

УДК 539.376

## ПАРАМЕТР ПОВРЕЖДЕННОСТИ Ю. Н. РАБОТНОВА И ОПИСАНИЕ ДЛИТЕЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ: РЕЗУЛЬТАТЫ, СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ, ПРИЛОЖЕНИЕ К МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН И ПЕРСПЕКТИВЫ

Л. В. Степанова, С. А. Игонин

Самарский государственный университет, 443011 Самара, Россия  
E-mails: stepanova1v@samsu.ru, sergeyigonin@yandex.ru

Приводится обзор литературы, которая посвящена исследованию проблем длительного разрушения и механики трещин и в которой развиваются гипотезы и идеи Ю. Н. Работнова и Л. М. Качанова о механизмах длительного разрушения в условиях ползучести, применяемые для описания процессов разрушения с помощью скалярной и тензорной мер поврежденности. Обсуждаются результаты современных исследований в области теории упругости, математической теории пластичности и ползучести, в механике композитных материалов, линейной и нелинейной механике разрушения, проведенных с учетом поврежденности материалов.

**Ключевые слова:** параметр поврежденности, тензорная мера поврежденности, длительное разрушение, ползучесть, континуальная механика поврежденности, компьютерное имитационное моделирование.

**1. Концепция длительного разрушения вследствие ползучести.** В опубликованной в 1959 г. работе Ю. Н. Работнова “О механизме длительного разрушения” [1] рассмотрены механизмы развития трещины и даны оценки длительной прочности на примере образца с трещиной, перпендикулярной направлению растяжения. В 1991 г. данная работа издана в сборнике Ю. Н. Работнова “Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела” [2]. В данной работе введена функция  $\omega$ , представляющая собой площадь трещин, приходящуюся на единицу площади поперечного сечения в данный момент времени. В случае плоской модели трещины скорость увеличения площади  $\omega$  равна скорости роста трещины  $v$ , т. е.  $\partial\omega/\partial t = v(\sigma)$ . В предположении, что трещина имеет форму окружности, получаем выражение  $d\omega/dt = \omega^{1/2}v(\sigma)$ , обобщая которое имеем

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega^\beta v(\sigma). \quad (1.1)$$

При нормальном напряжении  $\sigma_0$  среднее напряжение в сечении равно

$$\sigma = \sigma_0/(1 - \omega). \quad (1.2)$$

Формула (1.2) описывает увеличение напряжений в поврежденном материале, поскольку  $0 \leq \omega \leq 1$ . Вводя выражение (1.2) в (1.1), получаем дифференциальное уравнение относительно функции  $\omega(t)$ , где  $\sigma_0$  — заданная функция времени. В начальный момент времени  $t = 0$  функция  $\omega = 0$ , в момент разрушения  $t = T$   $\omega = 1$ . В случае если скорость роста

трещины представляет собой степенную функцию напряжения  $v = A\sigma^\alpha$ , уравнение (1.1) можно проинтегрировать. Разделяя переменные, можно получить уравнение

$$(1 - \omega)^\alpha \omega^{-\beta} d\omega = A\sigma_0^\alpha dt,$$

интегрируя которое находим

$$A \int_0^T \sigma_0^\alpha dt = \frac{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(2 + \alpha - \beta)},$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция, определяемая при  $z > 0$  соотношением

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau.$$

Следовательно,

$$\int_0^T \sigma^\alpha dt = C = \text{const}$$

и при постоянном напряжении справедливо равенство

$$T = C/\sigma_0^\alpha. \quad (1.3)$$

В [1] отмечается, что кривые длительной прочности при постоянном напряжении удовлетворительно описываются соотношением (1.3). Постоянные  $C$ ,  $\alpha$  определяются экспериментально путем обработки кривых длительной прочности, затем определяется длительная прочность  $\sigma_0$  при переменном напряжении.

В простейшем варианте поврежденность описывается некоторой скалярной величиной — структурным параметром Качанова  $0 \leq \psi \leq 1$  [3] или параметром поврежденности Работнова  $0 \leq \omega \leq 1$ . В начальном состоянии при  $\omega = 0$  (отсутствие поврежденности)  $\psi = 1$ ; с течением времени функция  $\psi$  убывает, поврежденность растет. Таким образом, можно считать, что  $\psi = 1 - \omega$ . Величину  $\omega$  можно интерпретировать как относительную площадь поперечного сечения, занятую трещинами, микропорами, микродефектами. В предположении, что скорость изменения параметра  $\dot{\omega}$  зависит от напряжения и от  $\omega$ , можно считать  $\omega$  одним из структурных параметров. Также полагается, что  $\dot{\omega}$  является степенной функцией отношения  $\sigma/(1 - \omega)$ , которое можно интерпретировать как среднее напряжение на площади поперечного сечения, свободной от трещин [2, 4]. Таким образом, согласно классической теории Качанова — Работнова текущее состояние внутренней поврежденности образца можно охарактеризовать с помощью единственного скалярного параметра (параметра поврежденности)  $\omega$ , который является монотонно возрастающей функцией времени  $0 \leq \omega \leq 1$ . Параметр поврежденности интерпретируется как относительное уменьшение площади поперечного сечения вследствие возникновения внутри образца микродефектов. Деградация материала обусловлена постепенным уменьшением эффективной площади, которая несет растягивающую нагрузку и определяет сопротивляемость образца растяжению. В силу этого несущая нагрузку площадь равна не  $S_0$ , а некоторому меньшему значению  $S$ , и для параметра  $\omega$  справедливо соотношение  $\omega = (S_0 - S)/S_0$ . Определенный таким образом параметр поврежденности представляет собой геометрическую характеристику текущего состояния поврежденности, и его изменение определяется свойствами материала и историей внешнего нагружения.

