УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

В. Н. Максименко, Е. Г. Подружин

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

На основе технической теории изгиба тонких анизотропных пластин (гипотезы Кирхгофа — Лява) строятся представления фундаментальных решений для анизотропных, в частности ортотропных, пластин, имеющих каноническую форму (полуплоскость, квадрант, полоса, полуполоса, прямоугольник, неограниченная пластина с эллиптическим отверстием).

Ключевые слова: анизотропная пластина, изгиб, сосредоточенная нагрузка, комплексные потенциалы, фундаментальное решение.

При решении задач упругого растяжения и изгиба анизотропных пластин важную роль играют фундаментальные решения (решения для сосредоточенных нагрузок и дислокаций), с помощью которых путем интегрирования могут быть получены решения задачи о действии нагрузок, распределенных по линиям или площадкам (областям). При решении задач изгиба анизотропных пластин, имеющих концентраторы напряжений в форме вырезов, отверстий, трещин, знание фундаментальных решений позволяет записывать потенциальные представления на контуре концентраторов напряжений в виде интегралов типа Коши и численно решать краевую задачу. Кроме того, часть краевых условий на контуре пластины может выполняться автоматически, что облегчает численную реализацию. Полученные ниже решения сравниваются с известными решениями для изотропных пластин [1].

1. Рассмотрим однородную пластину из материала с прямолинейной анизотропией (необязательно ортотропного), занимающую область $D = \{|x| < \infty, |y| < \infty\}$. В точке τ с координатами $x = \xi$, $y = \eta$ приложены сосредоточенные нагрузки: P_z — сосредоточенная поперечная сила; M_x, M_y — сосредоточенные изгибающие моменты. Следуя классической теории изгиба тонких анизотропных пластин [2], упругие комплексные потенциалы Лехницкого могут быть представлены в виде

$$\Phi_\nu(z_\nu) = E^1_\nu(z_\nu,\tau) + M^1_\nu(z_\nu,\tau), \quad E^1_\nu(z_\nu,\tau) = A_\nu \ln(z_\nu - \tau_\nu), \quad M^1_\nu(z_\nu,\tau) = B_\nu/(z_\nu - \tau_\nu),$$
$$z_\nu = \operatorname{Re} z + \mu_\nu \operatorname{Im} z, \qquad \tau_\nu = \xi + \mu_\nu \eta \qquad (\nu = 1, 2); \tag{1}$$

$$\varphi_\nu(z_\nu) = A_\nu[\ln(z_\nu - \tau_\nu) - 1](z_\nu - \tau_\nu) + B_\nu \ln(z_\nu - \tau_\nu) + D_\nu,$$

$$F_\nu(z_\nu) = A_\nu(z_\nu - \tau_\nu)^2[\ln(z_\nu - \tau_\nu) - 3/2]/2 + B_\nu(z_\nu - \tau_\nu)[\ln(z_\nu - \tau_\nu) - 1] + D_\nu z_\nu + G_\nu,$$

$$F''_\nu(z_\nu) = \Phi_\nu(z_\nu), \qquad \varphi'_\nu(z_\nu) = \Phi_\nu(z_\nu) \qquad (\nu = 1, 2).$$

Здесь член $E^1_\nu(z_\nu,\tau)$ соответствует сосредоточенной силе P_z, $M^1_\nu(z_\nu,\tau)$ — сосредоточенному изгибающему моменту с компонентами M_x, M_y. Слагаемые $D_\nu z_\nu + G_\nu$ в выражении для $F_\nu(z_\nu)$ определяют перемещение пластины как жесткого целого; A_ν, B_ν — неизвестные комплексные константы.

Функции $\varphi_\nu(z_\nu)$, $F_\nu(z_\nu)$ являются многозначными. При обходе точки $\tau = \xi + i\eta$ по произвольному замкнутому контуру L они получают приращения (поскольку выражаются через многозначную функцию $\ln(z_\nu - \tau_\nu)$), которые имеют вид

$$\{\varphi_\nu(z_\nu)\}_L = 2\pi i[A_\nu(z_\nu - \tau_\nu) + B_\nu], \qquad \{\Phi_\nu(z_\nu)\} = 2\pi i A_\nu,$$
$$\{F_\nu(z_\nu)\}_L = 2\pi i[A_\nu(z_\nu - \tau_\nu)^2/2 + B_\nu(z_\nu - \tau_\nu)], \qquad \nu = 1, 2.$$

