2}{\eta_k^2 + s^2} \Big(K_+(\eta_k, s) + \frac{1}{K_+(\eta_k, s)} \Big).$$

В случае параболической нагрузки

$$F(\alpha, s) = 4\pi \, \frac{J_2(a\sqrt{\alpha^2 + s^2}\,)}{\alpha^2 + s^2},$$

$$B_1 = \frac{\pi\lambda}{\beta} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m x_0} \, J_2(a\mu_m)}{\mu_m^2 K'_-(\alpha_m, s)} \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + \nu s^2}{\eta_k(\eta_k^2 + s^2)} \Big(\frac{1}{K_+(\eta_k, s)(\eta_k - \alpha_m)} + \frac{K_+(\eta_k, s)}{\eta_k + \alpha_m} \Big),$$

$$B_2 = -\frac{\pi\lambda}{\beta} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_m x_0} \, J_2(a\mu_m)}{\mu_m^2 K'_-(\alpha_m, s)} \sum_{k=1}^{2} \frac{\eta_k^2 + (2-\nu)s^2}{\eta_k^2 + s^2} \Big(\frac{1}{K_+(\eta_k, s)(\eta_k - \alpha_m)} - \frac{K_+(\eta_k, s)}{\eta_k + \alpha_m} \Big).$$

В этих выражениях ряды сходятся по экспоненциальному закону.

При $s = (\delta/\beta)^{1/4}$ коэффициенты A_{12} и B_1 имеют корневую особенность, $\eta_1 = 0$. Поэтому первое уравнение в (9) умножим на $\sqrt{\delta/\beta - s^2}$. Решив систему (9), находим прогиб пластины и возвышение свободной поверхности. При $x > 0$

$$W(x, y) = \frac{i}{\pi\lambda} \int_0^{\infty} \cos(sy) \sum_{j=-2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\alpha_j x}(-b_1\alpha_j + b_2 + \lambda L_-(-\alpha_j, s))}{K'_-(\alpha_j, s)(\beta\mu_j^4 - \delta)} \, ds + {}$$
$$+ 2 \int_0^{\infty} \frac{J_0(\zeta r_0) J_2(a\zeta) \operatorname{th}\zeta}{K_2(\zeta)} \, d\zeta, \qquad r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}. \tag{10}$$

Так как $\alpha_0 = 0$ при $s = \mu_0$, то выражение (7) для $L_-(-\alpha_0, s)$ содержит корневую интегрируемую особенность. В результате замен $s = \mu_0 \sin\zeta$ при $|s| < \mu_0$ и $s = \mu_0 \operatorname{ch}\zeta$ при $s > \mu_0$

подынтегральная функция в первом интеграле выражения (10) становится регулярной. При $x < 0$

$$W(x,y) = -\frac{i\lambda}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos(sy)\sum_{j=0}^\infty \frac{\mathrm{e}^{-i\chi_j x}\,\gamma_j(b_1\chi_j + b_2 - \lambda L_+(\chi_j, s))}{\chi_j K_+(\chi_j, s)K_1'(\gamma_j)}\,ds.$$

При обращении преобразования Фурье подынтегральные функции экспоненциально затухают при $s \to \infty$.

Как и в случае мелкой воды [19], при некоторых значениях входных параметров возможно существование колебаний, локализованных вблизи области действующей нагрузки и экспоненциально затухающих вдали от нее. При $x_0 \gg 1$ главную часть правых частей системы (9) составляют нулевые члены, остальные члены малы. Если $a\mu_0 = j_2$ (j_2 — один из нулей функции $J_2(x)$), то действующая нагрузка ортогональна распространяющейся моде. В этом случае вблизи области действия нагрузки наблюдаются колебания пластины в форме стоячих волн. Пример локализованных колебаний приведен в работе [19] для случая мелкой воды. В случае конечной глубины получены аналогичные результаты.

