

7. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. — М.: Наука, 1964.
8. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. — М.: Машиностроение, 1975.
9. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Исследование пространственного пограничного слоя на затупленных телах с проницаемой поверхностью // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1982. — № 3.

г. Москва

Поступила 30/1 1990 г.

УДК 532.526

А. Н. Кудрявцев, А. С. Соловьев

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО СЛОЯ СДВИГА С ПЕРЕПАДОМ ТЕМПЕРАТУР

Рассматривается устойчивость к малым возмущениям свободного слоя сдвига, образующегося при смешении двух параллельных потоков вязкого сжимаемого газа. Предполагается, что температуры смешивающихся потоков T_1 и T_2 могут быть неодинаковы. Значительные перепады температур характерны, например, для пограничного слоя струи, истекающей из сопла авиационного или ракетного двигателя. Вопросы устойчивости таких течений представляют интерес в связи с особенностями процессов турбулизации и шумообразования при больших скоростях [1—3].

Данная работа является продолжением [4], где устойчивость сжимаемого слоя сдвига исследовалась для $\kappa = 1$ ($\kappa = T_2/T_1$). Как и в [4], задача устойчивости решается на основе линеаризованных уравнений Навье — Стокса сжимаемого газа методом ортогонализации [5]. Расчеты проведены в широком диапазоне изменения параметров: числа Рейнольдса ($0 < Re \leq 10^3$), числа Маха ($0 \leq M \leq 2$) и перепада температур ($0,2 \leq \kappa \leq 5$). Обнаружено, что при различных M и κ могут оказаться неустойчивыми три моды возмущений дискретного спектра, одна из них распространяется с дозвуковой фазовой скоростью, а две «сверхзвуковые». Построены кривые нейтральной устойчивости, определены коэффициенты нарастания. Показано, что возмущения сплошного спектра при конечных Re и всех изменениях κ затухают. Исключение составляет случай $Re \rightarrow \infty$, когда моды сплошного спектра суть незатухающие акустические возмущения.

1. Устойчивость плоскопараллельного течения вязкого сжимаемого газа по отношению к малым двумерным возмущениям вида бегущих волн

$$(1.1) \quad \{\rho(y), u(y), v(y), p(y), \theta(y)\} \exp [i\alpha(x - ct)], \quad c = c_r + ic_i$$

описывается, как известно, системой линейных уравнений Лиза — Липа [6, 7]:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} D\rho + \sigma/T - T'v/T^2 &= 0, \\ Du + U'v + i\alpha T p &= T[\mu_0(u'' - \alpha^2 u) + i\alpha\mu_0\sigma/3 + \\ &+ T'(u' + i\alpha v) + (U'\theta)']/Re, \\ Dv + T p' &= T[\mu_0(v'' - \alpha^2 v) + \mu_0\sigma'/3 + 2T'(2v' - i\alpha u)/3 + i\alpha U'\theta]/Re, \\ D\theta + T'v + (\gamma - 1)T\sigma &= \gamma T[\mu_0(\theta'' - \alpha^2\theta) + T''\theta + \\ &+ 2T'\theta']/RePr + \gamma(\gamma - 1)M^2 T[2\mu_0 U'(u' + i\alpha v) + U'^2\theta]/Re, \\ p &= (\theta/T + T p)/\gamma M^2, \quad \mu_0 = T, \quad D = i\alpha(U - c), \quad \sigma = i\alpha u + v', \\ M &= U_1/(\gamma R T_1)^{1/2}, \quad Re = \rho_1 U_1 \delta/\mu_1. \end{aligned}$$

Здесь x и y — продольная и поперечная координаты; $U(y)$, $T(y)$ — профили скорости и температуры основного течения; ρ , u , v , p , θ — амплитуды возмущений плотности, скорости вдоль x и y , давления и температуры; α — вещественное волновое число возмущений; c_r — фазовая скорость; αc_i — коэффициент нарастания; $Pr = 0,72$ — число Прандтля; $\gamma = 1,4$ — показатель адиабаты; R — газовая постоянная. Координаты x и y меняются в интервале $(-\infty, \infty)$, они сделаны безразмерными с помощью характерной толщины слоя сдвига δ . Остальные величины отнесены к их невозмущенным значениям в однородном потоке при $y \rightarrow +\infty$

(отмеченным индексом 1). Штрих означает дифференцирование по y . В (1.2) принято, что вязкость μ линейно зависит от температуры, а давление основного течения, согласно теории пограничного слоя [8], считается постоянным.