**2. Современное состояние проблемы.** В настоящее время разрушение (макроскопическое нарушение сплошности тела в результате воздействия на него внешних факторов) рассматривается с учетом процессов скрытого разрушения (зарождения и развития

микроразрывов в теле), которое исследуется с помощью методов и моделей механики поврежденности — динамично развивающегося раздела современной механики деформируемого твердого тела [5–46]. В последнее время большое количество работ [5–17] посвящается исследованию проблем компьютерного моделирования роста трещин и длительного разрушения с использованием различных мер поврежденности. В 2014 г. в силу востребованности вышло в свет второе издание фундаментальной работы Ю. Н. Работнова “Ползучесть элементов конструкций” [18]. Континуальная механика поврежденности основывается на том, что изменение со временем механических свойств материалов феноменологически можно интерпретировать как результат накопления повреждений, различных дефектов, микропор, трещин, при достижении которыми предельного опасного уровня происходит разрушение. Трещинообразование начинается на ранних этапах деформации и обусловлено ростом имеющихся и возникновением новых суб- и микродефектов. В материале всегда имеется большое число различных дефектов, вызывающих высокие локальные напряжения. Уменьшение прочности (сопротивления тела воздействиям внешних факторов) деформируемых твердых тел часто можно объяснить скрытым разрушением и наличием микродефектов. Таким образом, поскольку наличие повреждений тела существенно влияет на характер его разрушения, использование механики разрушения и механики поврежденности позволит решить важную задачу оценки запаса прочности твердого тела [19].

После появления работ Ю. Н. Работнова и Л. М. Качанова началась разработка моделей процессов разрушения с применением параметра поврежденности. В конце 70-х гг. XX в. моделирование роста трещины основывалось на предположении, что этот процесс происходит в случае, если некоторая мера поврежденности достигает критического значения на некотором расстоянии от вершины трещины. В [20, 21] при моделировании роста трещин использовался скалярный параметр поврежденности Качанова — Работнова. В [22] параметр поврежденности связывался с величиной пористости материала и предполагалось, что процесс накопления повреждений обусловлен совместным действием диффузионного и вязкого механизмов роста пор в условиях высокотемпературной ползучести. В [23] в качестве меры поврежденности материала принималась интенсивность накопленных деформаций ползучести. Модель, описывающая рост трещины в условиях ползучести, в общей постановке предложена в работе [24]. В этой модели предполагалось, что значение критической поврежденности материала не является постоянным, зависит от уровня напряжений и уменьшается при увеличении интенсивности напряжений. В 70–90-х гг. XX в. проводилось большое количество исследований с использованием идей континуальной механики поврежденности и параметра поврежденности (сплошности) Качанова — Работнова [25–29]. В настоящее время проблемы учета процессов накопления повреждений продолжают изучать представители различных научных школ. Можно выделить три основных направления развития континуальной механики поврежденности: 1) анализ взаимовлияния процессов накопления повреждений и эволюции напряженно-деформированного состояния в задачах нелинейной механики разрушения и вызванного накоплением повреждений изменения характера сингулярности поля напряжений вблизи вершины трещины [10, 19, 24, 30–35, 38, 39]; 2) компьютерное имитационное моделирование поврежденности и включение различных мер поврежденности в вычислительные комплексы, такие как “Simulia Abaqus” [5, 17, 40–48]; 3) введение тензорных мер поврежденности, учитывающих анизотропный характер накоплений повреждений в твердом теле [25, 49–52]. В настоящее время существуют различные подходы к моделированию анизотропной поврежденности. В [25] приведен достаточно полный библиографический список работ, посвященных изучению тензорных мер поврежденности и опубликованных до 1996 г. Ссылки на более поздние работы и способ представления анизотропной поврежденности с помощью тензора поврежденности второго ранга приведены в работе [19]. В целом литература, посвященная ис-

следованиям с помощью тензорных мер поврежденности, очень многообразна и обширна и заслуживает отдельного обсуждения. Рассмотрим более подробно первые два указанные направления.

2.1. *Связанные задачи нелинейной механики разрушения.* Двумерным задачам о стационарной и растущей полубесконечных трещинах в бесконечном теле в связанной постановке (упругость — поврежденность, пластичность — поврежденность, ползучесть — поврежденность) свойственны некоторые особенности. В работах [32–35] показано, что накопление повреждений приводит либо к полному устранению особенности напряжений в окрестности вершины трещины, либо к значительному ослаблению сингулярности поля напряжений (показатель степени  $\alpha$  в величине  $r^{-\alpha}$  уменьшается). В [34] установлено, что эффективные напряжения  $\sigma_{ij}/\psi$  ( $\psi$  — параметр сплошности Качанова — Работнова) ограничены при приближении к вершине трещины, а параметр сплошности и компоненты тензора напряжений при  $r \rightarrow 0$  по линейному закону уменьшаются до нуля. В работе [32] представлен асимптотический анализ полей напряжений и деформаций в окрестности растущей усталостной трещины в связанной постановке для линейно-упругих определяющих соотношений. Численное исследование полученной системы уравнений для различных значений констант  $m, n$ , входящих в кинетическое уравнение

$$\frac{d\psi}{dN} = \begin{cases} -c(\sigma_e/\psi)^m \psi^{m-n}, & \sigma_e \geq \sigma_{th}\psi, \\ 0, & \sigma_e < \sigma_{th}\psi, \end{cases} \quad (2.1)$$

задающее степенной закон накопления повреждений, показало, что связанность постановки задачи приводит к слабой сингулярности (по сравнению с классической асимптотикой линейной механики разрушения) поля напряжений при малых значениях  $m$  и  $n$ , тогда как при увеличении значений данных параметров особенность исчезает. (В (2.1)  $N$  — число циклов нагружения;  $c, \sigma_{th}, m, n$  — постоянные, определяемые экспериментальным путем.) В [10, 14] уточнены результаты проведенного в [32] численного анализа и найдено аналитическое решение задачи об усталостном росте трещины в среде с поврежденностью, согласно которому при малых значениях  $m, n$  особенность поля напряжений устраняется. Численное решение сформулированной системы дифференциальных уравнений и анализ угловых распределений компонент тензора напряжений позволяют найти аналитическое представление угловых распределений функции напряжений и сплошности вблизи вершины:

$$f(\theta) = \frac{\varkappa(\cos \theta)^{\mu+2}}{(\lambda+2)(\lambda+1)}, \quad g(\theta) = \varkappa^{m/(n+1)}(\cos \theta)^\mu, \quad \lambda = \mu = \frac{1}{1+n-m}.$$