Найдем асимптотику дальнего поля. Используя асимптотику функций Бесселя при больших аргументах, второй член в формуле (10) при $r_0 \to \infty$ представим в виде

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\zeta r_0)J_2(a\zeta)\,\mathrm{th}\,\zeta}{K_2(\zeta)}\,d\zeta = i\sqrt{\frac{2\pi}{\mu_0 r_0}}\,\frac{J_2(a\mu_0)\,\mathrm{th}\,(\mu_0)\,\mathrm{e}^{i(\mu_0 r_0 - \pi/4)}}{K_2'(\mu_0)} + o(r_0^{-1/2}).$$

В первом интеграле (10) основной вклад вносит нулевой член суммы на отрезке $[-\mu_0, \mu_0]$, так как остальные члены малы. Приведем первый член к виду

$$I_1 = -\frac{i\mu_0\,\mathrm{th}\,\mu_0}{2\pi\lambda}\int\limits_{-\mu_0}^{\mu_0} \frac{\mathrm{e}^{i(sy + x\sqrt{\mu_0^2 - s^2})}(-b_1\alpha_0 + b_2 + \lambda L_-(-\alpha_0, s))K_+(\alpha_0, s)}{K_2'(\alpha_0, s_0)}\,ds.$$

Выполнив в интеграле замену $s = \mu_0 \sin\zeta$, с использованием метода стационарной фазы получаем

$$I_1 = -\frac{i\mu_0^2\,\mathrm{th}\,\mu_0}{2\pi\lambda}\sqrt{\frac{2\pi}{\mu_0 r}}\,\mathrm{e}^{i(\mu_0 r - \pi/4)}\,\frac{b_2 - b_1\mu_0\cos\theta + \lambda L_-(-\mu_0\cos\theta, \mu_0\sin\theta)}{K_2'(\mu_0)}\times$$
$$\times K_+(\mu_0\cos\theta, \mu_0\sin\theta) + O(r^{-1}), \qquad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Для возвышения жидкости в дальнем поле аналогично получаем

$$W(r,\theta) = -\frac{i\lambda\gamma_0}{2\pi K_1'(\gamma_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_0 r}}\,\mathrm{e}^{i(\gamma_0 r - \pi/4)}\,\frac{b_1\gamma_0\cos\theta + b_2 - \lambda L_+(\gamma_0\cos\theta, \gamma_0\sin\theta)}{K_+(\gamma_0\cos\theta, \gamma_0\sin\theta)} + O(r^{-1}),$$
$$r \to \infty, \qquad x < 0.$$

Таким образом, для амплитуд прогибов пластины и возвышения жидкости в дальнем поле справедлива формула

$$|W(r,\theta)| = A(\theta)/\sqrt{r} + O(r^{-1}).$$

3. Результаты численных расчетов. Проведены численные расчеты для полубесконечного ледяного покрова при следующих параметрах задачи: $E = 6$ ГПа, $h = 2$ м, $\rho = 1025$ кг/м^3, $\rho_0 = 922{,}5$ кг/м^3, $\nu = 0{,}3$, $a = 25$ м, $x_0 = 50$ м. Глубина жидкости и частота действующей нагрузки менялись.

