

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТРЕХМЕРНОМ
ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ
В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

И. Г. Брыкина, Ю. Д. Шевелев

(Москва)

Предложен метод последовательных приближений для решения уравнений пространственного несжимаемого пограничного слоя на телах произвольной формы.

Используется система координат, связанная с линиями тока внешнего невязкого течения. Делается предположение о малости скорости, поперечной внешним линиям тока. При малой интенсивности вторичного течения уравнения, описывающие пограничный слой в несжимаемой жидкости, приводятся к форме, аналогичной уравнениям пограничного слоя на осесимметричных телах.

Получено приближенное аналитическое решение для скорости и для трения в виде формул, которые можно использовать для любых задач пространственного несжимаемого пограничного слоя.

Разработанный метод был применен в задаче о трехмерном пограничном слое на пластине с цилиндрическим препятствием при наличии угла скольжения.

1. Рассмотрим трехмерный ламинарный пограничный слой в несжимаемой жидкости на произвольной поверхности. Будем пользоваться криволинейной ортогональной системой координат ξ, η, ζ , связанной с линиями тока внешнего идеального течения на поверхности. Координата ζ — расстояние от поверхности тела по нормали, так что $\zeta = 0$ — уравнение обтекаемой поверхности, линии $\eta = \text{const}$ — линии тока невязкого течения на поверхности, линии $\xi = \text{const}$ — их ортогональные траектории, т. е. эквипотенциальные линии.

Уравнения пространственного несжимаемого пограничного слоя в выбранной системе координат имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} & \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{w}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi} w^2 + \\ & + \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta} uw = \frac{U_e}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial U_e}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \\ & \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{w}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial w}{\partial \eta} + v \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta} u^2 + \\ & + \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial \xi} uw = - \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial \eta} U_e^2 + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}, \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{g_{22}}u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\sqrt{g_{11}}w) + \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0 \end{aligned}$$

Здесь u, w, v — проекции скорости соответственно на координатные линии ξ, η, ζ , ν — кинематический коэффициент вязкости, $g_{11}(\xi, \eta)$ и $g_{22}(\xi, \eta)$ — метрические коэффициенты.

Граничные условия для системы (1.1) выберем следующим образом:

$$(1.2) \quad u = w = v = 0 \text{ при } \zeta = 0, u \rightarrow U_e(\xi, \eta), w \rightarrow 0 \text{ при } \zeta \rightarrow \infty$$

Здесь U_e — полная скорость невязкого течения на поверхности тела.

В качестве координаты ξ вдоль линий тока выберем потенциал внешнего идеального течения φ . Обозначим координату η , ортогональную линиям тока, через ψ . Если ξ_1 и η_1 — произвольная ортогональная система координат на поверхности, то для компонент скорости внешнего течения имеем

$$U_e = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}, \quad w_e = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1}$$

Если в качестве ξ_1 и η_1 взять φ и ψ , то получим

$$U_e = 1/\sqrt{g_{11}}$$

Элемент длины на поверхности можно представить в виде

$$(1.3) \quad ds^2 = \frac{r^2}{U_e^2} \left(d\varphi^2 + \frac{1}{r^2} d\psi^2 \right), \quad g_{11} = 1/U_e^2, \quad g_{22} = 1/(r^2 U_e^2)$$

где $r^2 = 1/(g_{22} U_e^2)$ — функция, зависящая от геометрии поверхности, внешнего течения и выбора координаты ψ .

Предположим, что скорость, поперечная линиям тока внешнего течения, и ее производные малы по сравнению со скоростью вдоль линий тока. Так как поперечная скорость равна нулю на поверхности тела и на внешней границе пограничного слоя, то предположение о малой интенсивности вторичного течения до известной степени обосновано [2, 3]. Вторичное течение мало, когда внешние линии тока имеют малую геодезическую кривизну. До значений отношения скорости поперечного течения в пограничном слое к полной местной скорости, равных 0.3—0.4, можно использовать принцип независимости продольного течения от поперечного.

Сделаем в (1.1) замену

$$(1.4) \quad \zeta_1 = \sqrt{U_e} \xi, \quad v_1 = v/\sqrt{U_e}, \quad r_1 = r/U_e^{3/2}$$

В предположении о малости вторичного течения приходим к уравнениям, аналогичным уравнениям пограничного слоя около осесимметричного тела, из которых находится продольная скорость, и линейному уравнению для поперечной скорости

$$(1.5) \quad u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta_1} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial \xi} + v \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_1^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} (r_1 u) + r_1 \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_1} = 0$$

$$(1.6) \quad u \frac{\partial w}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial w}{\partial \zeta_1} + \frac{\partial \ln r_1}{\partial \xi} u w + \frac{1}{r_1 U_e} \frac{\partial \ln U_e}{\partial \eta} (u^2 - U_e^2) = v \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta_1^2}$$

с граничными условиями

$$u = w = v_1 = 0 \text{ при } \zeta_1 = 0, \quad u \rightarrow U_e, \quad w \rightarrow 0 \text{ при } \zeta_1 \rightarrow \infty$$

2. Найдем функцию r . Пусть $z = f(x, y)$ — уравнение обтекаемой поверхности в декартовых координатах. Перейдем от координат x, y, z к координатам φ, ψ, ζ . Для этого проведем нормаль из точки (x, y, z) на поверхность тела. Декартовы координаты точки пересечения обозначим через $x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)$.

