ЛИТЕРАТУРА

1. **Попов В. В.** Течение вязкой пленки по поверхности невязкой жидкости.— ПМТФ, 1982, № 2.
2. **Рейнер М.** Деформация и течение. М.: Гостоптехиздат, 1963.
3. **Буевич Ю. А., Скуратов В. К.** О растяжении прядомой жидкости под действием собственного веса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5.
4. **Narayanaswamy O. S.** A one-dimensional model of stretching float glass.— J. Amer. Ceram. Soc., 1977, vol. 60, N 1—2.
5. **Trouton F. T.** On the coefficient of viscous traction and its relation to that of viscosity.— Proc. Roy. Soc. Lond., 1906, vol. 77A, N 519.

УДК 532.546

ОТБОР ЖИДКОСТИ ИЗ ДЕФОРМИРУЕМОГО ПЛАСТА ЧЕРЕЗ ВЫСОКОПРОНИЦАЕМОЕ ОКНО

А. В. Колмогоров, В. Н. Николаевский

(*Якутск, Москва*)

1. В осесимметричном случае система уравнений упругонористого насыщенного жидкостью пласта состоит [1] из уравнений движения для твердой фазы:

$$\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} g \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{1.1}$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} g \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$\varepsilon = (1-m_0)\beta_1 K, \quad g = (1-\varepsilon)(1-2\nu)[2G(1-m_0)(1-\nu)]^{-1},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

уравнений движения жидкости:

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = -m_0\left(w_r - \frac{\partial u_r}{\partial t}\right), \quad \frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} = -m_0\left(w_z - \frac{\partial u_z}{\partial t}\right) \tag{1.2}$$

и уравнений неразрывности для твердой и жидкой фаз:

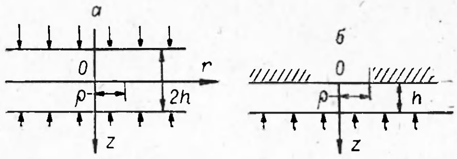
$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\beta_1}{3}\frac{\partial \theta^f}{\partial t} - \beta_1(1-m_0)\frac{\partial p}{\partial t} - (1-m_0)\frac{\partial e}{\partial t} = 0; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \beta_2 m_0 \frac{\partial p}{\partial t} - m_0\left(\frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = 0; \tag{1.4}$$

$$\theta^f = \sigma^f_{rr} + \sigma^f_{\theta\theta} + \sigma^f_{zz} = 2G(1-m_0)(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}e + 3\varepsilon p. \tag{1.5}$$

Здесь переменными являются отклонения от стационарных значений величин и приняты следующие обозначения: m — пористость (m_0 — ее начальное значение); u_i — компонента перемещения твердой фазы; w_i — компонента скорости движения жидкости; e — объемная деформация твердой фазы: p — поровое давление; σ_{ij} — напряжение в твердой фазе; σ^f_{ij} — эффективное напряжение Терцаги; θ^f — его первый инвариант; k — проницаемость; μ — вязкость жидкости; β_1 и β_2 — коэффициенты сжимаемости материала твердой и жидкой фаз; K, G, ν — модули сжатия, сдвига и коэффициент Пуассона матрицы пласта.

Пусть вязкая жидкость отбирается из замкнутого пласта радиуса R и мощности $2h$ через плоскую горизонтальную трещину радиуса ρ с дебитом $Q(t)$. В случае высокоэффективного крупномасштабного гидроразрыва [2] радиус ρ может быть сравним с R и значительно превосходить h. Для упрощения примем, что депрессия в пласте из-за отбора жидкости не вызывает изменения полного напряжения, иначе говоря, горного давления Γ_{ij}^0, действующего на внешние контуры пласта со стороны вмещающих массивов. Соответственно на границах пласт — массив $\Gamma_{ij}^0 = \mathrm{const}$ и приращения горного давления равны нулю: $\Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^f - p\delta_{ij} = 0$.



Фиг. 1

Систему координат выберем так, чтобы начало совпадало с центром трещины и пласта (фиг. 1, *а*). В силу симметричности граничных условий можно ограничиться рассмотрением области $z \geqslant 0$, т. е. рассматриваемая задача соответствует также отбору жидкости через трещину в кровле или в подошве пласта мощности h (фиг. 1, *б*).