Граничные условия для возмущений выражают требования ограниченности их амплитуд на бесконечности:

$$(1.3) \quad |\rho|, |u|, |v|, |p|, |\theta| < \infty \quad \text{при } y \rightarrow \pm\infty,$$

т. е. в рассмотрение включаются возмущения, не затухающие на больших расстояниях от сдвигового слоя. Уравнения (1.2) и граничные условия (1.3) образуют задачу на собственные значения относительно неизвестной величины $c = c_r + ic_i$. Течение будет неустойчивым, если $c_i > 0$, устойчивым при $c_i < 0$ и нейтрально устойчивым, когда $c_i = 0$.

Предполагается, что смешение параллельных потоков начинается в точке $x = 0, y = 0$. При $x > 0$ профили скорости и температуры найдутся как автомодельные решения уравнений сжимаемого пограничного слоя с граничными условиями

$$(1.4) \quad U \rightarrow 1, T \rightarrow 1 \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad U \rightarrow m, T \rightarrow \kappa \quad \text{при } y \rightarrow -\infty,$$

где $m = U_2/U_1, \kappa = T_2/T_1$ — отношения скоростей и температур потоков*. Если определить толщину слоя сдвига как $\delta = (\pi\mu_1 L/\rho_1 U_1)^{1/2}$, то решения имеют вид [4, 8]

$$(1.5) \quad U = 1 + \frac{1}{2}(m-1) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \eta \right) \right],$$

$$T = 1 + \frac{1}{2}(\kappa-1) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi \operatorname{Pr}} \eta \right) \right] + \frac{\operatorname{Pr}(\gamma-1) M^2 (m-1)^2}{4 \sqrt{2-\operatorname{Pr}}} \int_{\eta}^{\infty} \Phi(z) dz,$$

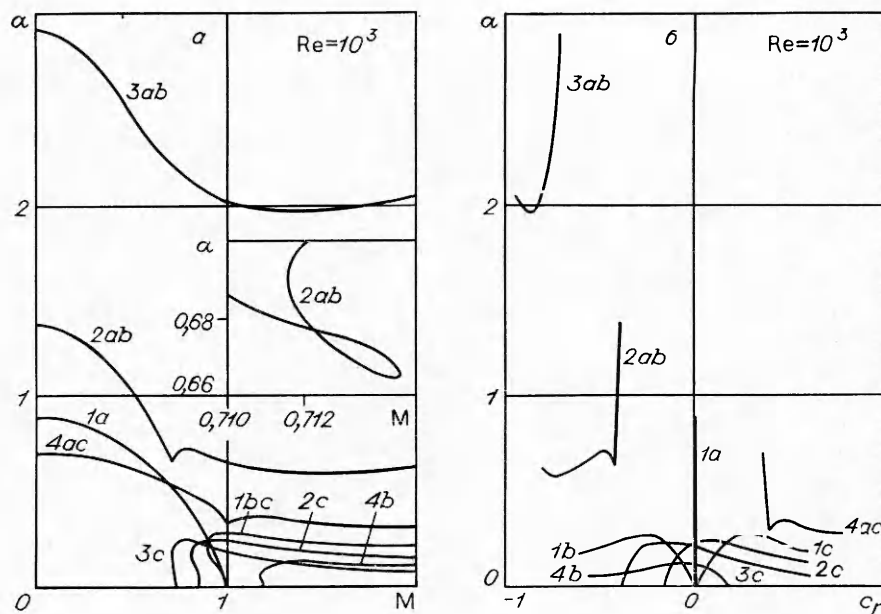
$$y = \int_0^{\eta} T(z) dz, \quad \Phi(z) = \exp \left(-\frac{1}{4} \pi \operatorname{Pr} z^2 \right) \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi(2-\operatorname{Pr})} z \right).$$

Здесь η — переменная Дородницына — Стюартсона; L — расстояние от начала координат до некоторого фиксированного сечения. Так как $\operatorname{Re} = \pi L/\delta$, то, меняя в (1.2) Re , можно исследовать устойчивость течения в различных сечениях вниз по потоку от точки начала смешения (квази-параллельное приближение).