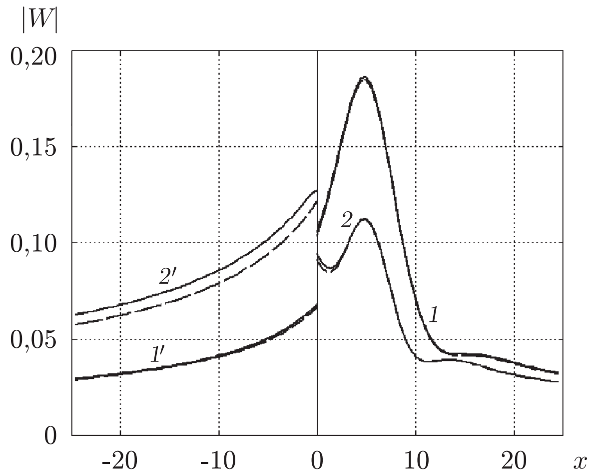

Рис. 1

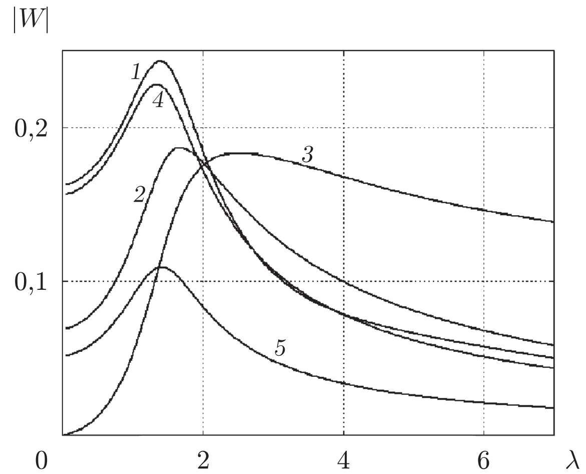

Рис. 2

Рис. 1. Зависимости амплитуд прогиба пластины (*1*, *2*) и возвышения жидкости (*1*′, *2*′) от координаты x в случае модели жидкости конечной глубины (сплошные линии) и в случае модели мелкой воды (штриховые линии) без учета осадки ($H = 10$ м):
1, *1*′ — $\omega = 0{,}2$ с$^{-1}$, *2*, *2*′ — $\omega = 0{,}5$ с$^{-1}$

Рис. 2. Зависимости от частоты амплитуд прогиба полубесконечной пластины в центре области приложения нагрузки (*1*) и на кромке (в начале координат) (*2*), возвышения жидкости вблизи кромки полубесконечной пластины (*3*), а также амплитуды прогиба бесконечной пластины в центре области приложения нагрузки (*4*) и на расстоянии x_0 от него (*5*)

Проведено сравнение результатов расчетов, выполненных в данной работе при малой глубине жидкости и малых частотах, и соответствующих результатов, полученных с использованием теории мелкой воды [19]. На рис. 1 приведены зависимости амплитуды прогиба пластины и возвышения жидкости от координаты x ($y = 0$), а также результаты расчетов, выполненных с помощью теории мелкой воды без учета осадки пластины в воду при $H = 10$ м, $\omega = 0{,}2$; $0{,}5$ с$^{-1}$. Видно, что при малых частотах кривые совпадают, а при увеличении частоты наблюдается расхождение, особенно для амплитуд возвышения жидкости. Результаты расчетов для малых глубин приведены в [19], ниже приводятся результаты расчетов для толщины слоя жидкости, равной 100 м.

Проведенные расчеты показали, что в зависимости от положения нагрузки и частоты максимальные амплитуды прогибов пластины возникают в центре области нагружения или на кромке пластины. Если нагрузка сосредоточена вблизи кромки, то максимальные прогибы наблюдаются на ней. На рис. 2 приведены зависимости амплитуд прогиба пластины в центре области нагружения и начале координат, а также возвышения жидкости в начале координат от частоты при толщине слоя жидкости $H = 100$ м. Для сравнения приведены амплитуды колебаний бесконечной пластины в центре области нагружения и на расстоянии x_0 от него. Видно, что зависимости амплитуды колебаний от частоты являются немонотонными. В случае полубесконечной пластины амплитуды колебаний имеют максимумы приблизительно при тех же частотах, что и в случае бесконечной пластины. Из рис. 2 следует, что при малых частотах колеблется в основном пластина, при увеличении частоты вовлекается в движение жидкость, а при высоких частотах основная энергия колебательного движения передается в жидкость.

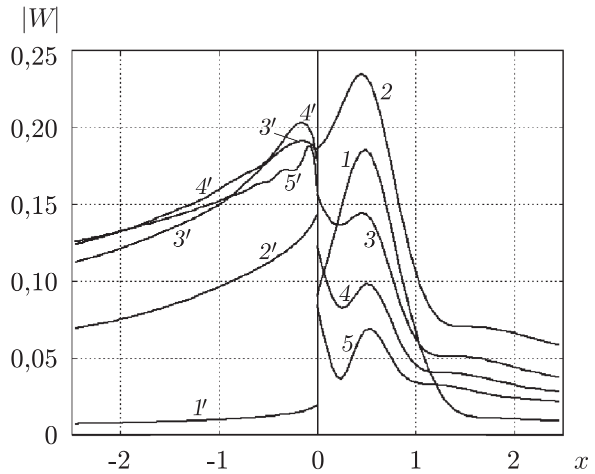

Рис. 3. Зависимости амплитуд прогиба пластины (*1–5*) и возвышения жидкости (*1′–5′*) от координаты x при различных значениях частоты:
1, 1′ — $\omega = 0{,}2$ с$^{-1}$, *2, 2′* — $\omega = 0{,}5$ с$^{-1}$, *3, 3′* — $\omega = 0{,}75$ с$^{-1}$, *4, 4′* — $\omega = 1$ с$^{-1}$, *5, 5′* — $\omega = 1{,}5$ с$^{-1}$