Распределение напряжений и сплошности в зоне активного накопления повреждений ( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ) вблизи вершины усталостной трещины показано на рис. 1, 2 и имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \varkappa r^\lambda (\cos \theta)^{2+\mu}, & \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \varkappa r^\lambda \sin \theta (\cos \theta)^{\mu+1}, \\ \sigma_{rr}(r, \theta) &= \varkappa r^\lambda \sin^2 \theta \cos^\mu \theta, & \psi(r, \theta) &= \varkappa^{m/(n+1)} r^\lambda \cos^\mu \theta. \end{aligned}$$

В работах [36, 37], где проведено асимптотическое исследование стационарной трещины нормального отрыва в упругом нелинейно-вязком материале со степенной зависимостью между напряжениями и скоростями деформаций ползучести, учет влияния поврежденности также приводит к устранению особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины.

Следующей особенностью задач данного типа является наличие области полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности становятся равными нулю [10, 30–35]. В данных работах при численном определении коэффициентов асимптотических разложений компонент тензора напряжений и

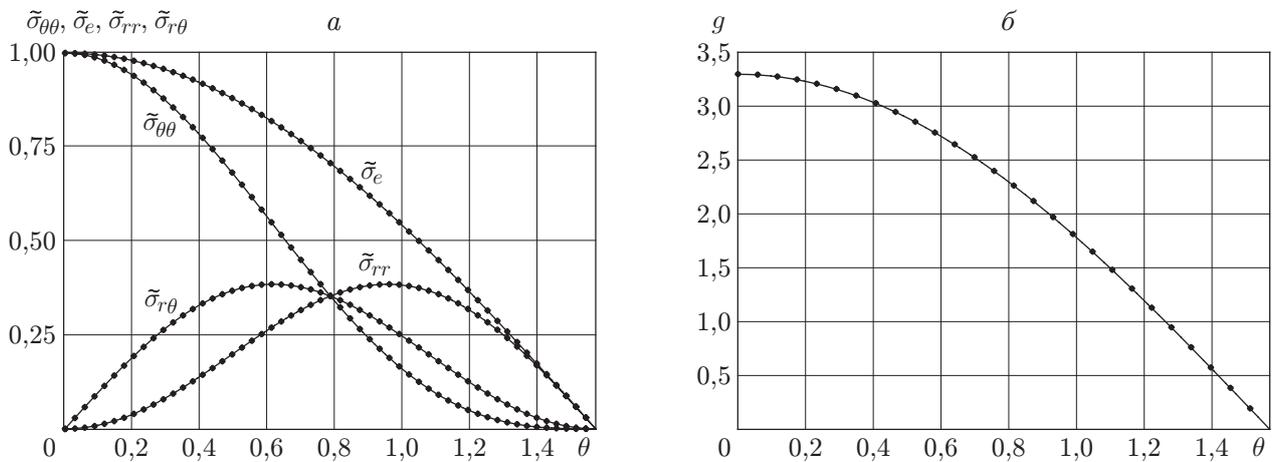


Рис. 1. Зависимости компонент тензора напряжений (а) и параметра сплошности  $g$  (б) от величины угла  $\theta$  в окрестности вершины трещины при  $m = 2, n = 2$ : сплошные линии — аналитическое решение, точки — численный расчет

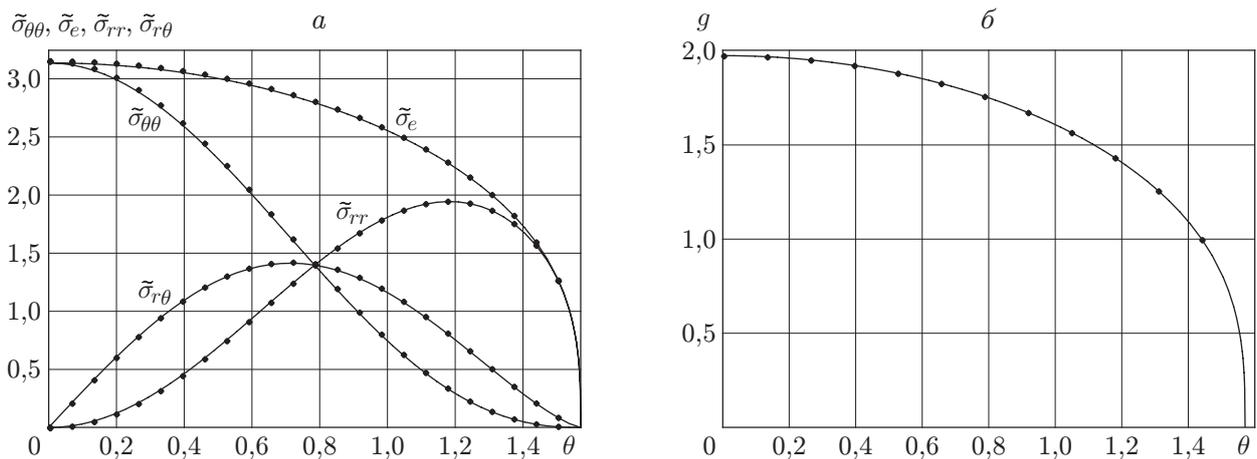


Рис. 2. Зависимости компонент тензора напряжений (а) и параметра сплошности  $g$  (б) от величины угла  $\theta$  в окрестности вершины трещины при  $m = 2, n = 4$ : сплошные линии — аналитическое решение, точки — численный расчет