Расчеты по формуле (1.5) при $0 \leq M \leq 2, 0,2 \leq \kappa \leq 5$ показывают, что профиль скорости в слое сдвига $U(y)$ лишь незначительно меняется при варьировании M и κ . Что касается профиля температуры, то здесь существенным оказывается влияние как перепада температуры между потоками, так и эффектов вязкой диссипации, пропорциональных $M^2(\partial U/\partial y)^2$. Благодаря последним при больших M форма профиля заметно меняется: температура в середине сдвигового слоя становится выше, чем на краях.

Прежде чем перейти к решению задачи устойчивости (1.2)–(1.5), укажем некоторые полезные преобразования, позволяющие очевидным образом сократить объем расчетов. Собственное значение задачи, как видно из (1.2)–(1.5), зависит от параметров $m, \kappa, M, \operatorname{Re}, \alpha$: $c = c(m, \kappa, M, \operatorname{Re}, \alpha)$. Анализ устойчивости, однако, упрощается, если заметить, что величины c для разных m весьма просто связаны друг с другом. Рассмотрим, например, преобразование собственных значений и функций при переходе от произвольного m к $m = 0$ (последнее соответствует обычной экспериментальной ситуации — пограничному слою струи, вытекающей

* $0 < \kappa < \infty$. Что касается m , то достаточно рассмотреть $-1 \leq m \leq 1$. Именно, выбирая направление x совпадающим с направлением потока с большей скоростью, а ось y направляя от слоя сдвига в сторону того же потока, всегда можно добиться, чтобы m не выходило за пределы указанного интервала.



Р и с. 1

щей в неподвижный воздух). Отметим собственное значение и собственные функции при $m = 0$ верхним индексом нуль. Из (1.2)–(1.5) следует

$$(1.6) \quad c^0 = c(0, \kappa, M, \text{Re}, \alpha) = \frac{\left[c \left(m, \kappa, \frac{M}{1-m}, \frac{\text{Re}}{1-m}, \alpha \right) - m \right]}{1-m},$$

$$\{\rho^0, u^0, v^0, p^0, \theta^0\} = \{\rho, (1-m)u, (1-m)v, (1-m)^2 p, \theta\}.$$

Физически (1.6) отвечает переходу в движущуюся (со скоростью m) систему отсчета и изменению в $(1-m)$ раз единицы измерения скорости.

Еще одно соотношение связывает характеристики устойчивости при перепадах температур κ и $\tilde{\kappa} = 1/\kappa$:

$$(1.7) \quad \tilde{c} = c(m, \tilde{\kappa}, M, \text{Re}, \alpha) = (1+m) - c^*(m, \kappa, M \sqrt{\tilde{\kappa}}, \kappa \text{Re}, \alpha/\kappa),$$

$$\{\tilde{\rho}(y), \tilde{u}(y), \tilde{v}(y), \tilde{p}(y), \tilde{\theta}(y)\} = \{\kappa \rho^*(\tilde{y}), -u^*(\tilde{y}), -v^*(\tilde{y}),$$

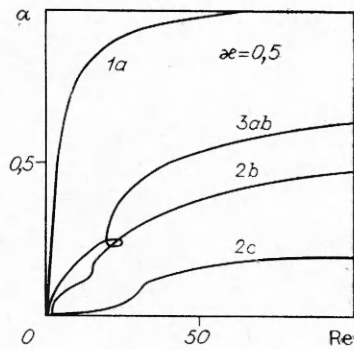
$$\kappa p^*(\tilde{y}), \tilde{\theta}^*(\tilde{y})/\kappa\}, \tilde{y} = -\kappa y,$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Действительно, подставляя (1.7) в (1.2) и применяя затем операцию комплексного сопряжения, приходим к исходной системе (1.2).

2. Результаты расчетов устойчивости дискретного спектра собственных значений при заданном перепаде температур κ представлены на рис. 1–3. Численный метод, используемый для решения (1.2), (1.3), тот же, что и в [4], и здесь не описывается. Во всех расчетах $m = -1$, связь с результатами для других m , в частности $m = 0$, дается преобразованием (1.6). Отметим, что $\kappa < 1$ соответствует горячей струе, т. е. случаю, когда сильнее нагрет поток с большей скоростью, а $\kappa > 1$ — напротив, струе холоднее окружающего воздуха.