2. Граничные условия для бесконечного пласта имеют вид

$$\Gamma_{zz} = 0, \quad \sigma_{rz}^f = 0, \quad \partial p/\partial z = 0 \qquad (z = h,\ 0 \leqslant r < \infty); \tag{2.1}$$

$$\sigma_{rz}^f = 0, \quad u_z = 0 \qquad (z = 0,\ 0 \leqslant r < \infty); \tag{2.2}$$

$$\partial p/\partial z = 0 \quad (\rho \leqslant r < \infty,\ z = 0), \quad p = p_*(t) \quad (0 \leqslant r < \rho,\ z = 0), \tag{2.3}$$

начальные условия

$$p = p_0, \ u_i = 0, \ \sigma_{ij}^f = 0. \tag{2.4}$$

Изменения норового давления p по мощности пласта h меньше, чем характерные изменения по r, а потому в уравнениях (1.1) допустимо приближенно заменить $p(r, z, t)$ на средневзвешенное по мощности пласта давление $p^*(r, t)$:

$$p^*(r, t) = \frac{1}{h}\int_0^h p(r, z, t)\,dz, \quad \partial p^*/\partial z = 0. \tag{2.5}$$

Применим интегральные преобразования Ганкеля [3] первого порядка к первому уравнению (1.1) и нулевого порядка — ко второму уравнению (1.1). Тогда получим соответственно

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial z^2} - a\xi^2\bar{u}_r - b\xi\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + c\xi\bar{p}^* = 0, \tag{2.6}$$

$$a\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} - \xi^2\bar{u}_z + b\xi\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} = 0,$$

где $a = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$; $b = (1-2\nu)^{-1}$; $c = (1-\varepsilon)/[2G(1-m_0)]$;

$$\bar{u}_r = \int_0^\infty r u_r(r, z, t) J_1(\xi r)\,dr; \quad \bar{u}_z = \int_0^\infty r u_z(r, z, t) J_0(\xi r)\,dr;$$

$\bar{p}^* = \int\limits_0^\infty r p^*(r, t) J_0(\xi r)\,dr$ и считались выполненными условия

$$r^2\partial u_r/\partial r \to 0, \ r u_r \to 0 \ (r \to 0),$$

$$\sqrt{r}\,\partial u_r/\partial r \to 0, \ \sqrt{r}\,u_r \to 0 \ (r \to \infty).$$

Решения уравнений (2.6) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_r &= [A(\xi) + \xi z B(\xi)]e^{\xi z}\xi^{-1} + [C(\xi) + \xi z D(\xi)]e^{-\xi z}\xi^{-1} + \bar{p}^*\xi^{-1}, \\ \bar{u}_z &= [-A(\xi) + B(\xi)(3 - 4\nu - \xi z)]e^{\xi z}\xi^{-1} + [C(\xi) + \\ &\quad + (3 - 4\nu + \xi z)D(\xi)]e^{-\xi z}\xi^{-1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Функции $A(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$, $D(\xi)$ должны подбираться по граничным условиям (2.1), (2.2). Если применить преобразования Ганкеля к соотношениям

(1.2)—(1.5), то с учетом (2.7) можно получить уравнение

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \varphi(\xi h) \operatorname{ch}(\xi z) + \left(\xi^2 \bar{p} - \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2}\right) k(\alpha\mu)^{-1} = 0, \tag{2.8}$$

где $\bar{p} = \int\limits_0^\infty p(r, z, t) r J_0(\xi r)\, dr$; $\varphi(\xi h) = 2\operatorname{sh}(\xi h)/(\operatorname{sh}(2\xi h) + 2\xi h)$;

$$\alpha = (1 - m_0)(1 - \beta_1 K)(\beta_1 + g) + m_0(\beta_2 + g);\ \gamma = (1 - \varepsilon)^2 (1 - 2\nu)^2/2G \times (1 - m_0)(1 - \nu)\alpha.$$

Если теперь проинтегрировать соотношение (2.8) по z от 0 до h и поделить на h, то получим уравнение относительно трансформанты средневзвешенного давления p^*:

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial t} - \gamma\psi(\xi h)\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial t} + k(\alpha\mu)^{-1}\xi^2 \bar{p}^* = k(\alpha\mu)^{-1}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}\right)\Big|_0^h, \tag{2.9}$$

где $\psi(\xi h) = 2\operatorname{sh}^2(\xi h)/[\xi h(\operatorname{sh}(2\xi h) + 2\xi h)]$.

