

УДК 536.33

## **Расчет поля излучения в полупрозрачной среде с учетом падающего коллимированного излучения**

**А.М. Тимофеев**

*Северо-восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,  
Якутск*

E-mail: fz\_tam@ysu.ru

Построена и численно реализована математическая модель поля излучения в полупрозрачной среде, формирующегося под действием падающего коллимированного и диффузного излучения. Для решения задачи разработан подход на основе модифицированного метода средних потоков. Тестирование метода, проведенное путем сравнения с результатами других исследователей, подтвердило его надежность и высокую точность. В качестве примера проведен анализ влияния на поле излучения в водоемах различных факторов: собственного излучения среды, анизотропии рассеяния, отражательной способности дна.

**Ключевые слова:** теплообмен излучением, полупрозрачная среда, коллимированный, анизотропное рассеяние, отражение.

### **Введение**

Интерес к задачам радиационного и комбинированного теплообмена в полупрозрачных средах, где радиационное поле формируется падающим коллимированным (узконаправленным) излучением, обусловлен их широким практическим значением. Например, постановки таких задач имеют место при исследовании кристаллизации тугоплавких оксидов, нагреваемых с помощью лазерного излучения [1–2]. Лазеры, как источник света, используются для изучения дисперсных биологических объектов, таких как кровь человека [3]. Тепловое состояние водоемов определяется падающим солнечным потоком, также представляющим собой коллимированное излучение [4].

В слое полупрозрачного материала происходят процессы поглощения, переизлучения и рассеяния света, отражения его на границах среды. Падающее излучение имеет диффузную и коллимированную составляющие и испытывает на поверхности раздела сред отражение и преломление. Для точной количественной оценки термической структуры полупрозрачного материала необходимы надежные методы расчета поля излучения в излучающих, поглощающих, рассеивающих средах. В работах [2–4] поле излучения рассчитывалось по экспоненциальному закону Бугера. Более сложная модель поля излучения, состоящего из коллимированной и диффузной частей, рассматривалась в работе [1], но при этом не учитывалось его рассеяние средой.

Тимофеев А.М., 2012

В работе [5] было проведено сравнение нескольких методов определения поля излучения для характерных условий в водоемах. Исследования были продолжены в работе [6], где авторами была поставлена цель разработать метод решения, который бы учитывал физические особенности переноса излучения в водных суспензиях и в то же время минимизировал бы объем вычислительных работ. Предложенный метод трех потоков показал хорошее согласие результатов с более точным методом дискретных ординат и с экспериментальными данными. Однако в вышеназванных работах [5–6] не учитывалось собственное излучение среды.

В настоящей работе проводится численный анализ поля излучения в слое полупрозрачной среды, на границы которой падает коллимированный и неколлимированный (диффузный) радиационный поток. Данная модель была использована для расчета поля излучения в водоеме, формирующегося под действием падающего солнечного потока и излучения небесного свода. Для решения задачи разработан подход на основе модифицированного метода средних потоков (СП-метод). Данный метод своими широкими возможностями для учета оптических свойств среды и границ наряду с относительной простотой численного алгоритма хорошо зарекомендовал себя для исследований радиационного и комбинированного теплообмена [7–8].

### Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим краевую задачу переноса излучения в плоском слое поглощающей, излучающей и рассеивающей среды с заданным распределением температуры  $T(x)$ . Поле излучения состоит из двух частей: коллимированного (распространяющегося в пределах узкого телесного угла) и неколлимированного (диффузного) излучения (рис. 1):

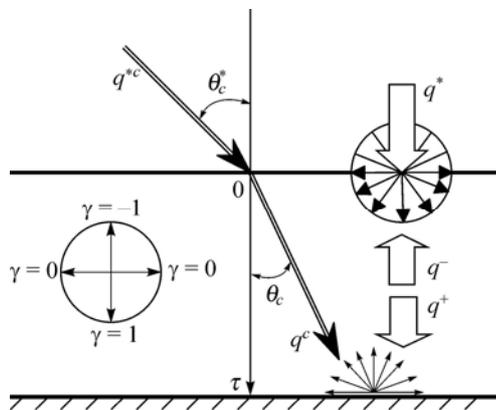
$$I_v^\Sigma = I_v^c + I_v. \quad (1)$$

Интенсивность коллимированного излучения определяется законом Бугера:

