

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ
ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ВДОЛЬ ОСИ

В. И. Розенблюм

(Ленинград)

Одномерные осесимметричные решения уравнений ползучести [1-3] широко используются в технике для расчета цилиндрических труб, оболочек, роторов. Соответствующие задачи рассматривались как для равномерно нагретых тел, так и для случаев, когда температура зависит от расстояния r до оси симметрии. Ниже приводятся некоторые решения для другого часто встречающегося в приложениях случая установившейся ползучести, когда температура изменяется в осевом направлении.

1. Рассмотрим ползучесть длинного полого кругового цилиндра, нагруженного равномерным давлением на внутренней ($r = b$) и на наружной ($r = a$) поверхностях

$$\sigma_r = -p \quad \text{при } r = b, \quad \sigma_r = -q \quad \text{при } r = a \quad (1.1)$$

На торцах цилиндра приложена осевая сила

$$P = 2\pi \int_b^a \sigma_z r \, dr \quad (1.2)$$

Уравнения равновесия в цилиндрических координатах r, φ, z имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = -R(r), \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

где $R(r)$ — радиальная составляющая массовых сил.

Уравнения установившейся ползучести неравномерно нагретого тела возьмем в виде [1]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma + 2g\dot{\epsilon}_r, & \sigma_\varphi &= \sigma + 2g\dot{\epsilon}_\varphi, & \sigma_z &= \sigma + 2g\dot{\epsilon}_z \\ \tau_{rz} &= g\dot{\gamma}_{rz} \quad \left(\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z) \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

«Модуль ползучести» $g = g(H, \theta)$ зависит от интенсивности скоростей деформации

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\varphi)^2 + (\dot{\epsilon}_\varphi - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r)^2 + \frac{3}{2} \dot{\gamma}_{rz}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

и от температуры θ . В дальнейшем воспользуемся степенным законом

$$g(H, \theta) = B^* H^{\mu-1} \quad (1.6)$$

и примем, что имеет место «простая зависимость» от температуры [1], т. е. что температура влияет только на коэффициент B^* . Наиболее распространена экспоненциальная зависимость, согласно которой в рассматриваемом случае следует положить

$$B^* = B_0^* e^{-\mu c \theta} \quad (1.7)$$

где B_0^* не зависит от температуры. Рассмотрим случай, когда температура не зависит от r и является линейной функцией z

$$\theta = \theta_0 + z\theta_1 \quad (1.8)$$

Тогда
$$g(H, \theta) = B^0 e^{-\mu \lambda z} H^{\mu-1} \quad (1.9)$$

Решение для этих условий можно получить, полагая, что σ_r , σ_φ , σ_z не зависят от z , что

$$\tau_{rz} = 0 \quad (1.10)$$

а также, что радиальная u и осевая w компоненты скорости ползучести имеют вид

$$u(r, z) = u_0(r) e^{\lambda z}, \quad w(r, z) = w_0(r) e^{\lambda z} \quad (1.11)$$

где $u_0(r)$ и $w_0(r)$ являются некоторыми функциями радиуса.

Согласно (1.10) и последнему соотношению (1.4) скорость сдвига

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

тождественно обращается в нуль; отсюда

$$\lambda u_0 + \frac{dw_0}{dr} = 0 \quad (1.12)$$

Подставляя в условие несжимаемости $\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi + \dot{\epsilon}_z = 0$ скорости деформации

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.13)$$

вычисленные на основании (1.11), получим

$$\frac{du_0}{dr} + \frac{u_0}{r} + \lambda w_0 = 0 \quad (1.14)$$

Исключая w_0 из (1.12), (1.14), приходим к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0}{dr} - (r^{-2} + \lambda^2) u_0 = 0$$

решение которого имеет вид

$$u_0(r) = C_1 I_1(\lambda r) + C_2 K_1(\lambda r) \quad (1.15)$$

где I_1, K_1 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода первого порядка. На основании (1.11), (1.13), (1.15) можно представить скорости деформации в следующем виде:

$$\dot{\epsilon}_r = e^{\lambda z} \dot{\epsilon}_r^\circ, \quad \dot{\epsilon}_\varphi = e^{\lambda z} \dot{\epsilon}_\varphi^\circ, \quad \dot{\epsilon}_z = e^{\lambda z} \dot{\epsilon}_z^\circ \quad (1.16)$$