Воспользовавшись методом [4], заменим неоднородное граничное условие (2.3) на однородное при $z = 0$:

$$\begin{aligned} &\partial p/\partial z = Q(t)\mu/(2\pi k\rho\sqrt{\rho^2 - r^2}) \quad (0 \leqslant r < \rho),\\ &\partial p/\partial z = 0 \quad (\rho \leqslant r < \infty), \end{aligned} \tag{2.10}$$

причем $Q(t)$ — такой же расход жидкости, как и при условии (2.3).

Применим к условию (2.10) преобразование Ганкеля нулевого порядка и подставим полученное выражение в уравнение (2.9). Тогда удается исключить значения градиента $\partial\bar{p}/\partial z$ и получить эффективное уравнение

$$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial t}(1 + \gamma\psi(\xi h)) + k\xi^2(\alpha\mu)^{-1}\bar{p}^* = Q(t)\sin(\xi\rho)/2\pi\alpha h\rho\xi. \tag{2.11}$$

Решение уравнения (2.11) при $\bar{p}^*(\xi, 0) = 0$ (ср. [5]) имеет вид

$$\int\limits_0^\infty \bar{p}^*(\xi, t)\, e^{-st} dt = -\mu[2\pi k h\xi\rho)(s\tau(\xi h) + \xi^2)]^{-1}\sin(\xi\rho)\int\limits_0^t Q(t)\, e^{-st} dt, \tag{2.12}$$

где $\tau(\xi h) = [\mu\alpha(1 + \gamma/2)]\,[k(1 + \Phi(\xi h))]^{-1}$;

$$\Phi(\xi h) = (\gamma/2)[\xi h(\operatorname{sh}(2\xi h) + 2\xi h) - 4\operatorname{sh}^2(\xi h)]/[2\gamma \operatorname{sh}^2(\xi h) + \xi h(\operatorname{sh}(2\xi h) + 2\xi h)].$$

В случае очень тонкого пласта $\xi h \to 0$ и $\Phi(\xi h) \to 0$, а для пласта большой мощности $\xi h \to \infty$, $\Phi(\xi h) \to \gamma/2$.

Если на трещине задается постоянный дебит

$$Q(t) = Q_0 U(t), \quad U(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0,\\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

то $\tilde{Q}(s) = Q_0 s^{-1}$ и из уравнения (2.12) следует

$$\int\limits_0^\infty \bar{p}^*(\xi, t)\, e^{-st} dt = -(\mu Q_0/2\pi k h)\sin(\xi\rho)/(s\xi\rho(s\tau(\xi h) + \xi^2)). \tag{2.13}$$

Распределение средневзвешенного давления в пласте получается из (2.13) путем последовательного применения обратных преобразований Лапласа и Ганкеля:

$$p^*(r, t) = -Q_0\mu/(2\pi k h)\int\limits_0^\infty \sin(\xi\rho)(1 - \exp(-t\xi^2/\tau(\xi h)))\, J_0(\xi r)\, \xi^{-2}\rho^{-1} d\xi. \tag{2.14}$$

Для тонкого пласта из (2.14) следует

$$p^*(r,\,t) = -\,Q_0\mu/(2\pi kh)\int\limits_0^\infty \sin(\xi\rho)\,(1 - \exp(-\,t\xi^2\varkappa))\,J_0(\xi r)\,(\xi^2\rho)^{-1}d\xi, \tag{2.15}$$

что совпадает с решением задачи в упруголокальной постановке [5] при $\varkappa = \mu/[k\alpha(1+\gamma/2)]$. Если пласт представлен идеально сцементированной пористой средой [1], то $\varepsilon = 1$, $\gamma = 0$ и из (2.14) следует (2.15) при $\varkappa = \mu/[km_0(\beta_2 - \beta_1)]$. В этом случае эффективная упругоемкость пласта определяется лишь разницей сжимаемостей твердой и жидкой фаз, иначе говоря, локальноупругие решения получаются из (2.14), если пласт очень тонкий или если деформация пласта обусловлена сжимаемостью фаз, а перемещением твердых частиц относительно друг друга пренебрегается.