Тогда φ, ψ, ζ связаны с x, y, z соотношениями

$$\varphi = \varphi(x_0, y_0, f(x_0, y_0)), \quad \psi = \psi(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

$$\zeta = |z - f(x_0, y_0)| \sqrt{1 + (\partial f / \partial x_0)^2 + (\partial f / \partial y_0)^2}$$

где x_0 и y_0 находятся из уравнений

$$x_0 = x + (z - f(x_0, y_0)) \partial f / \partial x_0, \quad y_0 = y + (z - f(x_0, y_0)) \partial f / \partial y_0$$

Необходимо найти g_{22} при $z = f(x, y)$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{1}{g^{22}} = \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-1}$$

Так как вектор скорости внешнего идеального течения $\mathbf{U}_e [u_x, u_y, u_z]$ лежит в плоскости, касательной к обтекаемой поверхности, то

$$u_z = \frac{\partial f}{\partial x_0} u_x + \frac{\partial f}{\partial y_0} u_y$$

Из того что линии $\psi = \text{const}$, $z = f(x, y)$ являются линиями тока на поверхности тела, нетрудно получить

$$(2.1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_0} = -\frac{u_x}{u_y} \frac{\partial \psi}{\partial x_0}$$

Учитывая это, можно найти

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial x} - \frac{u_x}{u_y} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \frac{1}{u_y} \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} \right)^2 \right]^{-1} \left[-u_y \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} \right)^2 \right) - u_x \frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{\partial f}{\partial y_0} \right] \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial y} - \frac{u_x}{u_y} \frac{\partial y_0}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \frac{1}{u_y} \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} \right)^2 \right)^{-1} \left[u_y \frac{\partial f}{\partial x_0} \frac{\partial f}{\partial y_0} + u_x \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \right)^2 \right) \right] \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial z} - \frac{u_x}{u_y} \frac{\partial y_0}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \frac{1}{u_y} \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} \right)^2 \right)^{-1} \left[-u_y \frac{\partial f}{\partial x_0} + u_x \frac{\partial f}{\partial y_0} \right] \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$(2.2) \quad g_{22} = \frac{1}{U_e^2} \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} \right)^2 \right) \left(\frac{u_y}{\partial \psi / \partial x_0} \right)^2$$

$$r = \left| \frac{\partial \psi / \partial x_0}{u_y} \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} \right)^2 \right)^{-1/2} \right|$$

Если известно $\mathbf{U}_e(x, y, z)$, можно найти $\partial U_e / \partial \xi$ и $\partial U_e / \partial \eta$ ($\xi = \varphi$, $\eta = \psi$) по формулам

$$(2.3) \quad \begin{aligned} U_e^2 \frac{\partial U_e}{\partial \xi} &= u_x \frac{\partial U_e}{\partial x} + u_y \frac{\partial U_e}{\partial y} + u_z \frac{\partial U_e}{\partial z} \\ - U_e^2 \frac{\partial \psi / \partial x_0}{u_y} \frac{\partial U_e}{\partial \eta} &= - \left(u_y + \frac{\partial f}{\partial y} u_z \right) \frac{\partial U_e}{\partial x} + \\ &+ \left(u_x + \frac{\partial f}{\partial x} u_z \right) \frac{\partial U_e}{\partial y} + \left(u_x \frac{\partial f}{\partial y} - u_y \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial U_e}{\partial z} \end{aligned}$$

3. Введем новые переменные аналогично [1]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \lambda &= \left[\frac{U_e(\xi, \eta)}{v[\xi - \xi_0(\eta)]} \right]^{1/2} \xi_1 \\ u &= U_e(\xi, \eta) E(\xi, \eta, \lambda), \quad w = U_e(\xi, \eta) G(\xi, \eta, \lambda) \\ v_1 &= \left[\frac{v U_e(\xi, \eta)}{\xi - \xi_0(\eta)} \right]^{1/2} \left[K(\xi, \eta, \lambda) - [\xi - \xi_0(\eta)] E(\xi, \eta, \lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - \right. \\ &\left. - r(\xi, \eta) [\xi - \xi_0(\eta)] G(\xi, \eta, \lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right] \end{aligned}$$

где $\xi_0(\eta) = \varphi_0(\psi)$ — уравнение границы тела, от которой начинает развиваться пограничный слой. Например, в случае обтекания плоской пластины с установленным на ней препятствием $\xi_0(\eta)$ — уравнение передней кромки пластины. Если рассматривается обтекание затупленного тела, когда имеется критическая точка, то функция $\xi_0(\eta) = 0$. Потенциал φ отсчитывается от этой передней критической точки, т. е. в ней $\varphi = \xi = 0$.