$$I_v^c(\tau_v) = I_v^c(0)e^{-\tau_v/\gamma_c}, \quad (2)$$

где

$$I_v^c(0) = (1 - \rho(\theta_c^*))I_v^{*c}, \quad (3)$$



$I_v^{*c}$  — интенсивность падающего на границу коллимированного излучения,  $\gamma_c = \cos(\theta_c)$ , угол падения  $\theta_c^*$  и преломления  $\theta_c$  коллимированного излучения связаны между собой законом Снеллиуса,  $\rho(\theta_c^*)$  — коэффициент отражения на границе раздела сред, определяется из закона Френеля.

Рис. 1. Физическая схема и система координат.

Поле неколлимированного излучения определяется уравнением переноса

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{\partial I_v(\tau_v, \gamma)}{\partial \tau_v} + I_v(\tau_v, \gamma) = \\ & = (1 - \omega_v) n_v^2 I_{bv}(T) + \frac{\omega_v}{2} \int_{-1}^1 p_v(\gamma, \gamma') I_v(\tau_v, \gamma') d\gamma' + \frac{\omega_v}{4\pi} p_v(\gamma, \gamma_c) I_v^c(0) e^{-\tau_v/\gamma_c}, \\ & 0 < \tau_v < \tau_{0v}, \quad -1 \leq \gamma \leq 1, \end{aligned} \quad (4)$$

с граничными условиями:

$$\tau_v = 0: \quad I_v^+(\gamma) = \rho_v(\gamma) I_v^-(\gamma) + \frac{n_v^2}{n_v^{*2}} (1 - \rho_v(\gamma^*)) I_v^*(\gamma^*), \quad \gamma > 0, \quad (5)$$

$$\tau_v = \tau_{0v}: \quad I_v^-(\gamma) = \varepsilon_v n_v^2 I_{bv}(T) + 2r_v \int_0^1 (I_v^+(\gamma)\gamma + I_v^c(\gamma_c)) d\gamma, \quad \gamma < 0. \quad (6)$$

Здесь  $I_v$  — спектральная интенсивность излучения,  $I_v^+$  и  $I_v^-$  — интенсивности излучения в нижнюю ( $\gamma > 0$ ) и верхнюю ( $\gamma < 0$ ) полусферу:

$$\int_{-1}^1 I_v(\tau_v, \gamma) d\gamma = \int_0^1 I_v^+(\tau_v, \gamma) d\gamma + \int_{-1}^0 I_v^-(\tau_v, \gamma) d\gamma, \quad (7)$$

$\gamma$  — косинус угла между направлением распространения излучения и осью координат  $x$ ,  $I_{bv}(T)$  — функция Планка излучения черного тела,  $\tau_v = k_v x$  и  $\tau_{0v} = k_v \delta$  — спектральная оптическая глубина и толщина слоя,  $\delta$  — толщина слоя (характерный размер),  $k_v = \alpha_v + \beta_v$  — спектральный коэффициент ослабления,  $\alpha_v$  и  $\beta_v$  — спектральные коэффициенты поглощения и рассеяния,  $\omega_v = \beta_v / k_v$  — спектральное альбедо однократного рассеяния (число Шустера),  $n_v$  — спектральный показатель преломления,  $\varepsilon_v$  и  $r_v$  — спектральная полусферическая диффузная излучательная и отражательная способности нижней границы, связанные между собой соотношением  $\varepsilon_v = 1 - r_v$ ,  $p_v$  — спектральная индикатриса рассеяния, которая постулируется в виде [9]:

$$p_v(\gamma_0) = \sum_{l=0}^L a_l P_l(\gamma_0), \quad a_0 = 1, \quad (8)$$

где  $\gamma_0$  — косинус угла между падающим  $\gamma'$  ( $\gamma_c$ ) и рассеянным  $\gamma$ -лучами,  $P_l$  — полином Лежандра порядка  $l$ .