Если же пласт представлен мягкой несцементированной породой, то деформации обусловлены смещением твердых частиц относительно друг друга. При этом $\varepsilon \ll 1$, $\gamma \approx 1-2\nu$, а потому

$$\tau(\xi h) = [\mu(1-2\nu)(3-2\nu)/4kG(1-m_0)(1-\nu)][1+\Phi(\xi h)]^{-1}. \tag{2.16}$$

Из (2.7), (2.14) получаются уравнения для определения перемещений u_r и u_z в пласте:

$$u_r = \int\limits_0^\infty \bar{p}^*(\xi,\,t)\,\{g\varphi(\xi h)\,[\xi z\,\mathrm{sh}(\xi z) + \mathrm{ch}(\xi z)\,(1 - 2\nu - \xi h\,\mathrm{cth}(\xi h))] + 1\}\times$$
$$\times J_1(\xi r)\,d\xi,$$

$$u_z = \int\limits_0^\infty \bar{p}^*(\xi,\,t)\,g\varphi(\xi h)\,\{\mathrm{sh}(\xi z)\,[2(1-\nu) + \xi h\,\mathrm{cth}(\xi h)] -$$
$$-\,\xi z\,\mathrm{ch}(\xi z)\}\,J_0(\xi r)\,d\xi.$$

Пусть давление на трещине $p_*(t)$ равно давлению, осредненному по ее площади:

$$p_*(t) = \langle p^*\rangle = \frac{2}{\rho^2}\int\limits_0^\rho r p^*(r,\,t)\,dr.$$

Тогда

$$p_*(t) = -\,\frac{Q_0\mu}{2\pi kh}\int\limits_0^\infty \sin(\xi\rho)\,(\xi^3\rho^2)^{-1}\,[1 - \exp(-\,t\xi^2/\tau(\xi h))]\,J_1(\xi\rho)\,d\xi.$$

3. Если пласт ограничен непроницаемым контуром радиуса R, то на контуре можно задать граничные условия:

$$u_r = 0,\ \ \sigma^f_{rz} = 0,\ \ \partial p/\partial r = 0\ \ (r = R,\ 0 \leqslant z \leqslant h). \tag{3.1}$$

Тогда для решения системы уравнений (1.1)—(1.4) при сохранении условий (2.1)—(2.3) следует использовать интегральные преобразования Ганкеля в конечном интервале [3]:

$$\bar{u}_r(\xi,\,z,\,t) = \int\limits_0^R r u_r(r,\,z,\,t)\,J_1(\xi r)\,dr, \tag{3.2}$$

$$\bar{u}_z(\xi,\,z,\,t) = \int\limits_0^R r u_z(r,\,z,\,t)\,J_0(\xi r)\,dr, \quad \bar{p}^*(\xi,\,t) = \int\limits_0^R r p^*(r,\,t)\,J_0(\xi r)\,dr.$$

Вновь заменим в уравнениях (1.1) поровое давление $p(t,\,z,\,r)$ на средневзвешенное $p^*(r,\,t)$. Интегрируя (1.1) по частям и учитывая граничные условия (3.1), получим уравнения

$$\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial z^2} - a\xi^2\bar{u}_z - b\xi\,\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z} + c\xi\bar{p}^* + \left[a\,\frac{\partial u_r}{\partial r} + b\,\frac{\partial u_z}{\partial z} - cp^*\right]_R RJ_1(\xi R) = 0, \tag{3.3}$$

$$a\,\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial z^2} - \xi^2\bar{u}_z - b\xi\,\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial z} + [u_z]_R\,\xi RJ_1(\xi R) = 0.$$

Если в (3.3) выбрать величину ξ так, чтобы она являлась корнем уравнения

(3.4) $$\xi_i R\ J_1(\xi_i R) = 0,$$

то для обращения выражений (3.2) используются соотношения [3]