Уравнения (1.5) и (1.6) для u, v_1, w преобразуются в уравнения для E, K, G

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2} = K \frac{\partial E}{\partial \lambda} + N_1(E^2 - 1) + N_4 E \frac{\partial E}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \lambda} = -P_1 E - N_4 \frac{\partial E}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} = K \frac{\partial G}{\partial \lambda} + M_1(E^2 - 1) + M_3 EG + N_4 E \frac{\partial G}{\partial \xi}$$

с граничными условиями

$$(3.3) \quad E = G = K = 0 \quad \text{при } \lambda = 0, \quad E \rightarrow 1, \quad G \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

Коэффициенты P_1, M_1, M_3, N_1, N_4 являются известными функциями ξ и η и определяются геометрией поверхности и внешним течением

$$(3.4) \quad N_1 = \partial \ln U_e / \partial \ln \xi_1, \quad N_4 = \xi_1, \quad M_1 = \xi_1 r \partial \ln U_e / \partial \eta$$

$$M_3 = -\partial \ln r / \partial \ln \xi_1, \quad P_1 = \partial \ln \frac{V \xi_1}{r U_e} / \partial \ln \xi_1, \quad \xi_1 = \xi - \xi_0(\eta)$$

Компоненты трения на поверхности обтекаемого тела находятся по формулам

$$(3.5) \quad \tau_1 = \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} = \mu U_e \frac{\partial E}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{\mu \rho}{\xi - \xi_0}} U_e^2 \frac{\partial E}{\partial \lambda}$$

$$\tau_2 = \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} = \mu U_e \frac{\partial G}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{\mu \rho}{\xi - \xi_0}} U_e^2 \frac{\partial G}{\partial \lambda}$$

Здесь μ — динамический коэффициент вязкости, ρ — плотность.

4. Получим интегральные уравнения для функций E и G , проинтегрировав соответствующие дифференциальные уравнения два раза по λ (от λ до ∞ и затем от 0 до λ)

$$(4.1) \quad -E = P_1 \theta_{01}^* + (P_1 + N_1) \theta_{11}^* + N_1 \theta_1^* + N_4 \frac{\partial \theta_{11}^*}{\partial \xi} + N_4 \theta_{03}^*$$

$$-G = P_1 \theta_{02}^* + M_1 \theta_{11}^* + (P_1 + M_3) \theta_{21}^* + M_1 \theta_1^* + N_4 \frac{\partial \theta_{21}^*}{\partial \xi} + N_4 \theta_{04}^*$$

Для безразмерного трения на стенке имеем следующие выражения

$$(4.2) \quad -\frac{\partial E}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = (P_1 + N_1) \theta_{11} + N_1 \theta_1 + N_4 \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \xi}$$

$$-\frac{\partial G}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = M_1 \theta_{11} + (P_1 + M_3) \theta_{21} + M_1 \theta_1 + N_4 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \xi}$$

$$(4.3) \quad \theta_{11} = \int_{\lambda}^{\infty} (E - 1) E d\lambda, \quad \theta_{21} = \int_{\lambda}^{\infty} EG d\lambda, \quad \theta_1 = \int_{\lambda}^{\infty} (E - 1) d\lambda$$

$$\theta_{11}^* = \int_0^{\lambda} \int_{\lambda}^{\infty} (E - 1) E d\lambda d\lambda, \quad \theta_{21}^* = \int_0^{\lambda} \int_{\lambda}^{\infty} EG d\lambda d\lambda, \quad \theta_1^* = \int_0^{\lambda} \int_{\lambda}^{\infty} (E - 1) d\lambda d\lambda$$

$$\begin{aligned}\theta_{01}^* &= \int_0^\lambda [(E-1) \int_0^\lambda E d\lambda] d\lambda, & \theta_{02}^* &= \int_0^\lambda [G \int_0^\lambda E d\lambda] d\lambda \\ \theta_{03}^* &= \int_0^\lambda [(E-1) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\lambda E d\lambda] d\lambda, & \theta_{04}^* &= \int_0^\lambda [G \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\lambda E d\lambda] d\lambda.\end{aligned}$$

Интегральные уравнения (4.1) будем решать методом последовательных приближений [4]. Для этого необходимо, чтобы после подстановки в правые части этих уравнений произвольных интегрируемых функций $E(\xi, \eta, \lambda)$, $G(\xi, \eta, \lambda)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$E(\xi, \eta, 0) = G(\xi, \eta, 0) = 0, \quad E(\xi, \eta, \infty) = 1, \quad G(\xi, \eta, \infty) = 0$$