где

$$\dot{\epsilon}_r^\circ = \frac{du_0}{dr} = C_1 \lambda \left[I_0(\lambda r) - \frac{I_1(\lambda r)}{\lambda r} \right] - C_2 \lambda \left[K_0(\lambda r) + \frac{K_1(\lambda r)}{\lambda r} \right] \quad (1.17)$$

$$\dot{\epsilon}_\varphi^\circ = \frac{u_0}{r} = C_1 \frac{I_1(\lambda r)}{r} + C_2 \frac{K_1(\lambda r)}{r}$$

$$\dot{\epsilon}_z^\circ = -\dot{\epsilon}_r^\circ - \dot{\epsilon}_\varphi^\circ = -C_1 \lambda I_0(\lambda r) + C_2 \lambda K_0(\lambda r)$$

Аналогично

$$H = e^{\lambda z} H_0 = e^{\lambda z} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(\dot{\epsilon}_r^\circ - \dot{\epsilon}_\varphi^\circ)^2 + (\dot{\epsilon}_\varphi^\circ - \dot{\epsilon}_z^\circ)^2 + (\dot{\epsilon}_z^\circ - \dot{\epsilon}_r^\circ)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.18)$$

При подстановке (1.16) в уравнения ползучести (1.4) вторые слагаемые в правых частях этих уравнений будут известными функциями радиуса r и постоянных интегрирования C_1, C_2 . Для определения σ подставим σ_r и σ_φ в первое уравнение равновесия (1.3)

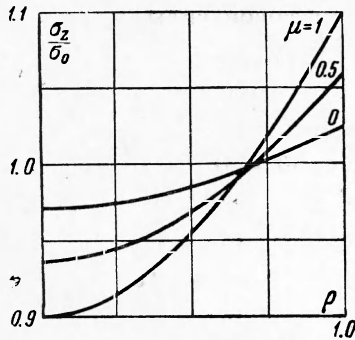
$$\frac{d\sigma}{dr} = -\frac{d}{dr} [2B^\circ H_0^{\mu-1} \dot{\epsilon}_r^\circ] + 2B^\circ H_0^{\mu-1} \frac{\dot{\epsilon}_\varphi^\circ - \dot{\epsilon}_r^\circ}{r} - R(r)$$

Отсюда

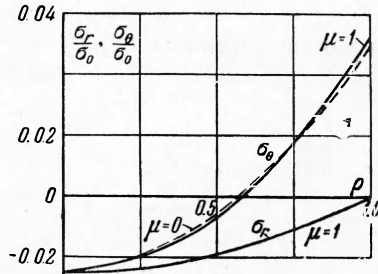
$$\sigma = -2B^\circ H_0^{\mu-1} \dot{\epsilon}_r^\circ + 2B^\circ \int H_0^{\mu-1} \frac{\dot{\epsilon}_\varphi^\circ - \dot{\epsilon}_r^\circ}{r} dr - \int R(r) dr + 2B^\circ C_3 \quad (1.19)$$

Постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из краевых условий (1.1), (1.2).

2. Рассмотрим задачу о растяжении осевой силой P сплошного цилиндрического стержня, температура которого переменна по длине. Для сплошного цилиндра следует положить $C_2 = 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Постоянная C_3 легко определяется из второго условия (1.1) (при $q = 0$)

$$C_3 = - \int_0^a H_0^{\mu-1} \frac{\dot{\epsilon}_\varphi^\circ - \dot{\epsilon}_r^\circ}{r} dr$$

При этом составляющие напряжения имеют вид

$$\sigma_r = -2B^\circ \int_r^a H_0^{\mu-1} \frac{\dot{\epsilon}_\varphi^\circ - \dot{\epsilon}_r^\circ}{r} dr, \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + 2B^\circ H_0^{\mu-1} (\dot{\epsilon}_\varphi^\circ - \dot{\epsilon}_r^\circ) \quad (2.1)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + 2B^\circ H_0^{\mu-1} (\dot{\epsilon}_z^\circ - \dot{\epsilon}_r^\circ)$$

Внося последнее выражение в условие (1.2) (при $b = 0$), находим последнюю неизвестную C_1

$$C_1^\mu = 3^{-\frac{\mu+1}{2}} \frac{\sigma_0}{B^\circ \kappa(\mu, l)} \quad (2.2)$$