(3.5) $$u_r(r, z, t) = \frac{2}{R^2} \sum_i \bar{u}_r(\xi_i, z, t) \frac{J_1(\xi_i r)}{[J_0(\xi_i R)]^2},$$

$$u_z(r, z, t) = \frac{2}{R^2} \sum_i \bar{u}_z(\xi_i, z, t) \frac{J_0(\xi_i r)}{[J_0(\xi_i R)]^2}, \quad p^*(r, t) =$$

$$= \frac{2}{R^2} \sum_i \bar{p}^*(\xi_i, t) \frac{J_0(\xi_i r)}{[J_0(\xi_i R)]^2}.$$

Здесь сумма берется по всем положительным корням уравнения (3.4). Тогда уравнения (3.3) будут иметь вид (2.6), а их решения — (2.7), но вместо ξ всюду будут фигурировать значения ξ_i. Аналогично получим выражение для средневзвешенного норового давления:

(3.6) $$\bar{p}^*(\xi_i, t) = (-Q_0\mu/(\pi k h)) \sin(\xi_i \rho) \left[1 - \exp\left(-t\xi_i^2/\tau(\xi_i h)\right)\right] \rho^{-1}\xi_i^{-2}.$$

Обращение (3.6), согласно (3.5), дает решение в виде

(3.7) $$p^*(r, t) = (-Q_0\mu/(\pi k h))\, 2R^{-2} \sum_i \sin(\xi_i \rho) \left[1 - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-t\xi_i^2/\tau(\xi_i h)\right)\right] \frac{J_0(\xi_i r)}{[J_0(\xi_i R)]^2} \rho^{-1}\xi_i^{-2}.$$

Для больших значений $\xi_i R$ можно воспользоваться асимптотическими разложениями функций Бесселя [4]:

(3.8) $$J_0(R\xi_i) \approx \sqrt{2/(\pi R\xi_i)} \cos(R\xi_i - \pi/4),$$

$$J_1(R\xi_i) \approx \sqrt{2/(\pi R\xi_i)} \cos(R\xi_i - 3\pi/4).$$

В соответствии с формулами (3.4), (3.8) имеем

$$\sqrt{2\xi_i/\pi\rho} \sin(\xi_i R - \pi/4) = 0, \quad \xi_i R = \pi i - \pi/4,$$

$$\Delta\xi_i = \xi_i - \xi_{i-1} = \pi/R.$$

Теперь ряд (3.7) можно преобразовать к виду

$$p^*(r, t) = (-Q_0\mu/\pi k h) \sum_i \sin(\xi_i \rho) \left(1 - e^{-t\xi_i^2/\tau(\xi_i h)}\right) \frac{\pi}{\xi_i^2 \rho R} J_0(\xi_i r).$$

При $\xi_i R \to 0$, $\Delta\xi_i \to d\xi_i$ можно заменить сумму на интеграл:

$$p^*(r, t) = (-Q_0\mu/\pi k h) \lim_{\xi_i R \to \infty} \sum_i \frac{\sin(\xi_i\rho)}{\xi_i^2 \rho} \left(1 - e^{-t\xi_i^2/\tau(\xi_i h)}\right) J_0(r\xi_i)\, \Delta\xi_i =$$

$$= (-Q_0\mu/\pi k h) \int_0^\infty \sin(\xi_i \rho) \left(\xi_i^2 \rho\right)^{-1} \left(1 - e^{-t\xi_i^2/\tau(\xi_i h)}\right) J_0(r\xi_i)\, d\xi_i,$$

что вновь приводит к решению для неограниченного пласта (2.14). Для перемещений получим выражения

$$u_r = (2/R^2) \sum_i (\bar{p}^*(\xi_i, t)/\xi_i) \{g\varphi(\xi_i h) [\xi_i z \operatorname{sh}(\xi_i z) +$$

$$+ \operatorname{ch}(\xi_i z)(1 - 2\nu - \xi_i h \operatorname{cth}(\xi_i h))] + 1\} J_1(\xi_i r)/[J_0(R\xi_i)]^2,$$

$$u_z = (2/R^2) \sum_i (\bar{p}^*(\xi_i, t)/\xi_i)\, g\varphi(\xi_i h) \{\operatorname{sh}(\xi_i z) [2(1 + \nu) + \xi_i h \operatorname{cth}(\xi_i h)] -$$

$$- \xi_i z \operatorname{ch}(\xi_i z)\} J_0(\xi_i r)/[J_0(R\xi_i)]^2.$$

4. Пусть матрица пласта обладает ползучестью, обусловленной реологическими свойствами связей между твердыми частицами, причем $\varepsilon \ll 1$. В этом случае модули, относящиеся к деформациям переупаковки, представляют собой временные операторы. Для линейного вязкоупругого материала это дифференциальные или интегральные операторы [6].