Эквивалентная система уравнений СП-метода имеет вид [8]:

$$\frac{d}{d\tau_v} (\Phi_v^+ - \Phi_v^-) + (1 - \omega_v) (m_v^+ \Phi_v^+ - m_v^- \Phi_v^-) = (1 - \omega_v) \Phi_{0v} + \omega_v \Phi_v^c / \gamma_c, \quad (9)$$

$$\frac{d}{d\tau_v} (m_v^+ \delta_v^+ \Phi_v^+ - m_v^- \delta_v^- \Phi_v^-) + (1 - \omega_v \bar{\varepsilon}_v) (\Phi_v^+ - \Phi_v^-) = \omega_v \bar{\varepsilon}_v \Phi_v^c. \quad (10)$$

Граничное условие для системы (9)–(10) на поверхности раздела воздух–вода учитывает пропускание падающего потока и отражение в двух зонах — в области полного внутреннего отражения и внутри конуса преломления [10]:

$$\tau_v = 0 : \quad \Phi_v^+ = (1 - \hat{\rho}_v) \Phi_v^* + \left(1 - \frac{n_v^{*2}}{n_v^2}\right) \Phi_v^- + \hat{\rho}_v \frac{n_v^{*2}}{n_v^2} \Phi_v^- \quad (11)$$

На нижней границе (дно водоема) учитывается собственное излучение поверхности и диффузное отражение падающих потоков коллимированного и неколлимированного излучения:

$$\tau_v = \tau_{0v} : \quad \Phi_v^- = \varepsilon_v \Phi_{0v} / 4 + r_v (\Phi_v^+ + \Phi_v^c) \quad (12)$$

$$\text{Здесь} \quad \Phi_v^\pm(\tau_v) = \pm \frac{\int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I_v(\tau_v, \gamma) \gamma d\gamma}{4\sigma T_*^4} \quad (13)$$

безразмерные плотности полусферических потоков,

$$m_v^\pm(\tau_v) = \frac{\int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I_v(\tau_v, \gamma) d\gamma}{\int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I_v(\tau_v, \gamma) \gamma d\gamma} \quad \text{и} \quad \delta_v^\pm(\tau_v) = \frac{\int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I_v(\tau_v, \gamma) \gamma^2 d\gamma}{\int_{0^{(-1)}}^{1^{(0)}} I_v(\tau_v, \gamma) d\gamma} \quad (14)$$

коэффициенты переноса, которые являются функционалами решения и находятся в процессе итерационного решения,  $\bar{\zeta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(\gamma) \gamma d\gamma$  — средний косинус угла

рассеяния,  $\Phi_{0v} = \frac{n_v^2 I_{bv}}{4\sigma T_*^4}$  — безразмерная плотность потока равновесного излучения,

$$\Phi_v^c = \frac{q_v^c}{4\sigma T_*^4} = \frac{\gamma_c I_{0v}^c e^{-\tau/\gamma_c}}{4\sigma T_*^4} = (1 - \rho(\theta_c^*)) \Phi_v^{*c} e^{-\tau/\gamma_c} \quad (15)$$

безразмерная плотность потока коллимированного излучения в слое,

$$\Phi_v^{*c} = \frac{q_v^{*c}}{4\sigma T_*^4} = \frac{\gamma_c I_v^{*c}}{4\sigma T_*^4} \quad (16)$$

безразмерная плотность потока коллимированного излучения, падающего на границу раздела,  $T^*$  — определяющая температура ( $T^* = T(0)$ ), значение коэффициента  $\hat{\rho}_v$  может быть рассчитано по формуле Уолша–Данкла для полусферической отражательной способности идеальной поверхности [11]:

$$\hat{\rho}_v = \frac{1}{2} + \frac{(n-1)(3n+1)}{6(n+1)^2} - \frac{2n^3(n^2+2n-1)}{(n^2+1)(n^4-1)} + \frac{8n^4(n^4+1)}{(n^2+1)(n^4-1)^2} \ln(n) + \frac{n^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)^3} \ln \frac{n-1}{n+1}, \quad (17)$$

где  $n = n_v/n_v^*$ .