Уравнения для определения A_ν, B_ν получаются из условия однозначности тангенциальных смещений и прогибов $(u + iv,\ w)$ в пластине, а также из условия равновесия части пластины, ограниченной контуром L:

$$\sum_{\nu=1}^{2}(\mu_\nu^{k-2}A_\nu - \bar\mu_\nu^{k-2}\bar A_\nu) = f_k \quad (k = \overline{1,4}), \qquad f_1 = \frac{P_z}{2\pi i D_{11}}, \quad f_j = 0\ (j = \overline{2,4}),$$
$$\sum_{\nu=1}^{2}(\mu_\nu^{k-2}B_\nu - \bar\mu_\nu^{k-2}\bar B_\nu) = d_k \quad (k = \overline{1,4}), \qquad d_1 = \frac{M_y}{2\pi i D_{11}}, \quad d_4 = \frac{M_x}{2\pi i D_{22}}, \quad d_3 = d_2 = 0. \tag{2}$$

Здесь D_{11}, D_{22} — цилиндрические жесткости пластины в направлении осей x, y.

Угол между главным направлением ортотропии E_1 и осью x обозначим через φ. При $\varphi = 0$ для ортотропного материала имеем $\mu_{1,2} = \pm\alpha + i\beta$. В этом случае $\operatorname{Im} A_1 = -\operatorname{Im} A_2$ и для A_ν получаются простые выражения

$$A_{1,2} = |\mu_1|^2 P_z(\alpha \mp i\beta)/(16\pi\alpha\beta D_{11}).$$

2. Рассмотрим анизотропную полуплоскость $D = \{x \geqslant 0,\ |y| < \infty\}$, жестко защемленную вдоль линии $x = 0$. Пусть в точке с координатами $x = \xi$, $y = \eta$ приложена сосредоточенная сила P_z. С учетом аналогии между плоской задачей и задачей изгиба пластин [3] выражения для комплексных потенциалов можно записать в следующем виде:

$$\Phi_\nu(z_\nu) = E_\nu^2(z_\nu, \tau) = A_\nu \ln\frac{z_\nu - \tau_\nu}{\mu_\nu} + \bar A_1 l_\nu s_\nu \ln\frac{s_\nu z_\nu - \bar\tau_1}{\bar\mu_1} + \bar A_2 n_\nu m_\nu \ln\frac{m_\nu z_\nu - \bar\tau_2}{\bar\mu_2},$$
$$l_\nu = \frac{\mu_{3-\nu} - \bar\mu_1}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}}, \qquad s_\nu = \frac{\bar\mu_1}{\mu_\nu}, \qquad n_\nu = \frac{\mu_{3-\nu} - \bar\mu_2}{\mu_\nu - \mu_{3-\nu}}, \qquad m_\nu = \frac{\bar\mu_2}{\mu_\nu}, \qquad \nu = 1, 2. \tag{3}$$

Первое слагаемое в (3) с точностью до комплексной постоянной соответствует решению для бесконечной пластины при действии сосредоточенной силы. Второе и третье слагаемые — функции, регулярные в рассматриваемой области и обеспечивающие выполнение условий жесткого защемления ($w = w_x = 0$) вдоль линии $x = 0$ за счет надлежащего выбора комплексных постоянных l_ν, n_ν (в несколько ином виде решение для анизотропной жестко защемленной полуплоскости получено в [4]).

Для свободного края $x = 0$ полуплоскости из краевого условия получается система уравнений для определения констант l_ν, n_ν

$$l_1p_1s_1 + l_2p_2s_2 = -\bar p_1, \qquad l_1s_1^2q_1\mu_1^2 + l_2s_2^2q_2\mu_2^2 = -\bar q_1^2\bar\mu_1^2,$$
$$n_1p_1m_1 + n_2p_2m_2 = -\bar p_2, \qquad n_1m_1^2q_1\mu_1^2 + n_2m_2^2q_2\mu_2^2 = -\bar q_2^2\bar\mu_2^2,$$

откуда следует

$$l_\nu = \frac{q_\lambda\bar p_1/\bar\mu_1 - \bar q_1 p_\lambda/\mu_\lambda}{q_\nu p_\lambda/\mu_\lambda - q_\lambda p_\nu/\mu_\nu}, \qquad n_\nu = \frac{q_\lambda\bar p_2/\bar\mu_2 - \bar q_2 p_\lambda/\mu_\lambda}{q_\nu p_\lambda/\mu_\lambda - q_\lambda p_\nu/\mu_\nu}, \qquad \lambda = 3 - \nu. \tag{4}$$

Для свободно опертого края $(x = 0)$ полуплоскости из краевого условия получаем

$$l_1p_1s_1 + l_2p_2s_2 = -\bar p_1, \qquad l_1s_1^{-1} + l_2s_2^{-1} = -1,$$

$$n_1 p_1 m_1 + n_2 p_2 m_2 = -\bar{p}_2, \qquad n_1 m_1^{-1} + n_2 m_2^{-1} = -1,$$