где обозначено

$$\sigma_0 = \frac{P}{\pi a^2}, \quad l = \lambda a, \quad \kappa(\mu, l) = 3^{\frac{1-\mu}{2}} \frac{2^\mu l}{l^2} \int_0^l U^{\mu-1}(x) I_0(x) x^{2-\mu} dx$$

$$U(x) = [x^2 I_0^2(x) - x I_0(x) I_1(x) + I_1^2(x)]^{\frac{1}{2}}$$

Подставляя найденное значение C_1 в уравнения (2.1), получим окончательно

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_0} = -\frac{s_r(l, \mu, \rho)}{\kappa(\mu, l)}, \quad \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_0} = \frac{s_\varphi(l, \mu, \rho)}{\kappa(\mu, l)}, \quad \frac{\sigma_z}{\sigma_0} = \frac{s_z(l, \mu, \rho)}{\kappa(\mu, l)}, \quad \rho = \frac{r}{a} \quad (2.3)$$

где

$$s_r(l, \mu, \rho) = 3^{-\frac{\mu+1}{2}} 2^\mu \int_{l\rho}^l U^{\mu-1}(x) I_2(x) \frac{dx}{x^\mu}$$

$$s_\varphi(l, \mu, \rho) = -s_r(l, \mu, \rho) + 3^{-\frac{\mu+1}{2}} 2^\mu \left[\frac{U(l\rho)}{l\rho} \right]^{\mu-1} I_2(l\rho) \quad (2.4)$$

$$s_z(l, \mu, \rho) = -s_r(l, \mu, \rho) + 3^{-\frac{\mu+1}{2}} 2^\mu \left[\frac{U(l\rho)}{l\rho} \right]^{\mu-1} \left[2I_0(l\rho) - \frac{I_1(l\rho)}{l\rho} \right]$$

На фиг. 1, 2 показано распределение напряжений в стержне, вычисленное по этим формулам при $l = 0.8$.

3. Рассмотрим задачу о сплошном цилиндре со свободными торцами, вращающемся вокруг оси z с угловой скоростью ω (случай равномерно нагретого цилиндра рассмотрен в книге [1]).

Подставляя в уравнение (1.19) значение массовой силы

$$R(r) = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \quad (3.1)$$

и определяя постоянные C_1, C_3 из условий

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при } r = a, \quad 2\pi \int_0^a \sigma_z r dr = 0$$

приходим к решению

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{\sigma_*} &= \frac{s_r^i(l, \mu, \rho)}{\kappa(\mu, l)} + 2(1 - \rho^2), & \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_*} &= -\frac{s_\varphi(l, \mu, \rho)}{\kappa(\mu, l)} + 2(1 - \rho^2) \\ \frac{\sigma_z}{\sigma_*} &= -\frac{s_z(l, \mu, \rho)}{\kappa(\mu, l)} + 2(1 - \rho^2), & \sigma_* &= \frac{\gamma}{4g} \omega^2 a^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь функции $s_r, s_\varphi, s_z, \kappa$ определяются по зависимостям (2.4).

4. В случае цилиндра с центральным отверстием ($C_2 \neq 0$) определение постоянных интегрирования сводится к решению некоторой трансцендентной системы уравнений, которое, вообще говоря, может быть найдено только численными методами. Более наглядные результаты можно получить для тонкостенного цилиндра (цилиндрической оболочки). Хотя соответствующие уравнения представляют предельный случай приведенных выше зависимостей, однако целесообразнее вывести их непосредственно, основываясь на соотношениях теории оболочек.

Обозначая через σ_1, σ_2 осевую и окружную компоненты напряжений, получим усилия и моменты

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 d\zeta, & T_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 d\zeta \\ M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \zeta d\zeta \end{aligned} \quad (4.1)$$

которые связаны уравнениями равновесия

$$\frac{dT_1}{dz} = 0, \quad \frac{d^2 M_1}{dz^2} - \frac{T_2}{a} + p = 0 \quad (4.2)$$

Здесь h — толщина оболочки, a — средний радиус оболочки, ζ — расстояние от срединной поверхности по внешней нормали.