правые части принимали бы значения, равные единице и нулю соответственно при $\lambda \rightarrow \infty$. Для этого введем неизвестные «управляющие» функции $\delta(\xi, \eta)$ и $b(\xi, \eta)$

$$(4.4) \quad E^{(n)} = E^{(n)}(\xi, \eta, \lambda / \sqrt{\delta^{(n+1)}}), \quad G^{(n)} = b^{(n+1)} G^{(n)}(\xi, \eta, \lambda / \sqrt{\delta^{(n+1)}})$$

и новую независимую переменную

$$(4.5) \quad \zeta^{(n)} = \lambda / \sqrt{\delta^{(n+1)}}$$

После подстановки в правые части (4.1) вместо E функции $E^{(n)}(\xi, \eta, \zeta^{(n)})$ и вместо G функции $b^{(n+1)} G^{(n)}(\xi, \eta, \zeta^{(n)})$ и перехода от интегрирования по λ к интегрированию по $\zeta^{(n)}$, получим связь $(n+1)$ -го приближения с n -м приближением

$$(4.6) \quad \begin{aligned}-E^{(n+1)} &= \delta^{(n+1)} A^{(n)} + a_1^{(n)} \frac{d\delta^{(n+1)}}{d\xi} \\ -G^{(n+1)} &= \delta^{(n+1)} (B^{(n)} + b^{(n+1)} C^{(n)}) + a_2^{(n)} b^{(n+1)} \frac{d\delta^{(n+1)}}{d\xi} + a_3^{(n)} \delta^{(n+1)} \frac{db^{(n+1)}}{d\xi}\end{aligned}$$

Здесь $A^{(n)}(\xi, \eta, \zeta^{(n)})$, $B^{(n)}(\xi, \eta, \zeta^{(n)})$, $C^{(n)}(\xi, \eta, \zeta^{(n)})$, $a_i^{(n)}(\xi, \eta, \zeta^{(n)})$ ($i = 1, 2, 3$) — известные функции $E^{(n)}$ и $G^{(n)}$.

Функции $\delta^{(n+1)}(\xi, \eta)$ и $b^{(n+1)}(\xi, \eta)$ выбираем так, чтобы удовлетворялись граничные условия на внешней границе пограничного слоя для $E^{(n+1)}$ и $G^{(n+1)}$. При $\zeta \rightarrow \infty$ имеем $E^{(n+1)} \rightarrow 1$, $G^{(n+1)} \rightarrow 0$. Отсюда получим линейные дифференциальные уравнения первого порядка для определения $\delta^{(n+1)}$ и $b^{(n+1)}$

$$(4.7) \quad \begin{aligned}a_{1\infty}^{(n)} \frac{d\delta^{(n+1)}}{d\xi} &= -A_{\infty}^{(n)} \delta^{(n+1)} - 1 \\ a_{3\infty}^{(n)} \frac{db^{(n+1)}}{d\xi} &= b^{(n+1)} \left(-C_{\infty}^{(n)} + A_{\infty}^{(n)} \frac{a_{2\infty}^{(n)}}{a_{1\infty}^{(n)}} + \frac{a_{2\infty}^{(n)}}{a_{1\infty}^{(n)}} \frac{1}{\delta^{(n+1)}} \right) - B_{\infty}^{(n)}\end{aligned}$$

Эти уравнения можно проинтегрировать. Сначала решается первое уравнение, полученное $\delta^{(n+1)}$ подставляется во второе и затем определяется $b^{(n+1)}$.

Для безразмерного трения $(n+1)$ -е приближение на стенке находится по формулам

$$(4.8) \quad \begin{aligned}-\frac{\partial E}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}^{(n+1)} &= \sqrt{\delta^{(n+1)}} \left[N_1 (\theta_{11}^{(n)} + \theta_1^{(n)}) + P_1 \theta_{11}^{(n)} + N_4 \frac{\partial \theta_{11}^{(n)}}{\partial \xi} \right] + \\ &+ N_4 \theta_{11}^{(n)} \frac{d\sqrt{\delta^{(n+1)}}}{d\xi}\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial G}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}^{(n+1)} = V \sqrt{\delta^{(n+1)}} \left[M_1 (\theta_{11}^{(n)} + \theta_1^{(n)}) + b^{(n)} \left((P_1 + M_3) \theta_{21}^{(n)} + N_4 \frac{\partial \theta_{21}^{(n)}}{\partial \xi} \right) \right] + \\ + N_4 \theta_{21}^{(n)} \left(b^{(n+1)} \frac{d \sqrt{\delta^{(n+1)}}}{d \xi} + V \sqrt{\delta^{(n+1)}} \frac{db^{(n+1)}}{d \xi} \right)$$

Задавая каким-либо способом нулевое приближение, с помощью (4.6)–(4.8) можно определить все последующие приближения для компонент скорости и трения на поверхности.