соответственно

$$l_\nu = \frac{\bar{\mu}_1 p_\lambda/\mu_\lambda - \mu_\lambda \bar{p}_1/\bar{\mu}_1}{\mu_\lambda p_\nu/\mu_\nu - \mu_\nu p_\lambda/\mu_\lambda}, \qquad n_\nu = \frac{\bar{\mu}_2 p_\lambda/\mu_\lambda - \mu_\lambda \bar{p}_2/\bar{\mu}_2}{\mu_\lambda p_\nu/\mu_\nu - \mu_\nu p_\lambda/\mu_\lambda}.$$

Рассмотрим ортотропную ($\varphi = 0$) полуплоскость $D = \{x \geqslant 0,\ |y| < \infty\}$ со свободно опертым краем $x = 0$. Приложив к неограниченной пластине две сосредоточенные силы, одинаковые по модулю, но противоположные по направлению, симметрично относительно оси y, используя принцип суперпозиции, можно получить выражение для комплексных потенциалов при изгибе свободно опертой полуплоскости сосредоточенной силой

$$\Phi_\nu(z_\nu) = E_\nu^3(z_\nu,\tau) = E_\nu^1(z_\nu,\tau) - E_\nu^1(z_\nu,-\bar{\tau}) = A_\nu \ln\left((z_\nu - \tau_\nu)/(z_\nu + \tau_\nu^*)\right),$$
$$\tau_\nu^* = \xi - \mu_\nu \eta, \quad \nu = 1,2.$$

Последняя формула может быть получена из формулы (3) при замене упругих параметров с учетом ортотропии материала.

3. Рассмотрим квадрант (первую четверть комплексной плоскости). Положим $\varphi = 0$. Если к полубесконечной ортотропной пластине со свободно опертым краем приложить сосредоточенные силы противоположного знака симметрично относительно оси x, то получим решение задачи о действии сосредоточенной силы, приложенной во внутренней точке квадранта, свободно опертого по сторонам $x = 0$, $y = 0$:

$$\Phi_\nu(z_\nu) = E_\nu^4(z_\nu,\tau) = E_\nu^1(z_\nu,\tau) + E_\nu^1(z_\nu,-\tau) - E_\nu^1(z_\nu,\bar{\tau}) - E_\nu^1(z_\nu,-\bar{\tau}),$$
$$\Phi_\nu(z_\nu) = A_\nu \ln\frac{(z_\nu - \tau_\nu)(z_\nu + \tau_\nu)}{(z_\nu + \tau_\nu^*)(z_\nu - \tau_\nu^*)}, \qquad \tau_\nu^* = \xi - \mu_\nu \eta, \qquad \nu = 1,2.$$

Рассмотрим ортотропную полуплоскость $D = \{x \geqslant 0,\ |y| < \infty\}$, $\varphi = 0$, жестко защемленную вдоль линии $x = 0$. Если к ортотропной полуплоскости приложить две сосредоточенные силы, одинаковые по величине и противоположные по направлению, симметрично относительно оси x, то получим решение задачи изгиба ортотропного квадранта ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), жестко защемленного по стороне $x = 0$ и свободно опертого по стороне $y = 0$. Комплексные потенциалы запишутся следующим образом:

$$\Phi_\nu(z_\nu) = E_\nu^5(z_\nu,\tau) = E_\nu^2(z_\nu,\tau) - E_\nu^2(z_\nu,\bar{\tau}),$$
$$\Phi_\nu(z_\nu) = A_\nu \ln\frac{z_\nu - \tau_\nu}{z_\nu - \tau_\nu^*} + \bar{A}_1 l_\nu s_\nu \ln\frac{s_\nu z_\nu - \bar{\tau}_1}{s_\nu z_\nu - \bar{\tau}_1^*} + \bar{A}_2 n_\nu m_\nu \ln\frac{m_\nu z_\nu - \bar{\tau}_2}{m_\nu z_\nu - \bar{\tau}_2^*},$$
$$\tau_\nu^* = \xi - \mu_\nu \eta, \qquad \nu = 1,2.$$

4. Пусть анизотропная плоскость нагружена периодической системой сосредоточенных сил, расположенных на линии, параллельной оси x. В этом случае в выражении (1) необходимо $\ln(z_\nu - \tau_\nu)$ заменить на $\ln\{\sin[\omega(z_\nu - \tau_{\nu k})]\}$, тогда комплексные потенциалы примут вид

$$\begin{gathered}\Phi_\nu(z_\nu) = E_\nu^6(z_\nu,\tau) = A_\nu \ln\{\sin[\omega(z_\nu - \tau_{\nu k})]\},\\ \omega = \pi/l, \quad \tau_{\nu k} = \tau_\nu + kl \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\infty).\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь l — период приложения нагрузки.