Если на границах пласта и на трещине тип граничных условий не изменяется в течение всего процесса, то возможно применение принципа Вольтерра [7], а именно: решение вязкоупругой задачи можно найти, заменив в решении аналогичной упругой задачи, полученном методом интегрального преобразования Лапласа, все упругие константы на трансформанты по Лапласу от соответствующих операторов с последующим обращением нового решения.

Найдем решение для вязкоупругого пласта с помощью принципа Вольтерра. При условии $\varepsilon \ll 1$ $\gamma = 1 - 2\nu$, и функция $\tau(\xi h)$ задана выражением (2.16). Если $\nu = \mathrm{const}$, то временным оператором является лишь один модуль, например, модуль сдвига G. Определим вид трансформанты $\widetilde{G}(s)$ оператора $G(t)$. Ограничимся вязкоупругой моделью Максвелла [6]. Тогда одноосное сжатие сухого пористого пласта описывается уравнением

$$\frac{\partial \sigma_{ii}^{f}}{\partial t} + \frac{\sigma_{ii}^{f}}{\theta} - \mathrm{E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right), \tag{4.1}$$

где Е — мгновенный модуль Юнга; η — вязкость; $\theta = \eta/\mathrm{E}$ — время релаксации матрицы. Эти параметры можно определить из опытов на ползучесть при одномерном сжатии, т. е. при реологическом испытании типа (4.1).

Применим к (4.1) преобразование Лапласа и с учетом начального условия $\sigma_{ii}^{f}(i, 0) = \mathrm{E}\partial u_i(i,0)/\partial x_i$ получим

$$\widetilde{\sigma}_{ii}^{f}(s + 1/\theta) = \mathrm{E} s \partial u_i/\partial x_i. \tag{4.2}$$

Отсюда для оператора $\widetilde{E}(s)$ получим выражение

$$\widetilde{E}(s)(1 - m_0) = \widetilde{\sigma}_{ii}^{f}/(\partial u_i/\partial x_i) = \mathrm{E} s (s + 1/\theta)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{G}(s)(1 - m_0) = \widetilde{E}(s)(1 - m_0)/2(1 + \nu) = \tag{4.3}$$
$$= \mathrm{E} s [2(1 + \nu)(s + 1/\theta)]^{-1}.$$

Из (2.16), (4.3) найдем для вязкоупругой $\tau'(\xi h)$ и упругой $\tau(\xi h)$ функций выражения

$$\tau'(\xi h) = \tau(\xi h)(1 + (s\theta)^{-1}), \tag{4.4}$$
$$\tau(\xi h) = \mu(1 - 2\nu)(1 + \nu)(3/2 - \nu)/k\mathrm{E}(1 - \nu)(1 + \Phi(\xi h))^{-1}.$$

Подставляя (4.4), (2.16) в решение для поля давления в неограниченном упругом пласте (2.14), получим вязкоупругое решение

$$\int_0^\infty \bar{p}^*(\xi, t)\, \mathrm{e}^{-st} dt = \xi\rho(-Q_0\mu/2\pi kh) \sin(\xi\rho)/s\left(\tau(\xi h)\left(s + \theta^{-1}\right) + \xi^2\right). \tag{4.5}$$

Последовательное обращение (4.5) по правилам для преобразований Лапласа и Ганкеля дает результат

$$p^*(r, t) = (-Q_0\mu/2\pi kh) \int_0^\infty \sin(\xi\rho)\left(1 - \exp\left(-(\theta^{-1} + \xi^2/\tau(\xi h))\, t\right)\right) \times \tag{4.6}$$
$$\times J_0(\xi r)(\rho(\tau(\xi h)/\theta + \xi^2))^{-1} d\xi.$$

Аналогично для замкнутого пласта получим

$$p^*(r, t) = (-Q_0\mu/2\pi kh)\, 2R^{-2} \sum_i \sin(\xi_i\rho)\left(1 - \exp\left(-t\left(\theta^{-1} + \right.\right.\right. \tag{4.7}$$
$$\left.\left.\left. + \xi_i^2/\tau(\xi_i h)\right)\right)\right) J_0(\xi_i r)/([J_0(R\xi_i)]^2 \rho(\tau(\xi_i h)/\theta + \xi_i^2)).$$

Решения (4.6), (4.7) при $\tau(\xi h)\xi^2/\theta \to \infty$ переходят в решения (2.14), (3.7), соответствующие упругому пласту.