5. Рассмотрим первое приближение. Нулевое приближение зададим в виде

$$(5.1) \quad E^{(0)} = 1 - Z_0(\zeta^{(0)}), \quad G^{(0)} = b^{(1)} (Z_0(\zeta^{(0)}) - Z_{-1}(\zeta^{(0)})) \\ Z_0(\zeta) = -\frac{2}{V\pi} \int_{\infty}^{\zeta} e^{-\xi^2} d\xi, \quad Z_{-1}(\zeta) = e^{-\zeta^2}$$

Последующие приближения $E^{(n)}$ и $G^{(n)}$ будут связаны с классом функций Z_m [5]

$$(5.2) \quad Z_m(\zeta) = \frac{A_m}{m!} \int_{\infty}^{\zeta} (\zeta - \xi)^m e^{-\xi^2} d\xi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь A_m выбираются так, что $Z_m(0) = 1$.

Функции $\delta(\xi, \eta)$ и $b(\xi, \eta)$ в первом приближении находятся из уравнений

$$(5.3) \quad N_4 \frac{d\delta^{(1)}}{d\xi_1} = -\delta^{(1)} \left[2P_1 + \left(\frac{4}{\pi} + 2 \right) N_1 \right] + 8$$

$$(5.4) \quad N_4 \frac{db^{(1)}}{d\xi_1} = b^{(1)} \left[-M_3 + 3(1 - \sqrt{2}) \frac{2 + \pi}{2 - \sqrt{2}\pi} N_1 + \right. \\ \left. + 3(\sqrt{2} - 1) \frac{4\pi}{2 - \sqrt{2}\pi} \frac{1}{\delta^{(1)}} \right] + \frac{2 + \pi}{2 - \sqrt{2}\pi} M_1$$

После подстановки значений коэффициентов уравнение (5.3) принимает вид

$$\frac{d\delta^{(1)}}{d \ln \xi_1} + \delta^{(1)} \frac{d}{d \ln \xi_1} \left(\ln \frac{\xi_1 U_e^{4/\pi}}{r^2} \right) = 8$$

Начальное условие для этого уравнения находится из требования, чтобы $d\delta^{(1)}/d\xi_1$ было конечным, когда $\xi_1 = 0$. Для этого необходимо, чтобы

$$\delta^{(1)}|_{\xi_1=0} = 8$$

Решая уравнение для $\delta^{(1)}$ с этим начальным условием, получим

$$(5.5) \quad \delta^{(1)} = \frac{8}{M} \int_0^{\xi_1} \frac{M}{\xi_1} d\xi_1 = \frac{8}{M} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{M}{\xi - \xi_0} d\xi, \quad M = \frac{\xi_1}{r^2} U_e^{4/\pi} = \frac{\xi - \xi_0}{r^2} U_e^{4/\pi}$$

Раскрывая значения коэффициентов и используя найденное выражение для $\delta^{(1)}$, для функции $b^{(1)}(\xi, \eta)$ имеем уравнение

$$\frac{db^{(1)}}{d \ln \xi_1} = b^{(1)} \frac{d}{d \ln \xi_1} \ln \left[r U_e^{2.616} \left(\int_0^{\xi_1} \frac{M}{\xi_1} d\xi_1 \right)^{-0.7992} \right] - 2.1048 \xi_1 r \frac{\partial \ln U_e}{\partial \eta}$$

Из предположения, что $db^{(1)}/d\xi_1$ конечно при $\xi_1 = 0$, получаем начальное условие для $b^{(1)}$: $b^{(1)}|_{\xi_1=0} = 0$.

Решение уравнения с таким начальным условием имеет вид

$$(5.6) \quad b^{(1)} = -\frac{2.1048r}{N} \int_0^{\xi_1} \frac{\partial \ln U_e}{\partial \eta} N d\xi_1, \quad N = \left(\int_0^{\xi_1} \frac{M}{\xi_1} d\xi_1 \right)^{0.7992} U_e^{-2.616}$$

Зная $\delta^{(1)}$ и $b^{(1)}$, можно найти первое приближение для компонент скорости и для трения на стенке. Для $E^{(1)}$ и $G^{(1)}$, учитывая (4.6) и (5.3), (5.4), получаем выражения

$$(5.7) \quad E^{(1)} = \delta^{(1)} \frac{\partial \ln U_e}{\partial \ln \xi_1} \left[a_1 \left(\frac{4}{\pi} + 2 \right) - J_{0.0} - \frac{1}{2} (Z_2 - 1) \right] - 8a_1$$

$$G^{(1)} = b^{(1)} \left[3(\sqrt{2} - 1) \frac{4\pi}{\sqrt{2}\pi - 2} a_3 - 8a_2 \right] +$$

$$+ \delta^{(1)} r \xi_1 \frac{\partial \ln U_e}{\partial \eta} \left[\frac{2 + \pi}{\sqrt{2}\pi - 2} a_3 - J_{0.0} - \frac{1}{2} (Z_2 - 1) \right] +$$