На рис. 1, а, б изображены кривые нейтральной устойчивости в плоскостях α, M и α, c_r при $\text{Re} = 10^3$, т. е. практически в условиях невязкой задачи. Кривые 1–4 отвечают $\kappa = 1; 0,5; 0,2; 2$. Области неустойчивости в плоскости α, M расположены между соответствующей нейтральной кривой и осью $\alpha = 0$. Буквы а, б, с относятся к нейтральным волнам различных классов (см. приложение). Так, нейтральная кривая 1 ($\kappa = 1$) состоит из частей 1а, 1б и 1с. Часть 1а отвечает нейтральным до-

звуковым волнам с $c_r = 0$. Части $1b$ и $1c$ — нейтральные кривые двух сверхзвуковых мод. В плоскости α, M они совпадают (кривая $1bc$), тогда как скорости мод c_r отличаются знаком. Это следствие свойств симметрии $U(y), T(y)$ при $\kappa = 1$ [4]. Если $\kappa = 1$, то все части нейтральной кривой соединяются в общей точке, где $\alpha = 0, M = 1, c_r = 0$. Соответствующее возмущение является звуковым относительно обоих потоков одновременно, так как $M_s|_{\kappa=1} = 1$ (см. приложение). В окрестности точки соединения нейтральная кривая I в плоскости α, M имеет форму петли, и в узком диапазоне чисел Маха ($M_* < M < 1$) одновременно существуют до- и сверхзвуковые нейтральные колебания. Здесь M_* — минимальное для нейтральных сверхзвуковых возмущений число Маха ($M_*|_{\kappa=1} = 0,906$).



Р и с. 2

При $\kappa \neq 1$ нейтральная кривая дозвуковой моды соединяется, образуя общую непрерывную кривую ($2ab$ при $\kappa = 0,5$, $3ab$ при $\kappa = 0,2$, $4ac$, если $\kappa = 2$) с одной из двух нейтральных кривых сверхзвуковых возмущений. Точка соединения теперь не лежит на оси $\alpha = 0$. В увеличенном масштабе окрестность этой точки в плоскости α, M для $\kappa = 0,5$ показана на врезке рис. 1, а. Видно, что нейтральная кривая по-прежнему образует здесь петлю, хотя и сильно уменьшившуюся в размерах. При еще меньших κ петля исчезает и области существования до- и сверхзвуковых нейтральных возмущений перестают перекрываться (см. кривые при $\kappa = 0,2$). Рис. 1, б показывает, что фазовая скорость нейтральных волн практически не меняется, пока возмущение дозвуковое (почти вертикальные линии на рисунке), за точкой же соединения $|c_r|$ сверхзвуковых возмущений класса b ($\kappa = 0,5; 0,2$) или c ($\kappa = 2$) быстро возрастает.

Что касается второй сверхзвуковой моды, то она при $\kappa \neq 1$ образует отдельную нейтральную кривую ($2c, 3c, 4b$) с более узкой областью неустойчивости в плоскости α, M . Скорость распространения нейтральных возмущений этой моды может менять знак, соответствующие кривые на рис. 1, б пересекают ось $c_r = 0$. Отметим, что данная мода была пропущена в [9], где также исследовалась устойчивость вязкого сжимаемого слоя сдвига. В [9] рассчитывались только коэффициенты нарастания, нейтральные кривые не строились, и поэтому общая картина устойчивости осталась непроясненной.