сплошности (угловых распределений компонент тензора напряжений и параметра сплошности) установлено, что начиная с некоторого значения полярного угла  $\theta_d$  (значение  $\theta = \pi$  соответствует верхнему берегу трещины,  $\theta = 0$  — ее продолжению) функция, определяющая главный член асимптотического разложения параметра сплошности, принимает отрицательные значения. Это противоречит физическому смыслу данной величины, поэтому необходимо использовать модифицированную постановку задачи, согласно которой решение находится для значения  $0 \leq \theta \leq \theta_d$ . Область  $\theta_d \leq \theta \leq \pi$ , локализованная в окрестности вершины распространяющейся трещины, представляет собой полностью разрушенную зону, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности равны нулю, на границе введенных областей должны выполняться условия непрерывности функции сплошности и компонент тензора напряжений. Авторы работы [32] в силу невозможности выполнения граничных условий на берегах трещины перешли к модифицированной постановке задачи, введя область полностью разрушенного материала, примыкающую к берегам трещины. В [38, 39] исследованы асимптотические зависимости напряжений и па-

раметра сплошности от расстояния от вершины растущей трещины нормального отрыва до рассматриваемой точки и на основе экспериментальных данных сделано предположение, что граница области, в которой происходит процесс накопления повреждений, образована полуэллипсом и прямыми, параллельными берегам трещины. Задавая форму области процесса, можно определить асимптотические разложения компонент тензора напряжений и сплошности. Заметим, что в [38, 39] геометрия области процесса не определяется, а задается априори. Поэтому задача нахождения конфигурации областей полностью поврежденного материала либо области активного накопления повреждений вблизи вершины трещины не является полностью исследованной.

Одним из перспективных подходов к изучению взаимовлияния поврежденности и напряженно-деформированного состояния является использование свойства автомодельности процесса накопления повреждений в окрестности вершины трещины в материале со степенными определяющими соотношениями в среде, в которой кинетика накопления повреждений описывается уравнением Качанова — Работнова (или модификацией этого кинетического уравнения, предложенной в [53]). Следует отметить, что необходимо не только изучить накопление повреждений, но и рассмотреть взаимодействие процессов накопления повреждений и изменения напряженно-деформированного состояния на различных масштабных уровнях: от микро- до макроуровня. Исследования процессов накопления повреждений, проведенные как в России [5, 16], так и за рубежом [11, 22, 27, 28, 38, 39, 50, 51, 53, 54], показывают, что влияние параметров, описывающих накопление повреждений в малых масштабах, часто проявляется во всем диапазоне масштабов. С математической точки зрения главную роль при изучении многомасштабных явлений и численном решении рассматриваемых задач играет неполная автомодельность. Неполная автомодельность характерна для задачи о стационарной трещине в среде с поврежденностью, когда определяющие уравнения материала строятся на основе степенного закона ползучести с использованием концепции эффективного напряжения:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (3/2)B(\sigma_e/\psi)^{n-1}s_{ij}/\psi. \quad (2.2)$$

Здесь параметр сплошности  $\psi$  изменяется в соответствии со степенным законом накопления повреждений:

$$\dot{\psi} = -A(\sigma_e/\psi)^m. \quad (2.3)$$

Процесс активного накопления рассеянных повреждений происходит в непосредственной окрестности вершины трещины, где образуется область диспергированного материала [11, 30, 31]. На удалении от вершины трещины параметр сплошности  $\psi \rightarrow 1$ , что соответствует неповрежденному материалу и позволяет сформулировать асимптотическое граничное условие в бесконечно удаленной точке как условие асимптотического сближения с решением Хатчинсона — Райса — Розенгрена для степенного определяющего закона (2.2), где  $\psi \equiv 1$  (таким образом, рассматривается непосредственная окрестность вершины трещины). На основе гипотезы о незначительной поврежденности на больших расстояниях от вершины трещины (больших по сравнению с линейным размером области полностью поврежденного материала, но малых по сравнению с длиной трещины и линейным размером образца) поле напряжений определяется из решения Хатчинсона — Райса — Розенгрена:

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) = (C^*/(BI_n r))^{1/(n+1)}\bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (2.4)$$

где  $C^*$  — инвариантный интеграл теории установившейся ползучести. Анализ размерности величин, входящих в уравнения (2.2)–(2.4), позволяет установить, что для определяющих соотношений (2.2), кинетического уравнения (2.3), граничных условий (2.4) существует автомодельная переменная  $R = r(At)^{-(n+1)/m}BI_n/C^*$  и система уравнений задачи допускает автомодельное представление решения

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At)^{-1/m}\hat{\sigma}_{ij}(R, \theta), \quad \psi(r, \theta, t) = \hat{\psi}(R, \theta).$$

Следует отметить, что граничное условие в бесконечно удаленной точке можно записать в более общем по сравнению с (2.4) виде

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \theta, t) \rightarrow \tilde{C} r^s \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (2.5)$$

где показатель степени  $s$  подлежит определению в ходе решения задачи;  $\tilde{C}$  — амплитуда поля напряжений на бесконечности, определяемая геометрией реального образца и системой приложенных нагрузок. Для (2.2), (2.3), (2.5) существует автомодельная переменная  $R = r(At\tilde{C}^m)^{1/(sm)}$  (автомодельные решения, основанные на введении автомодельных переменных, степени которых должны быть определены в ходе решения задачи, относятся к автомодельным решениям второго рода и удовлетворяют неполной автомодельности по переменной  $R$ ).