Нагрузим ортотропную плоскость ($\varphi = 0$) двумя периодическими системами сосредоточенных сил (рис. 1). Используя принцип суперпозиции, с учетом (5) в задаче изгиба бесконечной полосы (шириной l), нагруженной сосредоточенной силой в произвольной точке, получим выражения для комплексных потенциалов

$$\Phi_\nu(z_\nu) = E_\nu^7(z_\nu,\tau) = A_\nu \ln\{\sin[\omega(z_\nu - \tau_{\nu k})]/\sin[\omega(z_\nu - t_{\nu k})]\},$$

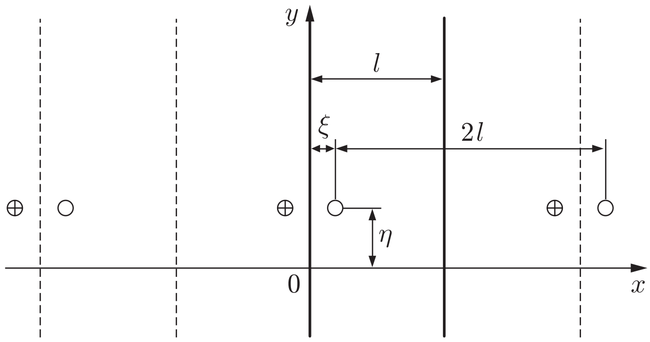

Рис. 1

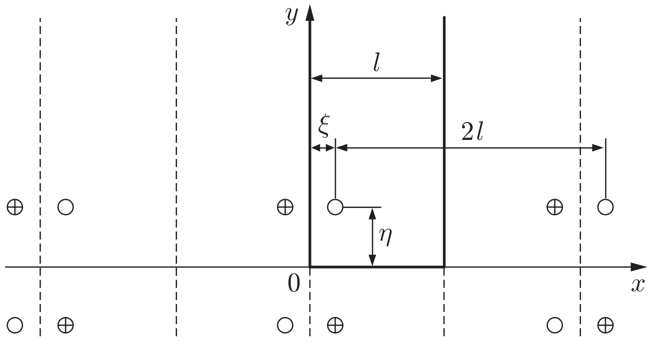

Рис. 2

$$t_{\nu k} = -\xi + \mu_\nu \eta + 2l(k+1), \qquad \tau_{\nu k} = \xi + \mu_\nu \eta + 2kl, \tag{6}$$
$$\omega = \pi/(2l), \quad t_{\nu k} - \tau_{\nu k} = 2(l - \xi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty).$$

Следует отметить, что первообразная функции $\Phi_\nu(z_\nu)$, так же как функции $\varphi_\nu(z_\nu) = F'_\nu(z_\nu)$ в формулах (5), (6), получаются в виде бесконечных рядов [1, 5].

5. Пусть ортотропная полуполоса $D = \{0 \leqslant y < \infty,\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$, $\varphi = 0$ со свободно опертыми кромками нагружена в точке $\tau = \xi + i\eta$ сосредоточенной силой. Соответствующее решение может быть получено суммированием решения для системы, представленной на рис. 2.

Комплексные потенциалы принимают вид

$$\Phi_\nu(z_\nu) = E^8_\nu(z_\nu, \tau) = A_\nu \ln \Big(\frac{\sin[\omega(z_\nu - \tau_{\nu k})]}{\sin[\omega(z_\nu - t_{\nu k})]} \frac{\sin[\omega(z_\nu - t^*_{\nu k})]}{\sin[\omega(z_\nu - \tau^*_{\nu k})]} \Big),$$
$$t_{\nu k} = -\xi + \mu_\nu \eta + 2l(k+1), \quad \tau_{\nu k} = \xi + \mu_\nu \eta + 2kl,$$
$$t^*_{\nu k} = -\xi - \mu_\nu \eta + 2l(k+1), \quad \tau^*_{\nu k} = \xi - \mu_\nu \eta + 2kl,$$
$$\omega = \pi/(2l), \qquad t_{\nu k} - \tau_{\nu k} = t^*_{\nu k} - \tau^*_{\nu k} = 2(l - \xi) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty).$$