Влияние вязкости на устойчивость сдвигового слоя показывает рис. 2, на котором приведены нейтральные кривые в плоскости α, Re при $\kappa = 0,5$ и различных M (линии 1—3 отвечают $M = 0,5; 1,2; 0,8$). Как видно из рис. 2, нейтральная кривая дозвуковых возмущений проходит через начало координат, так что их критическое число Рейнольдса $Re_c = 0$. Напротив, для сверхзвуковых волн Re_c отлично от нуля. Таким образом, если $M > M_s$, то всегда $Re_c \neq 0$. Когда же $M_* < M < M_s$, то нейтральное возмущение, бывшее при $Re \rightarrow \infty$ сверхзвуковым, при меньших Re может стать дозвуковым, если с понижением Re уменьшается и $|c_r|$. Такую ситуацию иллюстрирует кривая $3ab$ ($\kappa = 0,5, M = 0,8$), $Re_c = 0$ для нее, поскольку при малых Re возмущение дозвуковое. Как показывают расчеты, петля на кривой $3ab$ находится вблизи точки, где скорость нейтральной волны относительно потока газа равна скорости звука. Появление в данном случае петли неудивительно, так как нейтральные кривые в плоскостях α, M и α, Re суть проекции на эти плоскости нейтральной поверхности $c_i(\alpha, M, Re) = 0$, которая при $\kappa = 0,5$, очевидно, является самопересекающейся. Из-за недостатка места мы не приводим нейтральные кривые в плоскости α, Re для других κ . Во всех случаях по-прежнему для дозвуковых возмущений $Re_c = 0$, для сверхзвуковых $Re_c \neq 0$. В таблице приведена зависимость от κ параметров M_* и α_{max} — максимального (по всем M) волнового числа не-

Моды возмущений	κ				
	0,2	0,5	1	2	5
	M_*				
b	0,58	0,71	0,91	1,15	1,61
c	0,72	0,82	0,91	1,01	1,29
	α_{\max}				
a	2,91	1,39	0,92	0,70	0,58
b	2,34	0,73	0,31	0,14	0,05
c	0,26	0,28	0,31	0,37	0,47

устойчивых возмущений данной моды при $Re = 10^3$. Очевидно, что M_* монотонно понижается с уменьшением κ , так что в горячей струе неустойчивые сверхзвуковые волны возникают при меньших M . Поскольку $Re_c \rightarrow \infty$, когда $M \rightarrow M_*$ (см. рис. 4 в [4]), то из монотонной зависимости $M_*(\kappa)$ следует, что для заданного M существует $\kappa = \kappa_*$ такое, что $Re_c \rightarrow \infty$ при $\kappa \rightarrow \kappa_*$. Если $\kappa \approx \kappa_*$, то Re_c велико и вязкость оказывает существенное влияние на устойчивость слоя сдвига.

Из зависимости α_{\max} от κ можно заключить, что перепад температур различным образом влияет на размер области неустойчивости до- и сверхзвуковых возмущений. Область неустойчивости дозвуковой моды расширяется при уменьшении κ и сужается при увеличении. Область неустойчивости сверхзвуковых возмущений имеет минимальный размер при $\kappa = 1$, так что в этом случае нагрев и охлаждение дестабилизируют поток.

Влияние перепада температур на неустойчивые возмущения показано на рис. 3, где даны коэффициенты нарастания αc_i в зависимости от α при $Re = 10^3$. Кривые 1—4 соответствуют $\kappa = 1; 0,5; 0,2; 2$, через a, b, c обозначены различные моды возмущений. Для дозвуковых возмущений αc_i рассчитаны при $M = 0,5$, для сверхзвуковых — при $M = 1,2$. Очевидно, что коэффициенты нарастания сверхзвуковых возмущений при всех κ существенно (примерно на порядок) меньше, чем у дозвуковых. Отметим также, что расширение области неустойчивых α сопровождается увеличением максимального αc_i .

3. Как хорошо известно [10], в случае течения в неограниченной области задача устойчивости помимо дискретных собственных значений имеет также сплошной спектр. Характерной особенностью возмущений сплошного спектра является то, что их собственные функции не обращаются в нуль на бесконечности [10]. Поэтому для нахождения сплошного спектра рассмотрим уравнение (1.2) при $y \rightarrow \pm\infty$, где скорость U и температура T постоянны. Общее решение (1.2) при $y \rightarrow +\infty$ запишется как суперпозиция шести фундаментальных решений, пропорциональных $e^{\pm\beta_n y}$ ($n = 1, 2, 3$), где β_n^2 равны [4]:

$$(3.1) \quad \beta_n^2 = \alpha^2 + \Delta_n, \quad n = 1, 2, 3, \quad \Delta_1 = Re D/T^2,$$

$$\Delta_{2,3} = \frac{Re Pr D}{2T^2} \frac{1 + q \left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma}{Pr} \right)}{1 + \frac{4}{3} \gamma q} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{Pr} \frac{1 + \frac{4}{3} \gamma q}{\left[1 + q \left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma}{Pr} \right) \right]^2}} \right\},$$

$$q = \frac{M^2 DT}{Re}, \quad D = i\alpha(U - c).$$

Здесь $U = 1$, $T = 1$. Общее решение при $y \rightarrow -\infty$ строится аналогично, только $U = m$, $T = \kappa$ в (3.1). Фундаментальные решения отвечают различным типам элементарных возбуждений в сжимаемом газе, при больших Re их можно отождествить с волнами завихренности, энтропии и давления [4, 11].

