УДК 541.24:532.5

ОСРЕДНЕННОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ВЕКТОРА ОБЪЕМНОЙ ПЛОТНОСТИ КАПИЛЛЯРНОЙ СИЛЫ В СПЕКАЕМОЙ ПОРОШКОВОЙ СМЕСИ

В. П. Бушланов

Томский филиал Института структурной макрокинетики РАН, 634021 Томск

Дополнительным пространственным осреднением известного выражения для объемной плотности поверхностной силы в среде с развитой межфазной поверхностью получено удобное для практического использования выражение для этой силы в виде дивергенции удвоенного тензора плотности поверхностной энергии.

При горячем прессовании порошков, а также при их свободном спекании частицы порошка плавятся, что приводит к образованию в таких средах развитой межфазной поверхности, подверженной действию сил поверхностного натяжения [1]. В этом случае на поверхностях частиц действует значительное капиллярное давление, пропорциональное $2\Sigma/r$, где Σ — коэффициент поверхностного натяжения; r — радиус кривизны. Рассмотрим суммарное воздействие капиллярных сил в процессах горячего прессования и спекания в рамках физической модели и полной системы осредненных уравнений механики гетерогенных сред [2]. Осредненная объемная плотность поверхностной силы $\boldsymbol{P}_\Sigma$ в осредненном уравнении импульса для межфазной границы имеет вид (см. [2], формулы (2.2.33), (2.3.2))

$$\boldsymbol{P}_\Sigma = s_{12}\left\langle \frac{1}{\delta' S_{12}} \int\limits_{\delta' L} \boldsymbol{\Sigma}' d'l \right\rangle_{12}, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \Sigma \boldsymbol{\tau}_{12}, \tag{2}$$

s_{12} — площадь межфазной поверхности в единице объема; $\delta' L$ — межфазная граница в объеме осреднения dV, ограничивающая площади элементов, составляющих межфазную поверхность $\delta' S_{12}$, содержащуюся в объеме dV; $d'l$ — элемент длины границы $\delta' L$; $\langle \cdot \rangle_{12}$ — осреднение по всей межфазной поверхности, содержащейся в объеме dV; $\boldsymbol{\tau}_{12}$ — единичный вектор, касательный к межфазной поверхности:

$$\boldsymbol{\tau}_{12} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{n}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к межфазной поверхности; $\boldsymbol{l}$ — единичный вектор, касательный к межфазной границе $\delta' L$. Ниже путем дополнительного пространственного осреднения (1) в рамках физической модели [2] получено выражение $\langle \boldsymbol{P}_\Sigma \rangle$, удобное для приложений.

Проведем осреднение (1) следующим образом. Пусть dV_1 — куб со стороной Δ. Выберем следующие $N-1$ кубов dV_m $(m = 2, 3, \ldots, N)$ таким образом, чтобы каждый $(m+1)$-й куб содержал m-й куб, а расстояние между поверхностями соседних кубов было равно $\delta \ll \Delta$. На рис. 1 изображены границы граней кубов dV_m (сплошная линия) и dV_{m+1}

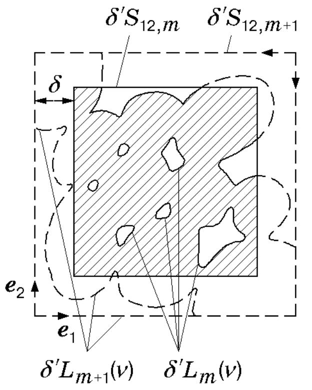

Рис. 1

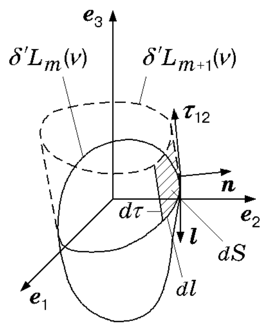

Рис. 2

(штриховая линия), перпендикулярные единичному вектору системы координат $\boldsymbol{e}_3$, заштрихованные области являются пересечением грани куба dV_m с расплавленными частицами порошка, содержащимися в его объеме. Запишем осреднение (1) в виде

$$\langle \boldsymbol{P}_\Sigma \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{dV_m} \oint\limits_{dV_m} \boldsymbol{P}_\Sigma \, dV = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} s_{12} \Big\langle \frac{1}{\delta' S_{12,m}} \oint\limits_{\delta' L_m} \boldsymbol{\Sigma}' d'l \Big\rangle_{12} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{dV_m} \sum_{\nu} \oint\limits_{\delta' L_m(\nu)} \boldsymbol{\Sigma}' \, d'l, \qquad (4)$$