Асимптотическое решение задачи вне области диспергированного материала, формирующейся вблизи вершины трещины (на больших расстояниях от вершины трещины  $R \rightarrow \infty$ ), ищется в форме

$$\chi(R, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} R^{\lambda_k+1} f_k(\theta), \quad \psi(R, \theta) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} R^{\gamma_k} g_k(\theta), \quad (2.6)$$

где параметры  $\lambda_k - 1 < 0$ ,  $\gamma_k < 0$ ,  $f_k(\theta)$ ,  $g_k(\theta)$  подлежат определению в ходе решения задачи. Асимптотическое решение задачи, базирующееся на представлении (2.6), приведено в [30]. Конфигурации области полностью поврежденного материала вблизи вершины трещины нормального отрыва и трещины поперечного сдвига показаны на рис. 3. После возврата к исходным переменным поле напряжений вне области полностью поврежденного материала определяется с помощью равенства

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (At)^{-1/m} \tilde{C} (R^{\lambda-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta) + R^{\lambda_1-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta) + R^{\lambda_2-1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}(\theta) + \dots), \quad (2.7)$$

где  $R = r(At\tilde{C}^m)^{1/((\lambda-1)m)}$ . Особенностью полученного представления является зависимость поля напряжений только от одного амплитудного множителя  $\tilde{C}$ , учитывающего влияние геометрии образца и системы приложенных нагрузок. Поэтому для нахождения поля

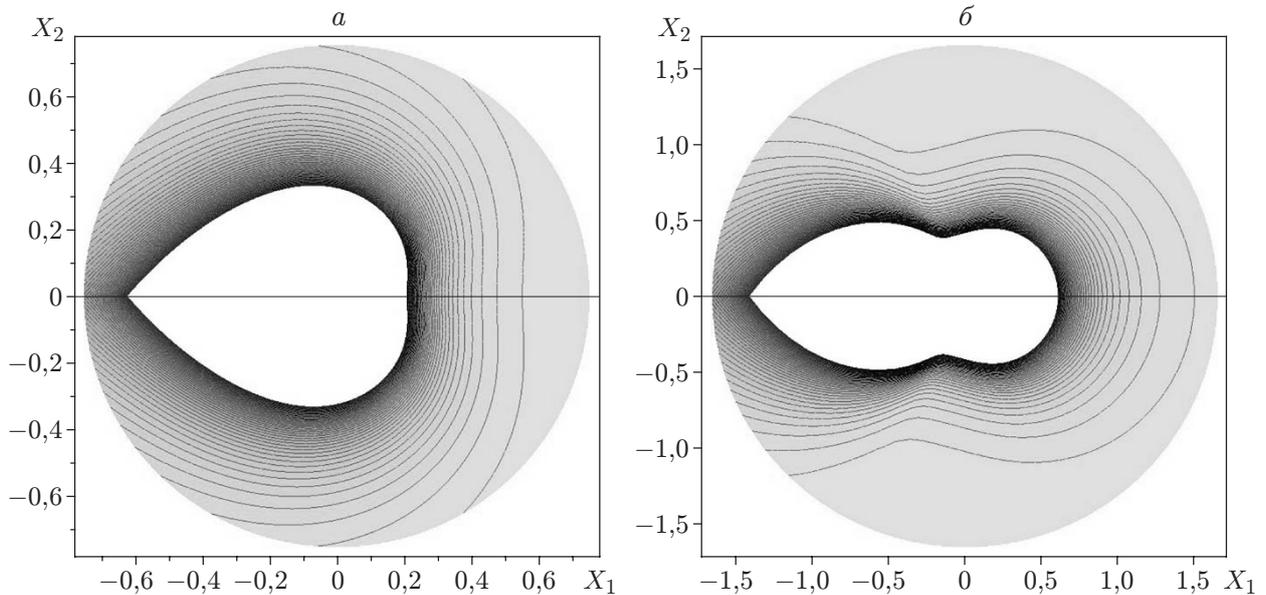


Рис. 3. Геометрия области полностью поврежденного материала вблизи вершины трещины нормального отрыва (а) и трещины поперечного сдвига (б)

напряжений вблизи вершины трещины достаточно определить один масштабный множитель (амплитудный коэффициент)  $\tilde{C}$ . В традиционной механике трещин используется подход, приводящий к задаче нахождения трех или более коэффициентов асимптотических разложений поля напряжений. В последнее время в нелинейной механике разрушения, одной из задач которой является определение напряженно-деформированного состояния в непосредственной окрестности вершины трещины, большое внимание уделяется построению приближений высшего порядка в асимптотических разложениях механических величин (полей напряжений, деформаций и перемещений) в окрестности вершины трещины в нелинейных материалах.

Для материалов, поведение которых описывается степенным законом установившейся ползучести  $\dot{\epsilon}_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2$ , асимптотические разложения компонент тензора напряжений можно представить в виде

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = (C^*/(BI_n r))^{1/(n+1)}\sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 r^{s_2-1}\sigma_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 r^{s_3-1}\sigma_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots \quad (2.8)$$

Первое слагаемое в (2.8) называется решением Хатчинсона — Райса — Розенгрена. Используемый в (2.8)  $C^*$ -интеграл определяется равенством

$$C^* = \int_{\Gamma} (\dot{W} dx_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} ds),$$

где  $\dot{W} = \int_0^{\dot{\epsilon}_{kl}} \sigma_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{n}{n+1} \sigma_e \dot{\epsilon}_e$ . Анализ асимптотического выражения интенсивности на-