В соответствии с граничными условиями (1.3) амплитуда возмущений в свободном потоке экспоненциально затухает, за исключением случая, когда какое-либо из β_n^2 вещественно и отрицательно:

$$(3.2) \quad \beta_n^2(c) = [(\beta_n)_r + i(\beta_n)_i]^2 = -k^2$$

(k — вещественное число, $k \neq 0$). Асимптотическая собственная функция затухающего возмущения является линейной комбинацией тех трех фундаментальных решений из шести, для которых $(\beta_n)_r y < 0$.

Покажем, что решение задачи (1.2), (1.3) может быть найдено при любом c , для которого равенство (3.2) выполняется либо при $y \rightarrow +\infty$, либо при $y \rightarrow -\infty$, т. е. что в задаче существует непрерывный спектр. Действительно, в этом случае оба решения вида $e^{\pm iky}$ удовлетворяют (1.3). Асимптотическая собственная функция в одном из свободных потоков будет тогда суперпозицией уже четырех линейно независимых решений.

Записав (1.2) в виде системы шести уравнений первого порядка и проинтегрировав их от $y = +\infty$ и $y = -\infty$ до $y = 0$ (см. подробное изложение процедуры численного решения в [4]), получим следующее условие срачивания при $y = 0$:

$$(3.3) \quad C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + C_4 z_4 = C_5 z_5 + C_6 z_6 + C_7 z_7$$

(z_1, \dots, z_7 — векторы фундаментальных решений в точке $y = 0$, C_1, \dots, C_7 — неизвестные константы, подлежащие определению). Одна из констант всегда может быть выбрана произвольно, что соответствует нормировке решения. После этого (3.3) становится системой шести линейных неоднородных уравнений. Оставшиеся шесть констант находятся из нее единственным образом, что и определяет собственную функцию сплошного спектра, непрерывную на всем интервале $-\infty < y < \infty$ и незатухающую в одном из потоков.

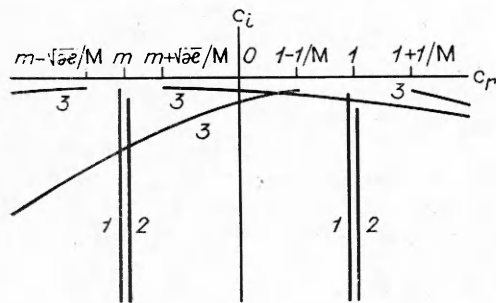
Из условия (3.2) при $Re \gg 1$ для $n = 1, 2, 3$ получаем

$$(3.4) \quad c = U - \frac{iT^2(\alpha^2 + k^2)}{\alpha Re};$$

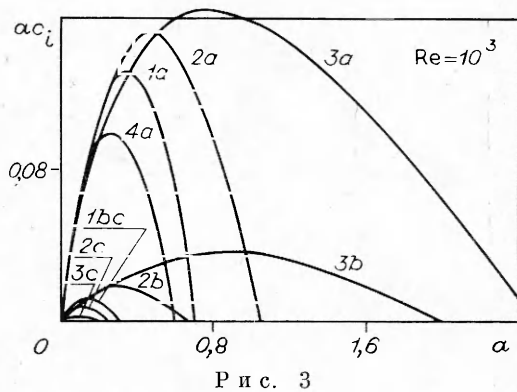
$$(3.5) \quad c = U - \frac{iT^2(\alpha^2 + k^2)}{\alpha Re Pr} + O(Re^{-2});$$

$$(3.6) \quad c = U \pm \frac{\sqrt{T(\alpha^2 + k^2)}}{\alpha M} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma - 1}{Pr} \right) \frac{iT^2(\alpha^2 + k^2)}{\alpha Re} + O(Re^{-2}).$$