где $\delta' S_{12,m}$ — величина межфазной поверхности в объеме dV_m. Как и в [2], суммирование проводится по всем ν-м границам $\delta' L_m(\nu)$, лежащим только на гранях кубов dV_m и являющимся линиями пересечений указанных граней с межфазной поверхностью. Интегралы по частям контуров $\delta' L_m(\nu)$, являющихся общими границами односвязных поверхностей многосвязной межфазной поверхности внутри объемов dV_m, при суммировании уничтожаются, так как единичные векторы $\boldsymbol{\tau}_{12}$ смежных поверхностей противоположны по направлению. Пусть

$$a = \delta N, \qquad (5)$$

где $\delta \ll a \ll \Delta$. Из (2)–(5) имеем

$$\langle \boldsymbol{P}_\Sigma \rangle_i = \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{dV_m} \sum_{\nu} \delta \oint\limits_{\delta' L_m(\nu)} \boldsymbol{\Sigma} (\boldsymbol{\tau}_{12} \cdot \boldsymbol{e}_i) \, d'l, \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{e}_i$ — единичный вектор ортогональной системы координат; $\langle \boldsymbol{P}_\Sigma \rangle_i$ — i-я компонента осредненной плотности капиллярной силы (4). Пусть индекс g обозначает грань куба, нормалью к которой является $\boldsymbol{e}_g$. Имеем

$$\delta = |\tau_g| \, d\tau, \qquad (7)$$

где $\tau_g = \boldsymbol{\tau}_{12} \cdot \boldsymbol{e}_g$; $d\tau$ — расстояние, отсчитываемое вдоль межфазной поверхности в направлении $\boldsymbol{\tau}_{12}$. На рис. 2 изображен фрагмент частицы порошка, содержащийся в кубе dV_m (сплошная линия), и фрагмент этой частицы, содержащийся между перпендикулярными $\boldsymbol{e}_3$ гранями кубов dV_m и dV_{m+1} (штриховая линия). Так как на грани куба $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{e}_g = 0$, то вектор $\boldsymbol{e}_g$ можно разложить только по векторам $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\tau}_{12}$:

$$\boldsymbol{e}_g = n_g \boldsymbol{n} + \tau_g \boldsymbol{\tau}_{12}, \qquad (8)$$

где $n_g = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_g$. Умножая (8) скалярно на $\boldsymbol{e}_i$, получим

$$\tau_i \tau_g = \delta_{ig} - n_i n_g, \tag{9}$$

где δ_{ig} — символ Кронекера. Заменив в (6) dV_m на dV_1, с погрешностью порядка $a/\Delta \ll 1$ из (6), (7), (9) получим

$$\langle \boldsymbol{P}_\Sigma \rangle_i = \frac{1}{a} \sum_{g=1}^{3} \frac{\Sigma}{dV_1} \Bigg[\oint\limits_{S^+_{12,g}} (\delta_{ig} - n_i n_g)\, d'S - \oint\limits_{S^-_{12,g}} (\delta_{ig} - n_i n_g)\, d'S \Bigg], \tag{10}$$

где $dS' = dl\, d\tau$; $S^+_{12,g}$, $S^-_{12,g}$ $(g = 1, 2, 3)$ — межфазные поверхности, содержащиеся в объемах усеченных пирамид, основаниями которых являются параллельные грани кубов dV_1 и dV_N (знак “ + ” соответствует усеченным пирамидам, построенным на гранях указанных кубов, имеющих положительные координаты относительно центра куба dV_1). При выводе (10) учтено, что для усеченных пирамид со знаком “ + ” $\delta = \tau_g\, d\tau$, а для усеченных пирамид со знаком “ − ” $\delta = -\tau_g\, d\tau$.

Пусть

$$T_{ig} = \frac{\Sigma}{2dV} \oint\limits_{dS_{12}} (\delta_{ig} - n_i n_g)\, d'S, \tag{11}$$

где T_{ig} — тензор объемной плотности поверхностной энергии (тензор поверхностной энергии впервые введен в [3]).

Так как из (11) $T_{gg} = \Sigma s_{12}$, то след тензора объемной плотности поверхностной энергии равен объемной плотности поверхностной энергии.

Используя (11), разложим (10) в ряд по степеням Δ, отбрасывая члены порядка Δ^2 и учитывая, что объемы усеченных пирамид равны приближенно $a\Delta^2$. Получим

$$\langle \boldsymbol{P}_\Sigma \rangle_i = 2 \sum_{g=1}^{3} \frac{T_{ig}(t, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_g \Delta/2) - T_{ig}(t, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_g \Delta/2)}{\Delta} = 2\, \frac{\partial T_{ig}}{\partial x_g}, \tag{12}$$

где t — время; $\boldsymbol{x}$ — координаты центра куба dV_1; $\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{e}_g \Delta/2$ — координаты граней куба dV_1.

По аналогии с записью дифференциальных уравнений движения в моделях сплошной среды с использованием дивергенции тензора напряжений и в соответствии с (12) тензор $2T_{ig}$ можно назвать тензором капиллярных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бальшин М. Ю., Кипарисов С. С.** Основы порошковой металлургии. М.: Металлургия, 1978.
2. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
3. **Chandrasekhar S.** The stability of a rotating liguid drop // Proc. Roy. Soc. London. 1965. V. A286, N 1404. P. 1–26.

Поступила в редакцию 25/V 1998 г.,
в окончательном варианте — 9/VII 1999 г.