$$+ \delta^{(1)} b^{(1)} \frac{\partial \ln U_e}{\partial \ln \xi_1} \left[\left(\frac{4}{\pi} + 2 \right) a_2 - 3(\sqrt{2} - 1) \frac{2 + \pi}{\sqrt{2}\pi - 2} a_3 \right]$$

$$(5.8) \quad a_1 = \frac{a_1^{(0)}}{N_4} = \frac{1}{2} \left[J_{0.0} - \frac{1}{2\pi} (1 - Z_1^2) + \frac{1}{\pi} (1 - Z_1) - \frac{1}{2} (1 - Z_0) \right]$$

$$a_2 = \frac{a_2^{(0)}}{N_4} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} (1 - Z_1^2) - I_{-1.1}^* + I_{0.0}^* - J_{0.0} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} (1 - Z_{-1}) + (1 - Z_0) - \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) (1 - Z_1) \right]$$

$$a_3 = a_3^{(0)} / N_4 = 1/4 (1 - Z_2) - 1/2 (1 - Z_1) - J_{0.0} + I_{0.0}^*$$

$$J_{0.0} = \frac{1}{2\pi} (1 - Z_1^2) + \frac{1}{4} (1 - Z_0^2) - \frac{1}{\pi} (1 - Z_1(\sqrt{2} \zeta^{(1)}))$$

$$I_{0.0}^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} Z_0 (Z_1 + Z_{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - Z_0(\sqrt{2} \zeta^{(1)}))$$

$$I_{-1.1}^* = \frac{1}{2} Z_0 (Z_{-1} - Z_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - Z_0(\sqrt{2} \zeta^{(1)}))$$

Найдем величины безразмерного трения на поверхности тела в первом приближении. Используя (4.8), (5.3) и (5.4), имеем

$$(5.9) \quad \frac{\partial E}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(1)}} \frac{\partial \ln U_e}{\partial \ln \xi_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\pi \sqrt{\pi}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\delta^{(1)}}} \frac{4(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \xi_1 r \frac{\partial \ln U_e}{\partial \eta} \sqrt{\delta^{(1)}} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{2+\pi}{2-\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\pi}} \right) \right] +$$

$$+ b^{(1)} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\pi}} \right) \left[\sqrt{\delta^{(1)}} \frac{\partial \ln U_e}{\partial \ln \xi_1} (2 + \pi) \left(\frac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}\pi - 2} - \frac{1}{\pi} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\sqrt{\delta^{(1)}}} \left(1 - \frac{3(\sqrt{2}-1)\pi}{\sqrt{2}\pi - 2} \right) \right]$$

6. Рассмотрим с помощью предложенного метода задачу о пограничном слое, образующемся на тонкой полубесконечной пластине, перпендикулярно к которой поставлен бесконечный цилиндр, при обтекании пластины потоком несжимаемой жидкости.

Будем рассматривать обтекание пластины под углом скольжения θ , где θ — угол между нормалью к скорости набегающего потока на бесконечности и передней кромкой пластины (фиг. 1).

В случае кругового цилиндра в качестве координаты φ выбираем относительный потенциал внешнего идеального течения [6]

$$(6.1) \quad \xi = \varphi = x \left(1 + \frac{1}{x^2 + z^2} \right) + \frac{d^2 + 1}{d}$$

Здесь x, z — декартовы координаты на плоскости, отнесенные к радиусу цилиндра. Поскольку невязкое течение в данной задаче двумерное, в качестве координаты ψ можем взять функцию тока

$$(6.2) \quad \eta = \psi = z \left(1 - \frac{1}{x^2 + z^2} \right)$$

Тогда

$$(6.3) \quad r \equiv 1, \quad g_{11} = g_{22} = 1 / U_e^2$$

В координатах x, z уравнение передней кромки пластины имеет вид: $x + d = z \operatorname{tg} \theta$. Напишем это уравнение в координатах ψ, φ

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \varphi_0 &= (z \operatorname{tg} \theta - d) \left(1 + \frac{1}{(z \operatorname{tg} \theta - d)^2 + z^2} \right) + \frac{d^2 + 1}{d} \\ \psi &= z \left(1 - \frac{1}{(z \operatorname{tg} \theta - d)^2 + z^2} \right) \end{aligned}$$

Исключая отсюда z , можно найти $\varphi_0(\psi) = \xi_0(\eta)$.

Продольная и поперечная составляющие скорости и трение на пластине находятся по формулам (5.5) — (5.9), в которых надо r положить равным единице.