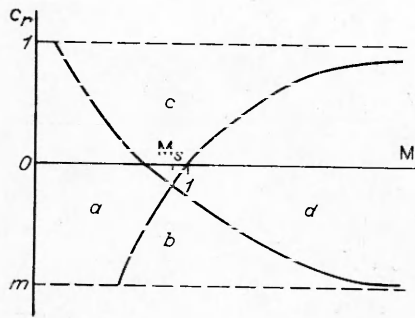
С изменением k собственные значения сплошного спектра описывают линии в комплексной плоскости $c_r + ic_i$ (рис. 4). Линии 1 и 2 отвечают вихревой и энтропийной ветвям сплошного спектра (3.4), (3.5). Каждая из них состоит из двух частей, соответствующих волнам с фазовой скоростью $c_r = 1$ (такие волны не затухают в верхнем потоке при $y \rightarrow \infty$, $U = 1$, $T = 1$) и волнам с $c_r = m$ (не затухающим в нижнем потоке, когда $y \rightarrow -\infty$, $U = m$, $T = m$). Таким образом, эти возмущения «сносятся» потоком, их фазовая скорость относительно газа равна нулю. Цифрой 3 обозначена состоящая из четырех частей акустическая ветвь сплошного спектра (3.6) — волны давления, распространяющиеся относительно газа со скоростью, большей или равной скорости звука $\sqrt{T/M}$. Эта ветвь отсутствует в предельном



Р и с. 4



Р и с. 3



Р и с. 5

случае несжимаемой жидкости. Действительно, при $M \rightarrow 0$ из (3.6) следует, что скорость акустических возмущений $c_r \rightarrow \pm \infty$, что согласуется с выводом о бесконечности скорости звука в несжимаемой среде. Отметим, что акустические возмущения сплошного спектра могут играть важную роль в проблемах генерации звука сверхзвуковым сдвиговым течением [3] или, напротив, возбуждения волн неустойчивости при внешнем звуковом воздействии [12].

При конечных значениях Re все возмущения сплошного спектра устойчивы и с течением времени затухают. Как видно из (3.4)–(3.6), сплошной спектр становится нейтральным ($c_i = 0$) только при $Re \rightarrow \infty$.

Отметим, что рассмотренные в п. 2 сверхзвуковые дискретные возмущения тесно связаны с акустическими волнами сплошного спектра. Хотя при наличии вязкости собственные функции возмущений дискретного спектра всегда затухают при удалении от слоя сдвига, это затухание может быть очень медленным при больших Re (см. рис. 5, 6 в [4]). Действительно, разлагая выражение (3.1) для $\beta_3 = \beta_{3r} + i\beta_{3i}$ по степеням Re^{-1} , получим, что $|\beta_{3r}| \sim Re^{-1}$. В случае $Re \rightarrow \infty$ система (1.2) сводится к одному уравнению второго порядка для амплитуды давления [6, 7], его решение — волна давления с коэффициентом затухания в свободном потоке:

$$(3.7) \quad \beta = \lim_{Re \rightarrow \infty} \beta_3 = \pm \alpha \sqrt{1 - M^2(U - c)^2/T}.$$

Для нейтральных волн классов b и c коэффициент затухания становится чисто мнимым: $\beta = i\beta_i$. Вдали от слоя сдвига такие волны имеют вид

$$(3.8) \quad e^{i(\alpha x + \beta_i y - \alpha c_r t)},$$

т. е. они не затухают и осциллируют по x и y с постоянной амплитудой. Таким образом, в невязкой задаче не существует нейтральных сверхзвуковых возмущений дискретного спектра (хотя существуют дискретные неустойчивые ($c_i > 0$) [13]), все такие возмущения принадлежат сплошному спектру. При исследовании нейтральных возмущений классов b и c на основе невязкой теории [13, 14] приходится вводить более или менее произвольное дополнительное условие, позволяющее выделить одну из точек непрерывного спектра. В [13] роль такого условия играло требование, что нейтральные колебания должны быть пределом при $c_i \rightarrow 0$ неустойчивых, в [14] — требование, чтобы их собственные функции вдали от слоя сдвига имели вид уходящих волн.