пряжений позволяет установить, что в (2.8) показатели степеней связаны между собой:  $s_3 - s_1 = 2(s_2 - s_1)$ . Асимптотический анализ трехчленного асимптотического разложения компонент тензора напряжений (2.8) и интенсивности касательных напряжений показывает, что константы  $A_2, A_3$  не являются независимыми:  $A_3/A_1 = (A_2/A_1)^2$ . В литературе имеется большое число оценок инвариантного  $C^*$ -интеграла, полученных для различных образцов, наиболее часто используемых в экспериментах. Однако остается нерешенной проблема определения второго коэффициента  $A_2$  в асимптотических разложениях. Естественно предположить, что в общем случае  $A_2$  является функцией приложенных нагрузок, геометрических характеристик образца и показателя нелинейности материала  $n$ . Определение этого коэффициента является важной задачей нелинейной механики разрушения, поскольку даже оценки, приведенные в справочной литературе, дают существенную погрешность. Например, для образца с односторонним боковым надрезом для инвариантного  $C^*$ -интеграла имеется оценка  $C^* = B\sigma_0\epsilon_0 W(1-a)ah_1(P/P_0)$ , где  $P_0 = 1,4555\eta W(1-a)\sigma_0$ ;  $h_1$  — безразмерная функция приложенной нагрузки и геометрии образца. Более точные вычисления, проведенные в последнее время, показали, что значения функции  $h_1$  могут отличаться от значений, приведенных в справочниках, более чем на 100%. Следовательно, использование вычислительных комплексов, таких как “Abaqus”, позволяет получить более точные оценки параметров механики разрушения. Предельные значения амплитудных коэффициентов, входящих в формулы для полей напряжений в области вершины трещины, являются характеристиками сопротивления материала разрушению. Для нахождения постоянной  $A_2$  применяются различные подходы, использующие конечно-элементный расчет для образцов различной конфигурации при различных условиях нагружения. В общем случае исследование данной проблемы не является математически завершенным и требует объединения известных результатов в единый справочник, подобный справочникам, содержащим оценки коэффициентов интенсивности напряжений и  $J$ -интеграла.

Наряду с описанным выше подходом используется асимптотическое представление механических полей вблизи вершины трещины (2.7), содержащее лишь один амплитудный

множитель, что значительно упрощает решение задачи. Один амплитудный фактор  $\tilde{C}$  можно определить путем включения скалярного параметра сплошности (поврежденности) в расчетные комплексы, с помощью которых осуществляется конечно-элементный анализ.

2.2. *Включение мер поврежденности в САЕ-системы.* В последнее время большое внимание уделяется компьютерному моделированию процессов деформирования поврежденности и континуального разрушения нелинейных материалов и конструкций [5, 6, 17] с использованием скалярной или тензорной меры поврежденности. При построении математических моделей нелинейного деформирования и поврежденности материалов и прогнозировании на их основе прочности и долговечности элементов конструкций используются конечно-элементные решения задач определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций с учетом процессов накопления повреждений. Основной подход базируется на встраивании в многоцелевую программу инженерного анализа “Simulia Abaqus” процедуры, позволяющей учитывать влияние накопления повреждений на напряженно-деформированное состояние в модельном образце или реальном элементе конструкции. При этом часто используемые скалярный параметр поврежденности и симметричный тензор поврежденности Вакуленко — Качанова второго ранга включаются в определяющие соотношения теории упругости и теории установившейся ползучести для описания взаимного влияния процессов накопления повреждений и эволюции напряженно-деформированного состояния в образце. Внедрение программного комплекса “Simulia Abaqus” в инженерную практику позволяет с помощью процедуры UMAT включить в конечно-элементное решение, получаемое в комплексе “Simulia Abaqus”, кинетическое уравнение накопления повреждений и определяющие соотношения, содержащие параметр поврежденности [42, 43]. В работе [42] проведено исследование влияния переменной нагрузки на эволюцию поврежденности в пластине. Текущее состояние поврежденности в материале образца характеризуется симметричным тензором поврежденности второго ранга Вакуленко — Качанова. Физические свойства материала описываются с помощью тензора  $A_{ijkl}$ , представляющего собой функцию компонент тензора поврежденности  $D$  и материальных констант неповрежденного материала при текущей температуре — модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ :

$$A_{ijkl} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{D_1}{4(1+D_1)E} (\delta_{jk} D_{il} + \delta_{il} D_{jk} + \delta_{jl} D_{ik}). \quad (2.9)$$

Здесь  $D_{ij}$  — компоненты тензора поврежденности;  $D_1$  — главное значение тензора поврежденности. Распределение параметра поврежденности  $D_1$  показано на рис. 4.

Энергетическая модель континуального разрушения хрупких сред реализована в САЕ-системе “Simulia Abaqus” в работе [43]. В конце 90-х гг. XX в. в работе [55] была разработана модель сплошной повреждающейся среды; в этой модели параметр поврежденности ассоциируется с необратимыми потерями термомеханической энергии, связанными с образованием новых поверхностей при развитии микротрещин. В рассматриваемой модели кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\tau\beta} \left\langle \frac{du(e, \omega)}{d\omega} \right\rangle, \quad \langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где  $e$  — тензор малых деформаций;  $u(e, \omega)$  — сумма упругого потенциала и поверхностной энергии микротрещин;  $\tau$  — время релаксации;  $\beta > 0$  — константа. Из кинетического уравнения (2.10) следует, что скорость накопления поврежденности определяется балансом работы, которую нужно затратить на образование новых поверхностей, и освобождающейся упругой энергии. Если величина выделяющейся упругой энергии больше энергии, затрачиваемой на образование новых микротрещин, то поврежденность  $\omega$  будет

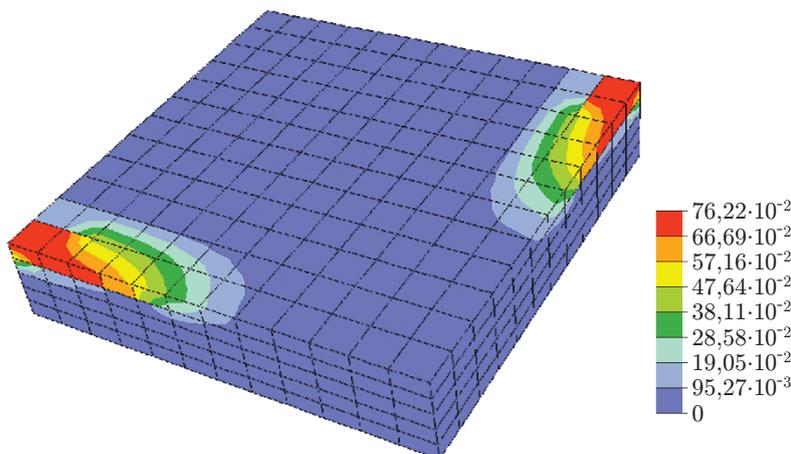


Рис. 4. Распределение параметра поврежденности  $D_1$  в образце [42]