Рассмотрим задачу на линии растекания $z = 0$. При этом

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \eta = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0, \quad \xi &= x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{d^2 + 1}{d} \\ \xi_0 = 0, \quad U_e &= 1 - 1/x^2 \end{aligned}$$

Для безразмерного трения получаем

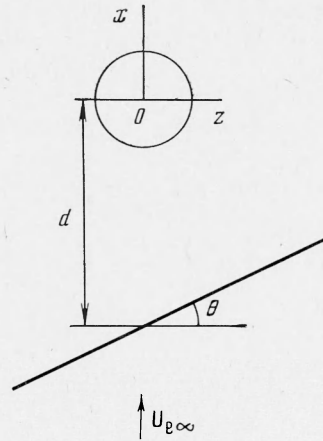
$$(6.6) \quad \left. \frac{\partial E}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \left(0.4146 \frac{\partial U_e}{\partial \xi} \frac{8}{U_e^{4/\pi+1}} \int_0^{\xi} U_e^{4/\pi} d\xi + 0.9368 \right) \left(\frac{8}{\xi U_e^{4/\pi}} \int_0^{\xi} U_e^{4/\pi} d\xi \right)^{-1/2}$$

Давление в пограничном слое вдоль линии растекания по мере приближения к цилиндру будет возрастать. Поэтому поток в пограничном слое тормозится и возникает «отрыв» пограничного слоя. Найдем точку отрыва на линии растекания, т. е. точку, в которой трение обращается в нуль. Так как

$$dx = \frac{d\xi}{U_e}, \quad \frac{\partial U_e}{\partial \xi} = \frac{\partial U_e}{\partial x} \frac{1}{U_e}$$

уравнение для координаты x точки отрыва принимает вид

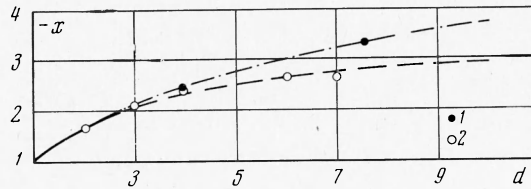
$$(6.7) \quad \frac{x^{8/\pi+1}}{(x^2 - 1)^{4/\pi+2}} \int_{-d}^x \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{4/\pi+1} dx + 0.1412 = 0$$



Фиг. 1

Положение точки отрыва на линии растекания зависит только от d и не зависит от угла скольжения θ .

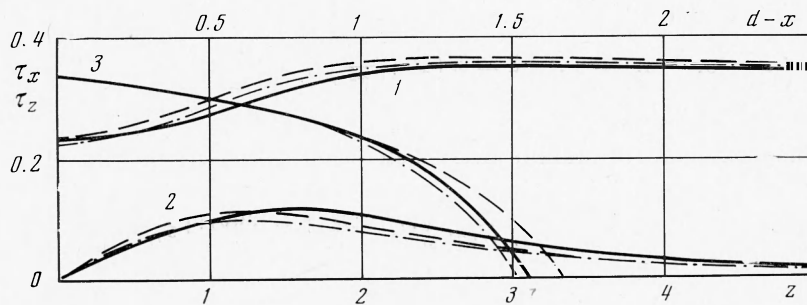
Зависимость положения точки отрыва на линии растекания от расстояния оси цилиндра до передней кромки пластины (d), выраженная формулой (6.7), представлена на фиг. 2. Здесь же приведены экспериментальные данные [7] и данные точных численных расчетов [1] (штрихпунктирная кривая — настоящий расчет, 2 — экспериментальные данные, 1 — результат конечно-разностных расчетов). Видно, что и экспериментальные точки, и точное решение хорошо ложатся на расчетную кривую. На этой же фигуре показана зависимость точки отрыва на линии растекания от d



Фиг. 2

в первом приближении для локально-автомодельного решения. Локально-автомодельное решение — это приближенное решение уравнений пограничного слоя, когда производными искомых функций по ξ и по η по сравнению с производными по ζ пренебрегаем, и координаты ξ и η входят в уравнения лишь как параметры (пунктирная кривая на фиг. 2 — результаты локально-автомодельного приближения).

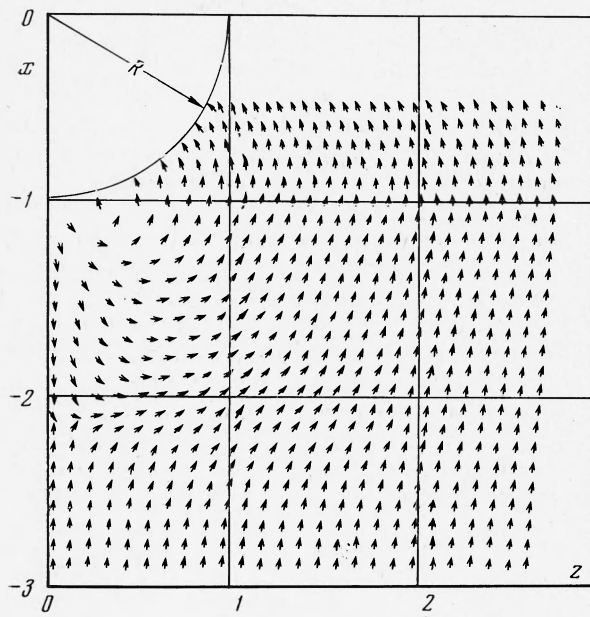
Полученное по формулам (5.9) трение на поверхности сравнивалось с результатами точных численных расчетов и с локально-автомодельным решением. Сравнение проводилось для угла скольжения, равного нулю, и $d = 4$. На фиг. 3 видно, что первое приближение хорошо совпадает с точным решением.