На основе решения для свободно опертой полуполосы можно получить решение для ортотропной ($\varphi = 0$) пластины прямоугольной формы, свободно опертой по сторонам, для чего в полосе необходимо приложить нагрузку (рис. 3). В этом случае выражения для комплексных потенциалов получаются в виде бесконечного ряда

$$\Phi_\nu(z_\nu) = E^9_\nu(z_\nu, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_\nu \ln \Big(\frac{\sin[\omega(z_\nu - \tau_{\nu kn})]}{\sin[\omega(z_\nu - t_{\nu kn})]} \frac{\sin[\omega(z_\nu - t^*_{\nu kn})]}{\sin[\omega(z_\nu - \tau^*_{\nu kn})]} \Big),$$
$$t_{\nu kn} = -\xi + \mu_\nu(\eta + n2l_1) + 2l(k+1), \qquad \tau_{\nu kn} = \xi + \mu_\nu(\eta + n2l_1) + 2kl,$$

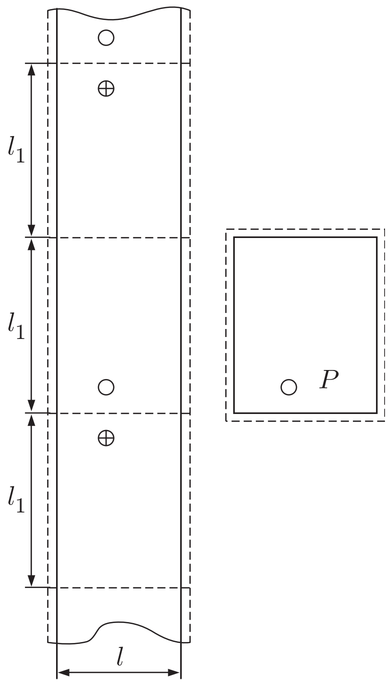

Рис. 3

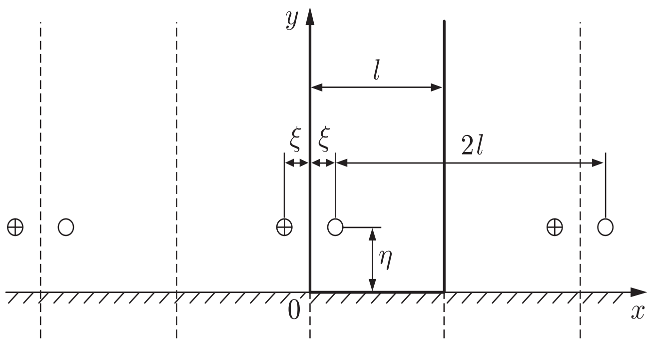

Рис. 4

$$t^*_{\nu kn} = -\xi - \mu_\nu(\eta + n2l_1) + 2l(k+1), \qquad \tau^*_{\nu kn} = \xi - \mu_\nu(\eta + n2l_1) + 2kl,$$
$$\omega = \pi/(2l), \qquad t_{\nu kn} - \tau_{\nu kn} = t^*_{\nu kn} - \tau^*_{\nu kn} = 2(l-\xi)$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty).$$

Данный ряд сходится достаточно быстро, поэтому для определения статических или кинематических величин достаточно удержать под знаком суммы 3–4 слагаемых.

6. Пусть имеется ортотропная полуполоса $D = \{0 \leqslant y < \infty,\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$, $\varphi = 0$, свободно опертая по полубесконечным сторонам $x = 0, l$ и жестко защемленная по стороне $y = 0$ длиной l. Решение задачи о действии сосредоточенной силы в такой пластине может быть получено суммированием решения для системы, представленной на рис. 4. Для верхней полуплоскости $y \geqslant 0$ комплексные потенциалы (3) принимают вид

$$\Phi_\nu(z_\nu) = A_\nu \ln(z_\nu - \tau_\nu) + \bar{A}_1 l_\nu \ln(z_\nu - \bar{\tau}_1) + \bar{A}_2 n_\nu \ln(z_\nu - \bar{\tau}_2).$$

Решение для верхней полуплоскости, нагруженной периодической системой сосредоточенных сил, записывается следующим образом:

$$\Phi_\nu(z_\nu) = E^{10}_\nu(z_\nu, \tau) = A_\nu \ln\{\sin[\omega(z_\nu - \tau_{\nu k})]\} +$$
$$+ \bar{A}_1 l_\nu \ln\{\sin[\omega(z_\nu - \bar{\tau}_{1k})]\} + \bar{A}_2 n_\nu \ln\{\sin[\omega(z_\nu - \bar{\tau}_{2k})]\},$$
$$\omega = \pi/(2l), \qquad \tau_{\nu k} = \xi + \mu_\nu \eta + 2lk.$$