Из (3.8) следует, что незатухающие акустические возмущения излучаются во внешнее течение или, напротив, приходят к слою сдвига извне под углом $\Psi = \arctg(\beta_i/\alpha)$ к потоку. При этом волны классов b и c должны излучаться в «верхнюю» ($y > 0$) и соответственно «нижнюю» стороны сдвигового слоя. По-видимому, рассматриваемые волны аналогичны исходящим от пограничного слоя струи волнам Маха, излучение которых как в окружающее пространство, так и внутрь самой струи наблюдалось при достаточно больших M в экспериментах [15].

Приложение. Волны возмущений в слое сдвига между двумя потоками естественным образом разделяются на четыре класса (a, b, c, d) в зависимости от их скорости распространения [9]. На плоскости M, c_r они соответствуют четырем частям, на которые делят ее звуковые линии (рис. 5):

$$(II.1) \quad c_r = 1 - 1/M;$$

$$(II.2) \quad c_r = m + \sqrt{\kappa}/M.$$

(П.1), (П.2) описывают возмущения, распространяющиеся относительно верхнего (нижнего) потока со скоростью, равной скорости звука в данном потоке. Область a включает возмущения дозвуковые относительно обоих потоков. Из рис. 5 видно, что для них существует максимальное число Маха M_s , которое отвечает точке пересечения (П.1), (П.2): $M_s = (1 + \sqrt{\kappa})/(1 - m)$.

Хорошо известно [6], что скорость нейтральных возмущений c_N в области a при больших Re определяется положением обобщенной точки перегиба:

$$c_N = U(y_c) \left. \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{T} \frac{dU}{dy} \right) \right|_{y=y_c} = 0.$$

Возмущения в области b сверхзвуковые по отношению к верхнему ($y > 0$) потоку, c — к нижнему, d — к обоим. Отметим, что возмущения последнего класса не были найдены в расчетах ни в данной, ни в других известных нам работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Paramoschou D., Roshko A. The compressible turbulent shear layer: an experimental study // J. Fluid Mech.— 1988.— V. 197.— P. 453.
2. Крайтон Д. Акустика как ветвь гидродинамики // Современная гидродинамика.— М.: Мир, 1984.
3. Tam C. K. W., Burton D. E. Sound generated by instability waves of supersonic flows. Pt 1. Two-dimensional mixing layers // J. Fluid Mech.— 1984.— V. 138.— P. 273.
4. Кудрявцев А. Н., Соловьев А. С. Устойчивость слоя сдвига сжимаемого газа // ПМТФ.— 1989.— № 6.
5. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1961.— Т. 16, вып. 3.
6. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости.— М.: Мир, 1971.
7. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках.— Новосибирск: Наука, 1980.
8. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости.— М.: Наука, 1965.
9. Ragab S. A., Wu J. L. Instabilities in the free shear layer formed by two supersonic streams.— N. Y., 1988.— (Paper/AIAA; N 88—0038).
10. Grosch C. E., Salwen H. The continuous spectrum of the Orr—Sommerfeld equation. Pt 1. The spectrum and the eigenfunctions // J. Fluid Mech.— 1978.— V. 87.— P. 33.
11. Chu V.-T., Kovaszny L. S. G. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas // J. Fluid Mech.— 1958.— V. 3, N 5.
12. Mack L. M. Linear stability theory and the problem of supersonic boundary layer transition // AIAA J.— 1975.— V. 13.— P. 278.
13. Blumen W., Drazin P. G., Billings D. F. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Pt 2 // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 74, N 2.
14. Jackson T. L., Grosch C. E. Inviscid spatial stability of a compressible mixing layer.— Wash., 1988.— (CR/NASA; 481671. Rep./ICASE; N 88—33).
15. Oertel H. Coherent structures producing Mach waves inside and outside of the supersonic jet // Structure of complex turbulent shear flow: Symp. IUTAM, Marseille, 1982.— Berlin e. a.: Springer, 1983.

г. Новосибирск

Поступила 20/X 1989 г.,
в окончательном варианте — 16/II 1990 г.

УДК 517.958, 551.324

С. И. Сенашев, В. А. Чугунов

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВИНТОВОМ ДВИЖЕНИИ БИНГАМОВСКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ СООСНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Для любых уравнений, а особенно для тех, которые описывают движение реальных сред, наряду с численными методами решения очень важны точные решения. Они позволяют выявить качественные особенности изучаемых явлений, построить асимптотические решения конкретных задач, а в некоторых ситуациях найти и сами