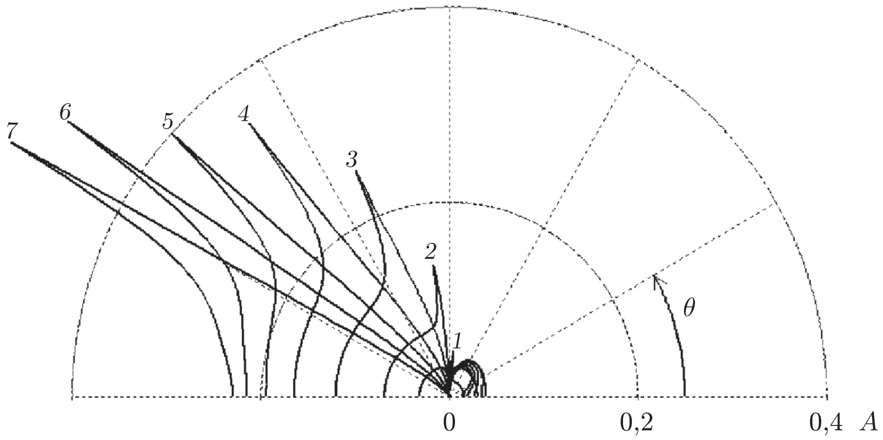

Рис. 4. Главный член асимптотики амплитуд прогиба пластины и возвышения жидкости в дальнем поле (функция $A(\theta)$) при различных значениях частоты:
1 — $\omega = 0{,}3$ с$^{-1}$, *2* — $\omega = 0{,}4$ с$^{-1}$, *3* — $\omega = 0{,}5$ с$^{-1}$, *4* — $\omega = 0{,}6$ с$^{-1}$, *5* — $\omega = 0{,}7$ с$^{-1}$, *6* — $\omega = 0{,}8$ с$^{-1}$, *7* — $\omega = 0{,}9$ с$^{-1}$

На рис. 3 показаны зависимости амплитуд прогибов пластины и возвышения жидкости от координаты x при $y = 0$ и $\omega = 0{,}20$; $0{,}50$; $0{,}75$; $1{,}00$; $1{,}50$ с$^{-1}$. На рис. 4 в полярной системе координат представлены главные члены асимптотики амплитуд прогибов пластины и возвышения жидкости в дальнем поле (диаграмма направленности) при различных частотах. Видно, что распространение волн в дальнем поле происходит неравномерно по углу. Выделяются направления, в которых распространение волн происходит со значительно большей амплитудой, чем в других направлениях. При малых частотах ($\omega = 0{,}3$ с$^{-1}$) волны с максимальной амплитудой распространяются в определенных направлениях в пластине, при остальных частотах — в определенных направлениях в жидкости.

На рис. 5, 6 показаны изолинии амплитуд колебаний пластины и жидкости при $\omega = 0{,}5$; $1{,}0$ с$^{-1}$ в ближнем и дальнем полях. Видно, что в ближнем поле изгибно-