Учитывая, что $\sigma_3 = \sigma_r \approx 0$, из (1.4) получим

$$\sigma_1 = 2g(H, \theta)(2\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2), \quad \sigma_2 = 2g(H, \theta)(2\dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_1) \quad (4.3)$$

где $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$ — осевая и окружная компоненты скорости деформации, которые выражаются через скорость прогиба w по формулам

$$\dot{\epsilon}_1 = -\kappa \zeta + \dot{\epsilon}_0, \quad \dot{\epsilon}_2 = \frac{w}{a}, \quad \kappa = \frac{d^2 w}{dz^2} \quad (4.4)$$

при этом $\dot{\epsilon}_0$ — скорость относительного осевого удлинения срединной поверхности.

Полагая, аналогично предыдущему, $w = w_0 \exp \lambda z$, $\dot{\epsilon}_0 = \beta_0 \exp \lambda z$, найдем из (4.3), (1.9), что σ_1, σ_2 не зависят от z . При этом $d^2 M_1 / dz^2 = 0$ и уравнения равновесия можно представить в виде

$$T_1 = T_1^0 = \text{const}, \quad T_2 = ap \quad (4.5)$$

или, учитывая (4.1), (4.3), (4.4)

$$2B_0^{-\mu} \int_{-h/2}^{h/2} H_0^{\mu-1} \left[2(-\lambda^2 w_0 \zeta + \beta_0) + \frac{w_0}{a} \right] d\zeta = T_1^\circ \quad (4.6)$$

$$2B_0^{-\mu} \int_{-h/2}^{h/2} H_0^{\mu-1} \left[2\frac{w_0}{a} + (-\lambda^2 w_0 \zeta + \beta_0) \right] d\zeta = ap$$

где

$$H_0 = 2 \left[\lambda^4 w_0^2 \zeta^2 - \lambda^2 w_0 \zeta \left(2\beta_0 + \frac{w_0}{a} \right) + \left(\beta_0^2 + \beta_0 \frac{w_0}{a} + \frac{w_0^2}{a^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Из уравнений (4.6) определяются постоянные w_0, β_0 .

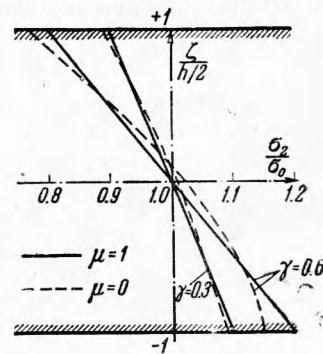
5. Если осевая сила отсутствует ($T_1^\circ = 0$), то первое уравнение (4.6) тождественно удовлетворяется при $\epsilon_0 = -1/2 \epsilon_2$ (или $\beta_0 = -w_0/2a$). Из второго уравнения (4.6) после некоторых преобразований находим

$$\frac{w_0}{w_*} = \frac{1}{\omega^m} \quad (5.1)$$

где

$$\omega = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{3} \gamma^2 s^2 \right)^{\frac{\mu-1}{2}} ds, \quad \frac{w_*}{a} = 3^{-\frac{m+1}{2}} B_0 \sigma_0^m \quad (5.2)$$

$$\gamma = \lambda^2 ah, \quad \sigma_0 = p \frac{a}{h}, \quad m = \frac{1}{\mu}$$



Фиг. 4

Очевидно, что w^* представляет скорость ползучести равномерно нагретой оболочки при температуре, соответствующей значению коэффициента B_0 .

Распределение напряжений определяется формулами

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = -\frac{2}{3\omega} \frac{2\zeta}{h} \gamma \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2\zeta}{h} \gamma \right)^2 \right]^{\frac{\mu-1}{2}} \quad (5.3)$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{2\zeta}{h} \gamma \right) \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2\zeta}{h} \gamma \right)^2 \right]^{\frac{\mu-1}{2}}$$

Графики распределения σ_1, σ_2 для $\gamma = 0.3, \gamma = 0.6$ показаны на фиг. 3,4. Как видно из этих графиков, температурный перепад вызывает заметное перераспределение напряжений.

Поступила 29 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
2. Работнов Ю. Н. О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести роторов. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.
3. Малинин Н. Н. Пластические деформации и ползучесть цельнокованных роторов. Сб. Расчеты на прочность. Машгиз, 1960, № 6.