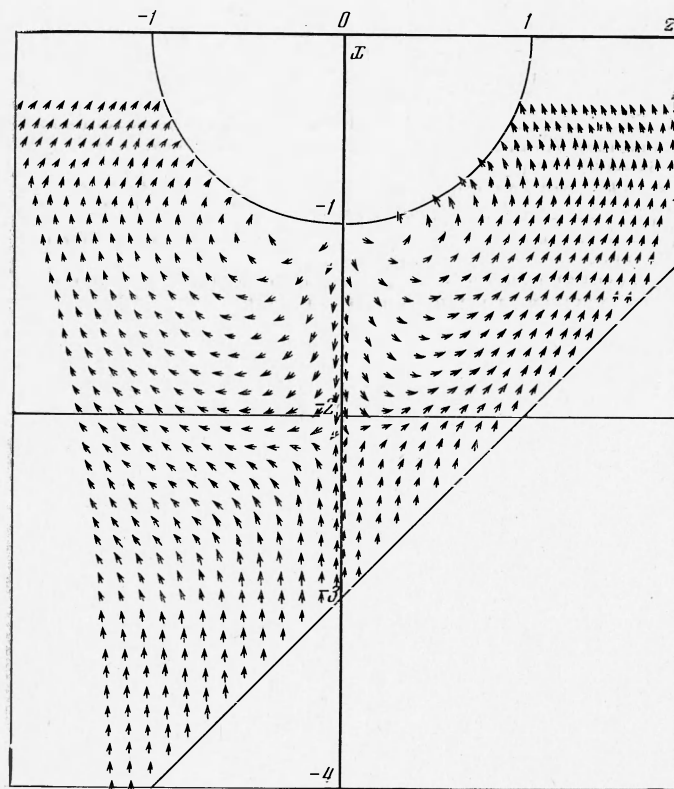
Фиг. 3

На фиг. 3 приводится сравнение безразмерных величин компонент трения τ_x (кривые 1) и τ_z (кривые 2), полученных в данном приближении, с результатами конечно-разностных расчетов и локально-автомодельного приближения при $x = -3$ в зависимости от z .

На фиг. 3 (кривая 3) приводится безразмерная компонента трения τ_x на линии растекания $z = 0$ в зависимости от $d - x$ (штрихпунктирная кривая — данный расчет, сплошная кривая — результаты конечно-разностных расчетов, пунктирная кривая — локально-автомодельное приближение).



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4 показано поведение «предельных» линий тока на теле ($d = 3, \theta = 0$). Картина течения в пограничном слое полностью отличается от картины внешнего идеального течения. Видна «линия отрыва», которая в данном случае является огибающей предельных линий тока.

На фиг. 5 показано поведение предельных линий тока на теле при наличии угла скольжения ($d = 3, \theta = 45^\circ$). Точка отрыва на линии растекания не зависит от угла скольжения, но в каждой из полуплоскостей ($z > 0, z < 0$) картина поведения линий тока несимметрична. За линией отрыва можно заметить образовавшийся вихрь. Предлагаемый метод позволяет найти в первом приближении картину поведения предельных линий тока всюду на теле, в частности за линией отрыва. Результаты, полученные за линией отрыва, следует рассматривать с известной осторожностью, поскольку приближение теории пограничного слоя и предположение о малости вторичного течения вблизи линии отрыва не выполняется. Поэтому эти результаты приводятся только частично, хотя они представляют интерес, так как позволяют, на наш взгляд, выяснить характер течения и дают возможность математически строго обосновать постановку задачи во всей области.

Поступила 1 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевелев Ю. Д. Разностные методы расчета пространственного ламинарного пограничного слоя. В сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 1. Течения в пограничном слое. М., Изд. МГУ, 1971, стр. 100—195.
2. Eichelbrenner E. A., Oudart A. Méthode de calcul de la couche limite tridimensionnelle. Chatillon — sous — Vagneux (Sci.) 1955, ONERA publication, No. 76.
3. Авдуческий В. С. Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2.
4. Ковач Э. А., Турский Г. А. Применение метода последовательных приближений к интегрированию уравнений пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 1, стр. 61—64.
5. Zeytounian R. Kh. Contribution a l'étude de la couche limite tridimensionnelle laminaire incompressible en régime instationnaire. ONERA, 1968, Note Techn., No. 131.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
7. Зубцов А. В. Расчет трехмерного пограничного слоя при двухмерном потенциальном потоке на его внешней границе. Тр. ЦАГИ, 1969, вып. 1125.