Комплексные потенциалы для полуполосы (рис. 4) принимают вид

$$\Phi_\nu(z_\nu) = E^{11}_\nu(z_\nu, \tau) = E^{10}_\nu(z_\nu, \tau) - E^{10}_\nu(z_\nu, t) =$$
$$= A_\nu \ln\frac{\sin[\omega(z_\nu - \tau_{\nu k})]}{\sin[\omega(z_\nu - t_{\nu k})]} + \bar{A}_1 l_\nu \ln\frac{\sin[\omega(z_\nu - \bar{\tau}_{1k})]}{\sin[\omega(z_\nu - \bar{t}_{1k})]} + \bar{A}_2 n_\nu \ln\frac{\sin[\omega(z_\nu - \bar{\tau}_{2k})]}{\sin[\omega(z_\nu - \bar{t}_{2k})]}, \qquad (7)$$
$$\omega = \pi/(2l), \qquad \tau_{\nu k} = \xi + \mu_\nu \eta + 2lk, \qquad t_{\nu k} = -\xi + \mu_\nu \eta + 2l(k+1)$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm\infty).$$

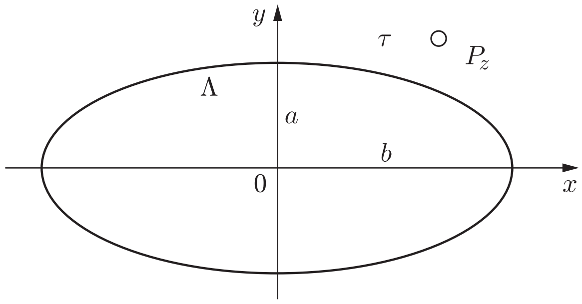

Рис. 5

Используя полученные комплексные потенциалы, по аналогии с защемленной полуплоскостью можно записать фундаментальные решения для ортотропного квадранта со свободной и свободно опертой кромками, а также решение для полуполосы со свободной конечной кромкой и свободно опертыми полубесконечными сторонами. Соотношения для свободно опертой ортотропной полуполосы могут быть получены непосредственно из (7) при замене упругих параметров с учетом ортотропии материала (при соответствующих значениях l_ν, n_ν).

7. Полученные выше фундаментальные решения можно использовать для построения комплексных потенциалов (для перечисленных областей) в случае действия сосредоточенной пары сил с единичным моментом $M = \exp(i\psi)$, приложенным в точке $\tau = \xi + i\eta$:

$$\Phi_\nu(z_\nu) = M_\nu^k(z_\nu, \tau, \psi) = \frac{d}{ds}\,[E_\nu^k(z_\nu, \tau + s\exp(i\psi))]_{s=0}, \qquad \nu = 1, 2.$$

При этом комплексные константы A_ν заменяются на B_ν:

$$B_\nu = A_\nu H(\psi), \qquad H(\psi) = \cos\psi + \mu_\nu \sin\psi.$$

8. Пусть бесконечная пластина (анизотропная) имеет эллиптическое отверстие Λ (рис. 5). Начало координат поместим в центр эллипса, а направления осей координат x, y совместим с направлениями осей эллипса (a, b — полуоси эллипса). Решение задачи о действии сосредоточенной силы в пластине с эллиптическим отверстием с использованием процедуры Грилицкого [6] и с учетом аналогии между плоской задачей и задачей изгиба пластин может быть получено в виде

$$\Phi(z_\nu) = E_\nu^{12}(z_\nu, \tau) = \omega_\nu'(\zeta_\nu)^{-1}[A_\nu \Psi_\nu(\zeta_\nu)\ln(\zeta_\nu - \eta_\nu) + \\ + l_\nu \bar{A}_1 \Psi_\nu^1(\zeta_\nu)\ln(\zeta_\nu^{-1} - \bar{\eta}_1) + n_\nu \bar{A}_2 \Psi_\nu^2(\zeta_\nu)\ln(\zeta_\nu^{-1} - \bar{\eta}_2) + \Psi_\nu^3(\zeta_\nu, \eta_\nu)]. \quad (8)$$

Здесь использованы конформные отображения внешности единичного круга $\gamma = |\sigma| = 1$ на внешность эллиптических отверстий Λ_ν в плоскостях $z_\nu = x + \mu_\nu y$, Λ (в плоскости $z = x + iy$):

$$z_\nu = \omega_\nu(\zeta_\nu) = \frac{a - i\mu_\nu b}{2}\,\zeta_\nu + \frac{a + i\mu_\nu b}{2}\,\frac{1}{\zeta_\nu}, \qquad z = \omega(\zeta) = \frac{a+b}{2}\,\zeta + \frac{a-b}{2}\,\frac{1}{\zeta} \quad (9)$$

и обратные функции

$$\zeta_\nu = \zeta_\nu(z_\nu) = \frac{z_\nu - \sqrt{z_\nu^2 - (a^2 + \mu_\nu^2 b^2)}}{a - i\mu_\nu b}, \quad \zeta = \zeta(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a+b}, \quad \eta_\nu = \zeta_\nu(\tau_\nu). \quad (10)$$

Функции $\Psi_\nu(\zeta_\nu)$, $\Psi_\nu^i(\zeta_\nu)$ $(i = 1, 2)$, $\Psi_\nu^3(\zeta_\nu, \eta_\nu)$ являются аналитическими вне единичного круга.