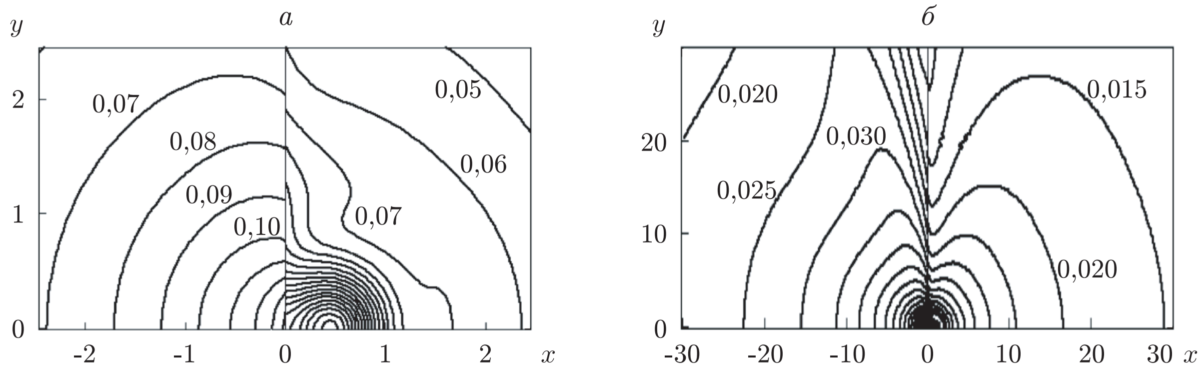

Рис. 5. Изолинии амплитуд возвышения жидкости (*слева*) и прогиба пластины (*справа*) при $\omega = 0{,}5$ с$^{-1}$, $H = 100$ м:

а — ближнее поле с шагом между изолиниями 0,01 (на пластине — от 0,05 до 0,26, в жидкости — от 0,07 до 0,14), *б* — дальнее поле с шагом между изолиниями 0,005

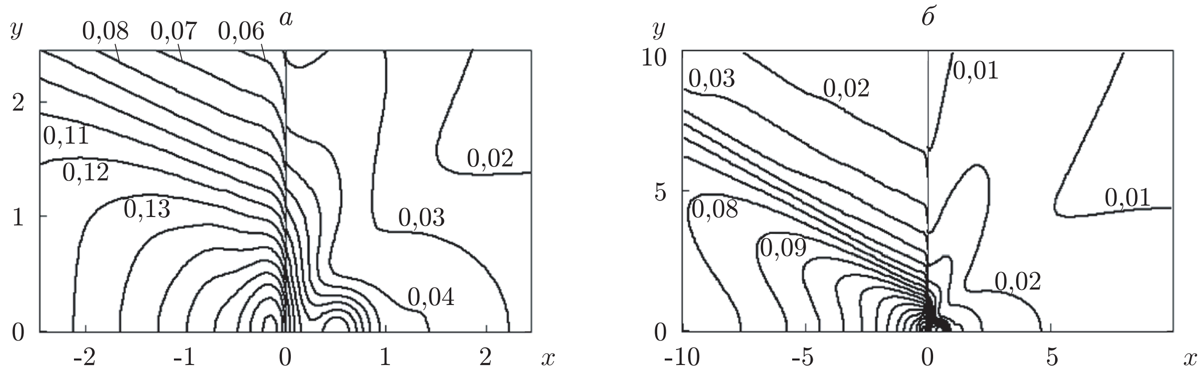

Рис. 6. Изолинии амплитуд возвышения жидкости (*слева*) и прогиба пластины (*справа*) при $\omega = 1$ с$^{-1}$, $H = 100$ м с шагом 0,01 (на пластине — от 0,01 до 0,12, в жидкости — от 0,02 до 0,20):

а — ближнее поле, *б* — дальнее поле

гравитационные волны в основном распространяются вдоль края пластины, так как он свободен. Однако в дальнем поле волны преимущественно распространяются под углом к краю, поскольку при заданной частоте моды, распространяющиеся в пластине и жидкости, имеют разные волновые числа, так как удовлетворяют различным дисперсионным соотношениям. Расчеты показали, что вдоль кромки действительные и мнимые значения прогибов пластины и возвышения жидкости осциллируют и имеют приблизительно одинаковые длины волн, близкие к длине изгибно-гравитационных волн в пластине.

Если область приложенной нагрузки расположена вблизи края пластины, то амплитуды колебаний пластины и жидкости значительно больше, чем при удалении ее от края.