Из решения задачи определяются плотность интегрального суммарного потока излучения:

$$\Phi^\Sigma = \int_0^\infty (\Phi_\nu + \Phi_\nu^c) d\nu \quad (18)$$

и дивергенция суммарного потока падающего излучения:

$$\frac{d\Phi^\Sigma}{d\tau} = \int_0^\infty (1 - \omega_\nu)(n_\nu^2 \Phi_{0\nu} - (m_\nu^+ \Phi_\nu^+ - m_\nu^- \Phi_\nu^-) - \Phi_\nu^c / \gamma_c) d\nu, \quad (19)$$

где  $\Phi_\nu = \Phi_\nu^+ - \Phi_\nu^-$  — плотность результирующего спектрального потока неколлимированного излучения.

Ограничиваясь случаем  $L = 2$  в разложении (8), из формального решения задачи (4)–(6) можно получить аналитические соотношения для коэффициентов переноса:

$$m_\nu^\pm(\tau_\nu) = \frac{S_0^\pm(\tau_\nu)}{S_1^\pm(\tau_\nu)}, \quad \delta_\nu^\pm(\tau_\nu) = \frac{S_2^\pm(\tau_\nu)}{S_0^\pm(\tau_\nu)}, \quad (20)$$

где обобщенные моменты имеют вид (индекс  $\nu$  для краткости опущен):

$$S_n^+(\tau) = c_1 E_{n+2}(\tau) + \int_0^\tau (\psi_1(\tau') E_{n+1}(\tau - \tau') + \psi_2(\tau') E_{n+2}(\tau - \tau') + \psi_3(\tau') E_{n+3}(\tau - \tau')) d\tau', \quad (21)$$

$$S_n^-(\tau) = (-1)^n \left[ c_2 E_{n+2}(\tau) + \int_\tau^{\tau_0} (\psi_1(\tau') E_{n+1}(\tau' - \tau) - \psi_2(\tau') E_{n+2}(\tau' - \tau) + \psi_3(\tau') E_{n+3}(\tau' - \tau)) d\tau' \right], \quad n = 0, 1, 2. \quad (22)$$

Здесь

$$c_1 = m^+(0) \Phi^+(0), \quad (23)$$

$$c_2 = -m^-(\tau_0) \Phi^-(\tau_0), \quad (24)$$

$$\psi_1(\tau) = \frac{1-\omega}{2} \Phi_0(\tau) + \frac{\omega}{2} (m^+(\tau) \Phi^+(\tau) - m^-(\tau) \Phi^-(\tau)) - \frac{1}{3} \psi_3(\tau) + \frac{\omega}{2} \Phi^c \gamma_c^{-1}, \quad (25)$$

$$\psi_2(\tau) = \frac{1}{2} \omega a_1 (\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)) + \frac{\omega}{2} \Phi^c, \quad (26)$$

$$\psi_3(\tau) = \frac{3}{8} \omega a_2 \left[ 3 \cdot (m^+(\tau) \delta^+(\tau) \Phi^+(\tau) - m^-(\tau) \delta^-(\tau) \Phi^-(\tau)) - (m^+(\tau) \Phi^+(\tau) - m^-(\tau) \Phi^-(\tau)) + (3\gamma_c^2 - 1) \Phi^c \gamma_c^{-1} \right], \quad (27)$$

где

$$E_n(\tau) = \int_0^1 e^{-\mu \tau} \mu^{n-2} d\mu \quad (28)$$

интегрально-экспоненциальная функция.

Метод решения задачи подробно описан в работах [7, 8]. В качестве начального приближения для коэффициентов переноса используются осредненные значения  $m^{\pm} = \pm 2$ ,  $\delta^{\pm} = 1/3$ . Указанные значения коэффициентов переноса получаются из соотношений (20) в предположении изотропности поля излучения в соответствующих полусферах. Далее решается СП-система и коэффициенты переноса уточняются по формулам (20)–(22), затем снова решается система (9)–(10). Итерационный процесс повторяется до выполнения критерия конца итераций. На каждом шаге итераций краевая задача (9)–(12) решается методом матричной факторизации или прогонки, а интегралы в (21)–(22) вычисляются с помощью стандартных квадратурных формул. Быстрая сходимость метода (3–4 итерации) для широкого диапазона определяющих параметров позволяет эффективно использовать его для задач радиационного и комбинированного теплообмена.