Если к пластине приложен сосредоточенный изгибающий момент, то комплексные потенциалы принимают вид

$$\Phi_\nu(z_\nu) = M_\nu^{12}(z_\nu, \tau) = \frac{1}{\omega_\nu'(\zeta_\nu)}\Big(\frac{B_\nu}{\zeta_\nu - \eta_\nu} + \frac{l_\nu \bar{B}_1}{\zeta_\nu(\zeta_\nu\bar{\eta}_1 - 1)} + \frac{n_\nu \bar{B}_2}{\zeta_\nu(\zeta_\nu\bar{\eta}_2 - 1)}\Big). \tag{11}$$

Краевые условия на контуре отверстия Λ определяются значениями величин l_ν, n_ν. Для жестко защемленного края отверстия l_ν, n_ν следует находить из (3), а для свободного края — из (4). Комплексные константы B_ν определены выше (см. п. **7**).

Следует отметить, что получить решение данной задачи при заданных на контуре эллиптического отверстия смешанных краевых условиях ($w = 0$, $M_n = 0$) не удается, поскольку в этом случае нельзя записать краевые условия через функции $\varphi_\nu(z_\nu)$. Это возможно в случае задания кинематических или статических краевых условий [2].

9. Решение задачи о действии сосредоточенных нагрузок в пластине с прямолинейным конечным разрезом может быть получено из (8)–(11), где следует положить $b = 0$. В частности, для нагружения сосредоточенным моментом получим

$$\Phi(z_\nu) = M_\nu^{13}(z_\nu, \tau) = \frac{B_\nu}{z_\nu - \tau_\nu} - \frac{B_\nu[I(z_\nu) - I(\tau_\nu)]}{2\sqrt{z_\nu^2 - a^2}\,(z_\nu - \tau_\nu)} + {} \\ + \frac{\bar{B}_1 l_\nu[I(z_\nu) - I(\bar{\tau}_1)]}{2(z_\nu - \bar{\tau}_1)} + \frac{\bar{B}_2 n_\nu[I(z_\nu) - I(\bar{\tau}_2)]}{2(z_\nu - \bar{\tau}_2)},$$

$$I(z) = \sqrt{z^2 - a^2} - z.$$

Сделаем замену переменных $z' = z + a$, $\tau' = \tau + a$, тогда из последнего выражения получим решение задачи о действии сосредоточенного момента в пластине с прямолинейным разрезом вдоль отрезка действительной оси $0 < x < 2a$. Осуществляя предельный переход при $a \to \infty$, найдем решение задачи для пластины с полубесконечным разрезом вдоль действительной оси $L = \{0 \leqslant x \leqslant \infty,\ y = 0\}$ при действии сосредоточенного момента:

$$\Phi(z_\nu) = M_\nu^{14}(z_\nu, \tau) = \frac{B_\nu}{z_\nu - \tau_\nu} - \frac{B_\nu}{2}\frac{1}{\sqrt{z_\nu}\,(\sqrt{z_\nu} + \sqrt{\tau_\nu}\,)} + {} \\ + \frac{l_\nu}{2}\frac{\bar{B}_1}{\sqrt{z_\nu}\,(\sqrt{z_\nu} + \sqrt{\bar{\tau}_1}\,)} + \frac{n_\nu}{2}\frac{\bar{B}_2}{\sqrt{z_\nu}\,(\sqrt{z_\nu} + \sqrt{\bar{\tau}_2}\,)}.$$

10. При решении задач изгиба пластин важную роль играют фундаментальные решения при наличии сосредоточенных дислокаций, являющихся функциями Грина, с помощью которых путем интегрирования могут быть построены потенциальные представления в виде интегралов от скачков смещений, распределенных с неизвестной плотностью, обеспечивающие заданные разрывы смещений вдоль разомкнутых или замкнутых кривых [7]. Для определения плотностей скачков используются условия на дефекте, приводящие к одному интегральному уравнению или к системе интегральных уравнений.