Заключение. Получено аналитическое решение задачи о воздействии локальной области периодического по времени давления осесимметричного вида на упругую полубесконечную пластину, плавающую на поверхности жидкости конечной глубины. Проанализировано поведение амплитуд колебаний пластины и жидкости в зависимости от частоты и расстояния от центра области нагружения. Зависимость амплитуды колебаний пластины от частоты является немонотонной, максимум наблюдается приблизительно на тех же частотах, что и в случае бесконечной пластины. При увеличении частоты амплитуды колебаний пластины уменьшаются, амплитуды колебаний жидкости становятся значительно больше амплитуд колебаний пластины. В дальнем поле выделяются направления, в которых волны распространяются со значительно большей амплитудой, чем в других направлениях. При малых частотах волны с максимальной амплитудой распространяются в определенных направлениях в пластине, а при больших — в жидкости.

Автор выражает благодарность И. В. Стуровой за предложенную задачу и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
2. **Черкесов Л. В.** Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973.
3. **Squire V. A.** Moving loads on ice plates / V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, et al. Dordrecht: Kluwer, 1996.
4. **Козин В. М.** Прикладные задачи динамики ледяного покрова / В. М. Козин, В. Д. Жесткая, А. В. Погорелова, С. Д. Чижиумов, М. Р. Джабраилов, В. С. Морозов, А. Н. Кустов. М.: Акад. естествознания, 2008.
5. **Bukatov A. E., Zharkov V. V.** Formation of the ice cover's flexural oscillations by action of surface and internal ship waves. Pt 1. Surface waves // Intern. J. Offshore Polar Engng. 1997. V. 7, N 1. P. 1–12.
6. **Squire V. A.** Synergies between VLFS hydroelasticity and sea ice research // Intern. J. Offshore Polar Engng. 2008. V. 18, N 4. P. 241–253.
7. **Lu D. Q., Dai S. Q.** Generation of transient waves by impulsive disturbances in an inviscid fluid with an ice-cover // Arch. Appl. Mech. 2006. V. 76, N 1/2. P. 49–63.
8. **Pogorelova A. V., Kozin V. M., Matiushina A. A.** Critical stresses of ice cover as fracture criterion during takeoff and landing of an airplane // Proc. of the 11th Pacific/Asia off-shore mechanics symp. PACOMS 2014, Shanghai (China), Oct. 12–16, 2014. San Francisco: Intern. Soc. Offshore Polar Engng, 2014. P. 121–126.
9. **Погорелова А. В., Козин В. М.** Движение нагрузки по плавающей пластине при переменной глубине водоема // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 168–179.
10. **Коузов Д. П.** Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 6. С. 1037–1043.
11. **Марченко А. В.** Дифракция поверхностных волн на трещине в ледяном покрове // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 2. С. 93–102.
12. **Марченко А. В.** Дифракция изгибно-гравитационных волн на линейных неоднородностях в ледяном покрове // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 4. С. 97–112.
13. **Evans D. V., Porter R.** Wave scattering by narrow cracks in ice sheets floating on water of finite depth // J. Fluid Mech. 2003. V. 484. P. 143–165.
14. **Жесткая В. Д., Козин В. М.** Исследования напряженно-деформированного состояния полубесконечного ледяного покрова под действием движущейся нагрузки // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 112–117.
15. **Стурова И. В.** Воздействие периодических поверхностных давлений на плавающую упругую платформу // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 75–86.
16. **Стурова И. В.** Влияние периодического поверхностного давления на прямоугольную упругую пластину, плавающую на мелководье // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 3. С. 417–426.
17. **Kashiwagi M.** Transient responses of a VLFS during landing and take-off of an airplane // J. Marine Sci. Technol. 2004. V. 9, N 1. P. 14–23.

18. **Shishmarev K. A., Khabakhpasheva T. I., Korobkin A. A.** The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Res. 2016. V. 59. P. 313–326.
19. **Ткачева Л. А.** Колебания ледяного покрова под действием локальной периодической по времени нагрузки // Материалы 45-го Всерос. симп., посвящ. 70-летию Победы: Механика и процессы управления. Т. 1, г. Миасс, 22–24 дек. 2015 г. М.: Изд-во РАН, 2015. С. 102–113.
20. **Нобл Б.** Метод Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию 16/VI 2016 г.,
в окончательном варианте — 27/VII 2016 г.