### Анализ

Для тестирования метода было проведено сравнение с результатами работы [6]. На рис. 2 показано поведение приведенных потоков излучения  $q/q^*$ ,  $q^c/q^*$  и  $q^{\Sigma}/q^*$  для слоя неизлучающей, анизотропно рассеивающей серой среды. Наблюдается очень хорошее совпадение результатов, свидетельствующее о надежности предложенного метода. Расхождение в данных для неколлимированного потока объясняется тем, что в СП-методе используется усеченная (трехчленная) индикатриса рассеяния, в то время как в отмеченной работе было использовано 150 членов ряда (8).

Ниже представлены результаты расчетов, выполненных для значений определяющих параметров задачи, типичных для мелких водоемов (рис. 2). Температурное поле водоема считается однородным  $T = 10$  °С. Среда является оптически серой. Результаты, полученные для данных “стандартных” условий, будут служить базисом для дальнейшего параметрического анализа.

На рис. 3. показано влияние собственного излучения среды. В верхних слоях воды в указанных условиях преобладает высвечивание в направлении падающего излучения. В результате радиационный поток имеет отрицательный знак, и суммарный поток существенно меньше того, что рассчитан для ослабляющей среды без

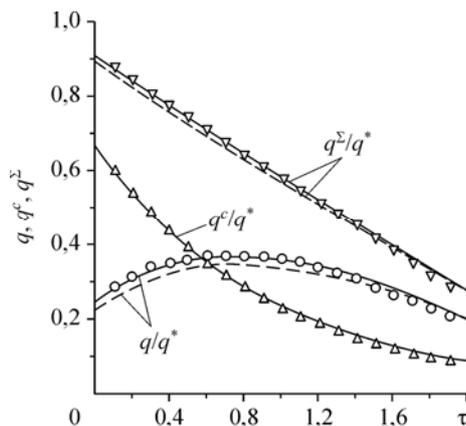


Рис. 2. Сравнение с результатами работы [6].  $q^c = 500$  Вт/м<sup>2</sup>,  $q^* = 200$  Вт/м<sup>2</sup>,  $\theta_c^* = 30^\circ$ ,  $\omega = 0,75$ ,  $\tau_0 = 2$ ,  $r = 0,5$ . Сплошные и штриховые линии — из работы [6], маркеры — СП-метод.

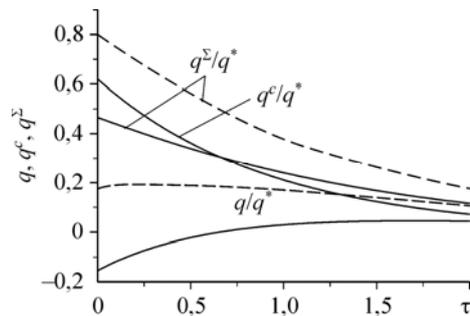
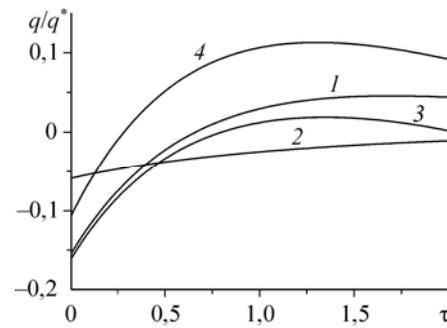


Рис. 3. Влияние собственного излучения.  $q^c = 600$  Вт/м<sup>2</sup>,  $q^* = 300$  Вт/м<sup>2</sup>,  $\theta_c^* = 30^\circ$ ,  $\omega = 0,75$ ,  $\tau_0 = 2$ ,  $r = 0,3$ , рассеяние изотропное,  $T(\tau) = 10$  °С; штриховые линии — расчет без учета собственного излучения среды.

Рис. 4. Влияние различных факторов на неколлимированное излучение.

$q^* = 300 \text{ Вт/м}^2$ ,  $\theta_c^* = 30^\circ$ ,  $\omega = 0,75$ ,  $\tau_0 = 2$ ,  $T(\tau) = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  
 $q^c = 600$  (1, 3, 4), 0 (2)  $\text{Вт/м}^2$ ,  $r = 0,3$  (1, 2, 4), 0,6 (3),  
 рассеяние: изотропное (1, 2, 3), анизотропное (4).