5. Если ввести безразмерные величины: $x = \xi\rho$, $h' = h/\rho$, $p' = -p_* 2\pi kh/Q_0\mu$, $\theta' = \tau(xh')\,\rho^2\theta^{-1}$, $T = t\,(1 + \Phi\,(\xi h))/\tau\rho^2$, то из решения для бесконечного пласта (2.14) следует результат для среднего давления в «окне»

$$(5.1)\qquad \langle p'\rangle = \int\limits_0^\infty \sin x\,[1 - \exp\,(-\,Tx^2\,(1 + \Phi\,(xh')))]\,J_1\,(x)\,x^{-3}dx.$$

Осредняя вязкоупругое решение (4.6) по площади трещины, можно получить в безразмерном виде

$$(5.2)\qquad \langle p'\rangle = \int\limits_0^\infty \sin x\,[1 - \exp\,(-\,T\,(\theta' + x^2\,(1 + \Phi\,(xh'))))]\,J_1\,(x)\big(x\big(\theta'\,(1 + \Phi\,(xh'))^{-1} + x^2\big)\big)^{-1}dx.$$

Для замкнутого пласта введем безразмерные величины: $x_i = \xi_i R$, $\rho' = \rho/R$, $h' = h/R$, $T = t(1 + \Phi(\xi_i h))/\tau(\xi_i h)R^2$, $\theta' = \tau(x_i h)R^2\theta^{-1}$, $p' = -\,p_*\,(t)\,2\pi kh/Q_0\mu$.

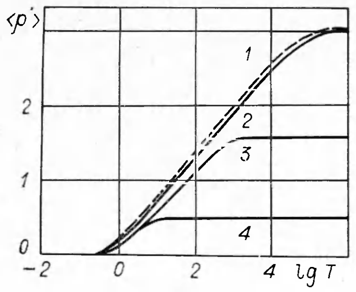
Осредняя выражения (3.7), (4.7) по площади на трещине, можно записать в безразмерном виде упругое решение

$$(5.3)\quad \langle p'\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\big(x_i\rho'\big)(x_i\rho')^{-2}\big[1 - \exp\big(-\,Tx_i^2\,(1 + \Phi\,(x_i h'))\big)\big]\,J_1\,(x_i\rho')/[J_0\,(x_i)\,x_i]^2$$

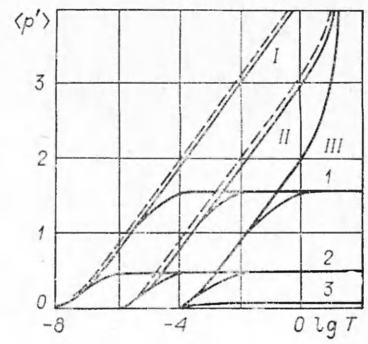
и вязкоупругое решение

$$(5.4)\qquad \langle p'\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\,(x_i\rho')\,\big[1 - \exp\big(-\,T\,\big(x_i^2\,(1 + \Phi\,(x_i h')\big) + \theta'\big)\big)\big]\,\big(1 + \Phi\,(x_i h')\big)\,(x_i\rho')^{-2}\big(\big(1 + \Phi\,(x_i h')\big)\,x_i^2 + \theta'\big)^{-1}J_1\,(x_i\rho')\,[J_0\,(x_i)]^{-2}.$$