Пусть в пластине имеются дислокации, которые можно трактовать как разрывы смещений (прогибов и связанных с ними тангенциальных смещений). В случае, если задается разрыв прогибов w, напряженное состояние в пластине определяется по формулам, соответствующим решению в случае действия сосредоточенной силы P_z, однако при определении A_ν из первой системы уравнений в (2) в вектор-столбце правых частей $\boldsymbol{f}_j$ ($j = \overline{1,4}$) следует положить $f_1 = w/(2\pi i)$, $f_2 = f_3 = f_4 = 0$. Если заданы приращения тангенциальных смещений $w_x + iw_y$, то при определении B_ν из (2) в вектор-столбце правых частей $\boldsymbol{d}_j$ следует положить $d_1 = w_x/(2\pi i)$, $d_2 = w_y/(2\pi i)$, $d_3 = d_4 = 0$. При этом напряженно-деформированное состояние следует определять по формулам, соответствующим решению в случае действия сосредоточенного изгибающего момента.

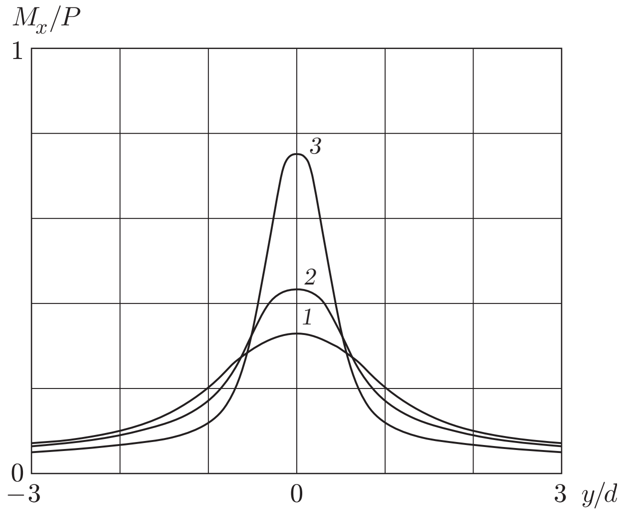

Рис. 6

Номер материала	$E_1 \cdot 10^{-4}$, МПа	$E_2 \cdot 10^{-4}$, МПа	E_1/E_2	$G \cdot 10^{-4}$, МПа	$M_{x\,\max}/P_z$
1	27,610	27,610	1	11,044	0,3183
2	5,384	1,795	3	0,863	0,4398
3	27,610	1,104	25	0,552	0,7669

11. Для иллюстрации эффективности предлагаемых потенциальных представлений на рис. 6 показано распределение напряжений M_x в сечении $x = 0$ полуплоскости (по линии защемления) для различных ортотропных материалов ($\varphi = 0$), характеристики которых приведены в таблице (номера кривых соответствуют номерам материалов). Для всех материалов коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0{,}25$. С увеличением степени ортотропии E_1/E_2 максимум напряжений $M_{x\,\max}$ в сечении заделки возрастает (см. таблицу). Вместе с тем наблюдается более быстрое затухание напряжений с удалением от проекции точки приложения силы P_z на линию $x = 0$. В случае ортотропной полуплоскости для вычисления напряжений по линии защемления можно получить следующее выражение:

$$M_x = \frac{|\mu_1|^2 P_z}{2\pi\alpha}\Big(\operatorname{arctg}\frac{(y-\eta)(\alpha^2+\beta^2)-\xi\alpha}{\xi\beta} - \operatorname{arctg}\frac{(y-\eta)(\alpha^2+\beta^2)+\xi\alpha}{\xi\beta}\Big).$$

Для изотропного материала ($M_{x\,\max} = P_z/\pi$) этот результат может быть получен из решения (3) или из последней формулы предельным переходом в параметрах анизотропии ($\alpha \to 0$, $\beta \to 1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кончковский З.** Плиты. Статические расчеты. М.: Стройиздат, 1984.
2. **Лехницкий С. Г.** Анизотропные пластинки. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
3. **Максименко В. Н., Подружин Е. Г.** Изгиб анизотропных пластин при наличии трещин сложной формы // Учен. зап. ЦАГИ. 1989. Т. 20, № 3. С. 81–90.
4. **Фильштинский Л. А., Любчак В. А.** Изгиб полубесконечной анизотропной пластины, ослабленной криволинейными разрезами // Прикл. механика. 1982. Т. 18, № 10. С. 63–67.
5. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1974.

6. **Грилицкий Д. В.** Вылив точки прикладания сили і моменту на розподіл напружень у безмежній анізотропниій пластинці з еліптичним отвором // Прикл. механика. 1956. Т. 2, № 2. С. 159–166.
7. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954.

Поступила в редакцию 23/IX 2002 г.,
в окончательном варианте — 17/I 2003 г.