накапливаться. Рассмотренная модель континуального разрушения реализована в “Simulia Abaqus 6.9” с помощью пользовательских подпрограмм UMAT и VUMAT и протестирована на характерных задачах. В [43] проведена серия расчетов для квазистатической задачи о накоплении повреждений вблизи цилиндрической и сферической полостей. Результаты численного решения тестовых задач хорошо согласуются с теоретическими оценками, что позволяет использовать рассмотренную модель в различных приложениях [45]. Решению связанных задач континуального разрушения термо- и пороупругих сред с использованием “Simulia Abaqus” посвящена работа [44]. В работах [44, 45, 47] модель Качанова — Работнова обобщена на случай насыщенной пористой среды с повреждаемым скелетом. Рассмотренная модель континуального разрушения реализована в “Simulia Abaqus 6.9” с учетом процессов переноса для одного флюида. Выявлены некоторые ограничения применения пользовательских подпрограмм для решения задач континуального разрушения с учетом неизоэнтальной фильтрации [46].

В [48] показано, каким образом вычислительная механика поврежденности может быть использована для прогнозирования поведения элементов конструкций (сосудов под высоким давлением) в условиях эксплуатации. В этой работе для расчета поврежденности сварного соединения (цилиндр — цилиндр) критерий разрушения применен для решения задачи в трехмерной постановке.

**Заключение.** Цикл исследований Ю. Н. Работнова, открытый работами [1, 2, 4], вместе с работами Л. М. Качанова положил начало новому направлению механики деформируемого твердого тела — континуальной механике поврежденности. Континуальная механика поврежденности позволяет феноменологически, с помощью осредненного параметра поврежденности описать эволюцию рассеянных дефектов — микротрещин, число которых в любом элементарном объеме полагается достаточно большим. В последнее время в этом подходе поврежденность используется в качестве дополнительного термодинамического параметра.

Приведенный обзор литературы, который, безусловно, не может быть исчерпывающим вследствие большого количества направлений, использующих представления механики поврежденности, позволяет предположить, что теоретические идеи и представления континуальной механики поврежденности будут развиваться путем создания математических моделей накопления повреждений на макро-, мезо- и микроуровнях, поскольку процесс накопления повреждений является многомасштабным и многоуровневым. Эффективным средством решения рассматриваемых задач является неполная автомодельность. Напри-

мер, в работе [30] на основе автомоделного представления решения задачи о накоплении повреждений в твердом теле и введения автомоделной промежуточной асимптотики получен закон скейлинга (многомасштабности) накопления повреждений.

По-видимому, дальнейшее развитие механики поврежденности будет связано с разработкой комплекса вычислительных программ, позволяющих оценить напряженно-деформированное состояние в элементах конструкции, определить конфигурацию зон локализации необратимых деформаций и зон активного накопления повреждений, а следовательно, получить оптимальные характеристики элементов конструкций, а также с реализацией имитационного (компьютерного) моделирования на основе экспериментальных и теоретических исследований для модельных и используемых в теплоэнергетике, авиа- и автомобилестроении элементов конструкций, что позволит сформулировать критерии разрушения, учитывающие изменение свойств материала в процессе эксплуатации элемента конструкции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
2. **Работнов Ю. Н.** Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1991.
3. **Качанов Л. М.** О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. С. 26–31.
4. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
5. **Кукуджанов В. Н.** Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 2008.
6. **Kukudzhanov V. N.** Numerical continuum mechanics. Berlin: De Gruyer, 2012.
7. **Wen J.-F., Tu S.-T., Gao X. L., Reddy J. N.** Simulation of creep crack growth in 316 stainless steel using a novel creep-damage model // Engng Fracture Mech. 2013. V. 98. P. 169–184.
8. **Kim E.-H., Rim M.-S., Hwang T.-K.** Composite damage model based on continuum damage mechanics and low velocity impact analysis of composite plates // Composite Structures. 2013. V. 95. P. 123–134.
9. **Zhao L., Jing H., Xu L., et al.** Numerical investigation of factors affecting creep damage accumulation in ASME P92 steel welded joint // Material Design. 2012. V. 34. P. 566–575.
10. **Степанова Л. В.** Уточненный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью // Вестн. Сам. гос. ун-та. 2011. № 83. С. 105–115.
11. **Murakami S.** Continuum damage mechanics. A continuum mechanics approach to the analysis of damage and fracture. Dordrecht: Springer, 2012.
12. **Kuna M.** Finite elements in fracture mechanics. Theory — numerics — applications. Dordrecht: Springer, 2013.
13. **Voyiadis G. Z., Kattan P. I.** Damage mechanics with finite elements: practical applications with computer tools. Dordrecht: Springer, 2012.
14. **Адылина Е. М., Игонин С. А., Степанова Л. В.** О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины // Вестн. Сам. гос. ун-та. 2012. № 3.1. С. 83–102.
15. **Riedel H.** Creep crack initiation and growth // Encyclopedia of materials: Science and technology. Oxford: Elsevier, 2001. P. 1767–1773.