Для конкретного расчета на ЭВМ в выражениях (5.1), (5.2) принимались следующие значения величин: $\mu\alpha k^{-1} = 0{,}96$, $\gamma = 0{,}6$, $\theta' = 2 \times 10^{-3}(\rho)^2$, значения ρ и h' варьировались. Зависимость решения от h' в диапазоне $0{,}01 \leqslant h' \leqslant 10$ (при указанных значениях остальных параметров) очень слабая. Изменение составляет не более 5% от решения при $h' = 0{,}1$, $\lg T = 2$. На фиг. 2 приведены кривые зависимости безразмерного давления $\langle p'\rangle$ от безразмерного времени T. Кривые *1* и *2* соответствуют решению в упруголокальной (2.15) и упругонелокальной (5.1) постановке задачи для бесконечного пласта, кривые *3* и *4* — вязкоупругому решению (5.2) при $\theta' = 0{,}002$ и 0,2. Характер изменения $\langle p'\rangle$ от T показывает, что время выхода на установившийся режим и значение



Фиг. 2



Фиг. 3

давления p' в этом режиме зависят от времени релаксации матрицы и относительных размеров «окна».

На фиг. 3 приведены кривые зависимости давления p' от безразмерного времени для замкнутого пласта. Сплошные линии I—III соответствуют упругому решению при значениях $\rho' = 10^{-4}$; 10^{-3}; 10^{-2}. Для сравнения даны две штриховые кривые, соответствующие упругому локальному решению при $\Phi(\xi_i h) = 0$. В упругом пласте процесс не выходит на установившийся режим, а влияние контура пласта вызывает неограниченный рост давления $\langle p' \rangle$, необходимого для сохранения постоянного дебита. Кривые 1—3 соответствуют вязкоупругому решению (5.4) при $\theta' = 2 \cdot 10^3$; $2 \cdot 10^5$; $2 \cdot 10^7$.

Зависимость безразмерного давления на трещине от значений вязкости матрицы пласта и радиуса трещины в вязкоупругих решениях (5.1), (5.4) одинаковая. Чем меньше вязкость матрицы пласта и чем больше радиус трещины, тем быстрее наступает установившийся режим и тем меньше изменение давления при этом.

Выбор оптимальных параметров «окна» и условий отбора тем самым связан с релаксационными параметрами матрицы деформируемого пласта.

Авторы признательны Э. А. Бондареву за внимание к работе.

Поступила 8 VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Николаевский В. Н., Басниев К. С. и др.** Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.
2. **Fast C. R., Holman G. B., Covlin R.** The application of massive hydraulic fracturing to the tight Muddy «J» formation. Watteberg field, Colorado.— J. Petrol. Technol., 1977, vol. 29, p. 10.
3. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955.
4. **Грей Э., Мэтьюз Г. Б.** Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: ИЛ, 1955.
5. **Николаевский В. Н.** Приток жидкости к горизонтальной трещине в пласте.— Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 7.
6. **Кристенсен Р.** Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
7. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.

УДК 538.4 : 538.665

ТЕЧЕНИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ, БЛИЗКОЙ К ТОЧКЕ КЮРИ

В. И. Вишняков, И. Ф. Султанов, И. А. Федотов

(*Москва*)

В настоящее время намагничивающиеся жидкости находят широкое применение в различных областях теплоэнергетики. Такие жидкости успешно могут выполнять роль теплоносителя в тех случаях, где применение обычных жидкостей связано с дополнительными устройствами и энергетическими затратами, например в условиях невесомости. Возможность применения намагничивающихся жидкостей в качестве рабочего тела ФГД-генератора [1] открывает новые широкие перспективы прямого преобразования тепловой энергии в электрическую. Эффективность работы теплообменных аппаратов и энергетических установок в значительной степени определяется рабочей температурой намагничивающейся жидкости. Наибольший энергетический эффект во многих случаях достигается при температуре, близкой к точке Кюри [1]. Однако вблизи этой температуры намагничивающиеся жидкости частично теряют свои магнитные свойства, что, естественно, отражается на характере течения. Кроме того, на характер течения будет оказывать влияние и магнетокалорический эффект, который в этом случае максимален [2]. Отметим, что хотя это и слабый эффект, тем не менее вызванное им перераспределение температуры по сечению канала в установившемся режиме оказывается существенным.

Ниже рассмотрено неизотермическое стационарное течение непроводящей и несжимаемой намагничивающейся жидкости в плоском канале, находящейся при температуре, близкой к точке Кюри. Считаем, что жидкость намагничена до насыщения сильным внешним магнитным полем напряженности H, направленным поперек канала. Вслед-