учета собственного излучения. Эти результаты показывают важность учета собственного излучения среды в теплообмене в водоемах. Отметим еще раз, что в работах [5–6] этот момент не был учтен, и расчеты проведены для поглощающей и рассеивающей среды.

В случае отсутствия солнечного излучения (ночные условия, пасмурная погода) поле излучения в слое воды является почти однородным (кривая 2, рис. 4). Коллимированное излучение в результате рассеяния в среде увеличивает диффузную составляющую радиационного потока так, что амплитуда его изменения в слое существенно увеличивается (кривая 1, рис. 4). При этом в верхних слоях преобладает высвечивание в сторону верхней границы, а в нижних — в сторону дна водоема. Сильное анизотропное рассеяние вперед ( $\bar{\zeta} = 0,58$ :  $a_1 = 1,73$ ,  $a_2 = 1,0$ ), по сравнению с изотропным рассеянием, приводит к увеличению полусферического потока, распространяющегося в положительном направлении  $q^+$ , что приводит к увеличению результирующего радиационного потока  $q = q^+ - q^-$  (кривая 4, рис. 4). Отражение на нижней границе водоема снижает значение радиационного потока в придонной области (кривая 3, рис. 4).

### Заключение

Цель настоящего исследования заключалась в развитии модифицированного метода средних потоков (СП-метода), применительно к задачам расчета поля излучения в полупрозрачной среде с учетом падающего коллимированного излучения. Данный метод заслуживает внимания тем, что позволяет учитывать такие важные физические процессы как анизотропное рассеяние, отражение и преломление на границе раздела сред и при этом минимизировать объем вычислительных работ. Результаты, полученные с помощью предложенного метода, хорошо согласуются с результатами других исследователей, что подтверждает его надежность и применимость к решению широкого круга задач радиационного теплообмена.

В качестве примера был проведен анализ влияния на поле излучения в водоемах различных факторов: собственного излучения среды, анизотропии рассеяния, отражательной способности дна. Выполненный анализ показал, что собственное излучение среды, анизотропия рассеяния, отражение на границах среды оказывают заметное влияние на поле излучения в водоемах и, соответственно, на теплообмен в целом. Отмеченный факт свидетельствует о важности точной и надежной количественной оценки различных оптических факторов при решении радиационной части задачи.

### Список литературы

1. Воробьев А.Ю., Петров В.А., Титов В.Е. Быстрый нагрев и плавление оксида алюминия при воздействии концентрированного лазерного излучения // Теплофизика высоких температур. 2007. Т. 45, № 4. С. 533–542.
2. Li J.F., Li L., Stott F.H. Comparison of volumetric and surface heating sources in the modeling of laser melting of ceramic materials // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2004. Vol. 47. P. 1159–1174.

3. Букатый В.И., Павлова Я.В., Сакович С.И., Гаськова О.В., Устинов Г.Г. Взаимодействие низкоинтенсивного лазерного излучения с кровью человека // Известия Томского политех. ун-та. 2007. Т. 310, № 2. С. 121–125.
4. Snider D.M., Viskanta R. Radiation induced thermal stratification in surface layers of stagnant water // J. Heat Transfer. 1975. Vol. 97. P. 35–40.
5. Daniel K.J., Laurendeau N.M., Incropera F.P. Prediction of radiation absorption and scattering in turbid water bodies // J. Heat Transfer. 1979. Vol. 101. P. 63–67.
6. Incropera F.P., Hof W.G. A Three-flux method for predicting radiative transfer in aqueous suspensions // J. Heat Transfer. 1979. Vol. 101. P. 496–501.
7. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1984. 277с.
8. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А. Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. 198 с.
9. Evans L.B., Chu C.M., Churchill S.W. The Effect of anisotropic scattering on radiant transport // Transactions of the ASME. J. Heat Transfer. 1965. Vol. 87, No. 3. P. 381–387.
10. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М. О представлении граничных условий в задачах радиационного теплообмена в многослойных системах // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5, № 4. С. 479–485.
11. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976. 616 с.

*Статья поступила в редакцию 8 декабря 2010 г.*