16. **Волков И. А.** Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями / И. А. Волков, Ю. Г. Коротких. М.: Физматлит, 2008.
17. **Королев И. К., Петин С. В., Фрейдин А. Б.** Численное моделирование накопления повреждений и развития усталостной трещины в упругих материалах // Вычисл. механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 3. С. 34–43.
18. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 2014.
19. **Астафьев В. И.** Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. Самара: Сам. гос. ун-т, 2001.
20. **Астафьев В. И.** О росте трещин при ползучести с учетом пластической зоны вблизи вершины трещины // ПМТФ. 1979. № 6. С. 154–158.
21. **Kubo S., Ohji K., Ogura K.** An analysis of creep crack propagation on the basis of the plastic singular stress field // Engng Fracture Mech. 1979. V. 11. P. 315–329.
22. **Riedel H.** The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the growth and coalescence of microvoids // Creep in structures. Berlin: Springer, 1981. P. 504–519.
23. **Cocks A. C. F., Ashby M. F.** The growth of dominant crack in a creeping material // Scripta Metallurg. 1982. V. 16. P. 109–114.
24. **Астафьев В. И.** Закономерности подрастания трещин в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 127–134.
25. **Krajcinovic D.** Damage mechanics. Amsterdam: Elsevier Sci., 1996.
26. **Lemaitre J. A.** Course on damage mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
27. **Lemaitre J. A., Desmorat R.** Engineering damage mechanics: Ductile, creep, fatigue and brittle failures. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
28. **Chaboche J. L.** Phenomenological aspects of continuum damage mechanics // Proc. of the 17th congress of theoretical and applied mechanics, Grenoble, 21–27 Aug. 1988 / Ed. by P. German, M. Piau, D. Caillerie. Grenoble: Elsevier Sci. Publ., 1989. P. 41–56.
29. **Kachanov L. M.** Introduction to continuum damage mechanics. Dordrecht; Boston: Martinus Nijhoff, 1986.
30. **Степанова Л. В.** Математические методы механики разрушения. М.: Физматлит, 2009.
31. **Степанова Л. В., Федина М. Е.** Автомодельное решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной постановке (ползучесть — поврежденность) // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 114–123.
32. **Zhao J., Zhao X.** The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // Engng Fracture Mech. 1995. V. 50, N 1. P. 131–141.
33. **Zhao J., Zhang X.** On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage // Intern. J. Fracture. 2001. V. 108. P. 383–395.
34. **Астафьев В. И., Григорова Т. В., Пастухов В. А.** Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести // Физ.-хим. механика материалов. 1992. Т. 28, № 1. С. 5–11.
35. **Астафьев В. И., Григорова Т. В.** Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 3. С. 160–166.
36. **Lee S. B., Lu M., Kim J. Y.** An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage. Pt 1. Small damage region around the crack tip // Intern. J. Solids Struct. 1997. V. 34, iss. 24. P. 3163–3178.
37. **Lee S. B., Lu M., Kim J. Y.** An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage. Pt 2. Large damage region around the crack tip // Intern. J. Solids Struct. 1997. V. 34, iss. 10. P. 1183–1197.

38. **Murakami S., Hirano T., Liu Y.** Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth // Intern. J. Solids Struct. 2000. N 37. P. 6203–6220.
39. **Murakami S., Liu Y., Mizuno M.** Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2000. V. 183. P. 15–33.
40. **Кукуджанов В. Н.** Связанные модели упругопластичности и поврежденности и их интегрирование // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006. № 6. С. 103–135.
41. **Кукуджанов В. Н., Левитин А. Л., Синюк В. С.** Численно-аналитический метод расщепления для моделирования квазистатических процессов деформирования повреждающихся материалов // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 2006. Вып. 68. С. 7–21.
42. **Mika P.** Influence of variable load on damage evolution in the plate structures // Proc. of the 15th Intern. conf. on computer methods in mechanics CMM-2003: Short papers, Gliwice, June 3–6, 2003. Gliwice: Silesian Tech. Univ., 2003. P. 253–254.
43. **Извеков О. Я., Селицкий А. А., Крупеник А. М.** Реализация энергетической модели континуального разрушения хрупких сред в SIMULIA/ABAQUS 6.9. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://www.thesis.com/software/abaqus/abaqus-exp.php>.
44. **Извеков О. Я., Крупеник А. М.** Решение связанных задач континуального разрушения термо- и пороупругих сред в SIMULIA ABAQUS. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://www.thesis.com/software/abaqus/abaqus-exp.php>.
45. **Извеков О. Я., Кондауров В. И.** Модель пористой среды с упругим трещиноватым скелетом // Изв. РАН. Физика Земли. 2009. № 4. С. 31–42.
46. **Кондауров В. И.** Механика и термодинамика насыщенной пористой среды. М.: Моск. физ.-техн. ун-т, 2007.
47. **Извеков О. Я., Кондауров В. И.** О рассеянном разрушении пористых материалов с хрупким скелетом // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 3. С. 164–187.
48. **Hayhurst D. R.** CDM mechanisms-based modelling of tertiary creep: ability to predict the life of engineering components // Arch. Mech. 2005. V. 57. P. 103–132.
49. **Радаев Ю. Н.** Континуальные модели поврежденности твердых тел: Дис. д-ра физ.-мат. наук. М., 1999.
50. **Voyiadjis G. Z.** Advances in damage mechanics: metals and metal matrix composites / G. Z. Voyiadjis, P. I. Kattan. Oxford: Elsevier, 2006.
51. **Voyiadjis G. Z.** Handbook of damage mechanics. Nano to macro scale for materials and structures. Dordrecht: Springer, 2014.
52. **Litewka A., Lis Z.** Creep damage and creep rupture of metals // Applied stress analysis / Ed. by T. H. Hyde, E. Ollerton. L.: Elsevier, 1990. P. 201–210.
53. **Riedel H.** Fracture at high temperature. Berlin: Springer, 1987.
54. **Бьюи Х. Д.** Механика разрушения: Обратные задачи и решения. М.: Физматлит, 2011.
55. **Кондауров В. И.** Основы термомеханики конденсированных сред / В. И. Кондауров, В. Е. Фортов. М.: Моск. физ.-техн. ун-т, 2002.

*Поступила в редакцию 21/V 2013 г.,  
в окончательном варианте — 31/III 2014 г.*